This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

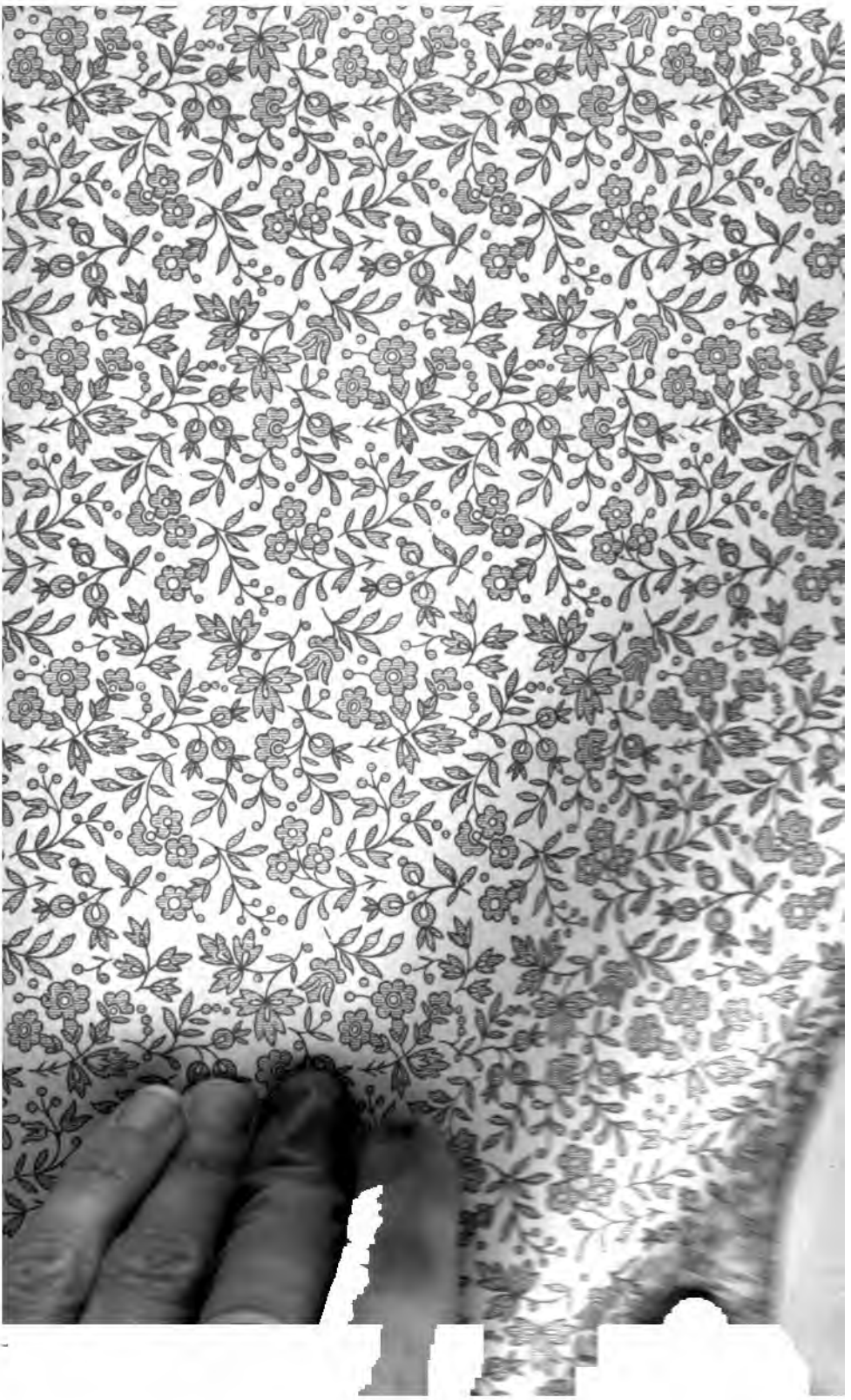
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries



MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Leipzig

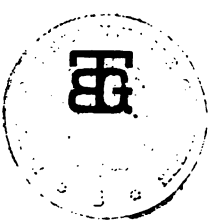
gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein** zu Leipzig und Prof. **Adolph Mayer** zu Leipzig.

XX. Band.

Mit 4 lithographirten Tafeln.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1882.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
Q 28 Z 15

Inhalt des zwanzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung).

Seite

du Bois-Reymond, in Tübingen. Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen 122

von Braunmühl, in München. Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades. 557

Brill, in München. Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades 330

—— Ueber das Polvierseit 531

Bruns, in Leipzig. Ueber eine Minimumsaufgabe 455

Cantor, in Halle a. S. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. 3. Fortsetzung des Artikels in Bd. XVII, pag. 355. 113

Dyck, in Leipzig. Gruppentheoretische Studien. (Mit drei lithographirten Tafeln.). 1

Gordan, in Erlangen. Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form $f = x_1{}^3x_2 + x_2{}^3x_3 + x_3{}^3x_1$ 487

—— Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen 515

Hankel †. Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. (Abdruck aus dem Gratulationsprogramm der Tübinger Universität vom 6. März 1870.) 63

Hess, in München. Ueber das Problem der Rotation 461

Hofmann, in München. Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Theorie der Potenzreste, sowie über die Erweiterung des Congruenzbegriffes 471

Hölder, in Tübingen. Beweis des Satzes, dass eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlich singulären Stelle jedem Werth beliebig nahe kommt 138

—— Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze 535

Hurwitz, in Göttingen. Ueber eine Reihe neuer Functionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen bilden 125

—— Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven III. Ordnung . . 135

Inhaltsverzeichniss der Bände 11—20 594

Kantor, in Prag. Bemerkungen zu Herrn Sturm's Abhandlung „Ueber die reciproke Verwandtschaft und damit zusammenhängende Verwandtschaften" XIX. Band, 4. Heft 297

Klein, in Leipzig. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Substitutionen in sich. (Zweite Mittheilung.) 49

Seite

Königsberger, in Wien. Ueber eine Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen 587

Krause, in Rostock. Ueber Multiplicatorgleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung 54

—— Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation fünften Grades 226

Lie, in Christiania. Untersuchungen über geodätische Curven 357

Lindemann, in Freiburg i. Br. Ueber die Zahl π 213

Noether, in Erlangen. Note über die algebraischen Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen 59

Poincaré, in Paris. Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaires. (Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein.) 52

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft für das Jahr 1885 146

Rausenberger, in Frankfurt a. M. Notiz zur Theorie der Modulfunctionen 45

Zur Theorie der Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden 47

- - - Ueber eindeutige Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden I. 187

—— Ueber periodische Functionen zweiter Gattung 550

Schottky, in Breslau. Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich. (Auszug aus einem Schreiben an F. Klein.) . . . 299

Schroeter, in Breslau. Ueber cyklisch-projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen 231

Schur, in Leipzig. Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung 254

Staude, in Leipzig. Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides. (Mit einer lithographirten Tafel.) 147

- - - Ueber geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid 185

Thieme, in Posen. Zur Construction des Polarsystems einer Fläche dritter Ordnung 144

Weber, in Königsberg i. Pr. Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist 301

Gruppentheoretische Studien.

Von

WALTHER DYCK in Leipzig.

(Mit drei lithogr. Tafeln.)

„A group is defined by means of the laws of combination of its symbols."

Cayley.

Einleitung.

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit dem Probleme, *eine Gruppe von discreten Operationen, welche auf ein gewisses Object angewandt werden, zu definiren, wenn man dabei von einer speciellen Darstellungsform der einzelnen Operationen absieht, diese vielmehr nur nach den zur Gruppenbildung wesentlichen Eigenschaften als gegeben voraussetzt.*

Wir gehen zur Bildung der Gruppe von gewissen *erzeugenden Operationen* $A_1, A_2, A_3, \cdots$ aus, über deren *speciellen* Charakter keinerlei Annahmen gemacht werden.

*Dann kann man jede Gruppe, welche durch Iteration und Combination dieser Operationen sich bilden lässt, individualisiren, durch die Kenntniss gewisser Relationen, die bei der Zusammensetzung dieser ursprünglichen Operationen auftreten.**)

Indem wir jede Verbindung unserer Operationen in der bekannten Weise in Form eines symbolischen Productes:

$$A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} \cdots A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} \cdots \cdots \tag{1}$$

schreiben, nehmen alle solche Relationen die Gestalt

$$F_h(A_i) = 1 \tag{2}$$

an, wo die F_h specielle Producte der in (1) angedeuteten Form sind.

Damit werden alle *holoedrisch isomorphen* Gruppen in *eine einzige* Gruppe begriffen, und das *Wesen* der Gruppe drückt sich nicht mehr an einer speciellen Darstellungsform ihrer Operationen aus, sondern lediglich in der gegenseitigen Beziehung derselben zu einander. Im umgekehrten Sinne lässt sich daher auch das Princip aussprechen:

*) Die zu Anfang gesetzte Bemerkung Cayley's im „American Journal of Mathematics" vol. 1, pag. 51.

Die nothwendige und hinreichende Charakteristik des gegenseitigen Verhaltens einer Reihe irgendwie definirter Operationen $A_1, A_2, \cdots$, welche wir auf ein gewisses Object ausüben, ist in der aus ihnen gebildeten Gruppe gegeben.

Indem wir so die gruppentheoretischen Operationen rein formal auffassen, zeigt sich deutlich ihre Stellung in einer formalen Entwickelung analytischer Operationen überhaupt.*) Es sind Multiplicationsoperationen, welche das associative, *nicht* aber das commutative Princip befolgen. Dabei wird diesen Operationen *durch gewisse Multiplicationsregeln* (2), $F_k = 1$, der Charakter eines *speciellen* Operationskreises ertheilt, der eine unendliche oder auch eine endliche Gruppe von Operationen umfasst.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Theile. *Der erste Abschnitt* entwickelt das Thema in seiner allgemeinsten Formulirung. Wir gehen aus von der denkbar allgemeinsten Gruppe G, die aus einer Reihe von erzeugenden Operationen $A_1, A_2, A_3, \cdots$ sich bilden lässt, indem wir zwischen diesen Operationen keinerlei Relationen voraussetzen. Jede specielle Gruppe $\overline{G}$ scheidet sich dann ab durch Einführung gewisser Relationen $F_k = 1$, deren gegenseitiges Verhältniss, sowie ihre Stellung zu den Gruppen G und $\overline{G}$ sich in einfachster Weise präcisiren lässt.

Den abstracten Entwickelungen geht eine *geometrische* Einkleidung parallel, die hier zunächst nur eine anschauungsmässige Darstellung unserer analytischen Operationen bezweckt, die aber für die Auseinandersetzungen des zweiten Abschnittes wesentlich wird. Allgemein zu reden besteht diese geometrische Darstellung einer Gruppe in der Eintheilung zunächst eines ebenen Bereiches in gleichartige Gebiete**), derart, dass jedem einzelnen Gebiete eine Substitution der Gruppe zugeordnet werden kann und die Ueberführung der Substitutionen in einander durch die (im Sinne der analysis situs verstandene) Ueberführung dieser Gebiete in einander sich ausspricht.

---

*) Ich erwähne hier die Entwickelungen in Grassmann's Ausdehnungslehre über die Multiplication extensiver Grössen, einzelne Abschnitte über die Multication der Quaternionen in Hamilton's Elements of Quaternions, sowie Hankel's Vorlesungen über die complexen Zahlen, um darauf in § 16. Bezug zu nehmen; endlich Arbeiten von E. Schröder, welcher speciell der Stellung gruppentheoretischer Operationen in einer formalen Entwickelung der Algebra gedenkt.

**) Gebietseintheilungen, wie sie der Art nach zuerst von Schwarz im Anschluss an *functionentheoretische* Betrachtungen studirt worden sind (man vergleiche die Abhandlung über die hypergeometrische Reihe in Crelle's Journal, Band 75, sowie „Bestimmung einer speciellen Minimalfläche." Preisschrift. Berlin 1871), und wie sie in den sogleich näher zu bezeichnenden Arbeiten von Klein — zuerst in dessen Programm „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" Erlangen 1872 (Note VII) — in *gruppentheoretischem* Sinne verwerthet sind.

Der zweite Abschnitt beschränkt sich auf die Darstellung *endlicher Gruppen* und schliesst dabei enge an unser geometrisches Bild an. Dieses erscheint nämlich jetzt in der Form der regulären Gebietseintheilung einer geschlossenen Fläche und damit als reguläre Riemann'sche Fläche in dem von Herrn Klein eingeführten Sinne*). Die Relationen $F_h = 1$, die wir zur Definition einer Gruppe zu Grunde legen, lassen sich dabei zur Charakterisirung der Verzweigung der Riemann'schen Fläche und weiter zur Bestimmung eines Systems von nicht ineinander überführbaren Rückkehrschnitten auf der Fläche verwenden. Diese geometrische Bedeutung ergiebt die Bestimmung einer oberen Grenze für die, zur Definition einer endlichen Gruppe nothwendige, Anzahl von Relationen $F_h = 1$.

Gerade diese geometrische Formulirung vermittelt nun die Darstellung gewisser specieller Gruppen in dem von uns intendirten Sinne durch Relationen $F_h = 1$ zwischen gewissen erzeugenden Substitutionen.

---

*) Man sehe die Abhandlungen von Klein in den Annalenbänden IX—XV und insbesondere die Arbeit „Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen." Math. Ann. Bd. XIV, p. 458 ff. In allen diesen Untersuchungen tritt die Gruppe der behandelten regulären Riemann'schen Flächen in dem hier zu Grunde gelegten Sinne in der Ueberführung gewisser Gebiete (der Blätter der Riemann'schen Fläche) ineinander hervor.

Im Anschlusse hieran stehen meine früheren Untersuchungen, in denen es sich darum handelte, reguläre Gebietseintheilungen auf einer Fläche von gegebenem Geschlechte zu bestimmen und die zugehörigen Gruppen zu discutiren*).

Der Zusammenhang gewisser Gebietseintheilungen auf einer Fläche mit gruppentheoretischen Problemen wurde wohl zuerst von C. Jordan ausgesprochen und es sei betreffs dieser Anschauungen auf dessen „Recherches sur les polyèdres" im 66. und 68. Bande von Crelle's Journal, sowie auf eine Bemerkung in seinem „Traité des substitutions et des équations algébriques" pag. 56 verwiesen. Ferner habe ich noch eine im April dieses Jahres erschienene Abhandlung von W. Godt „Untersuchungen über Polyeder von mehrfachem Zusammenhange" (Programm des Katharineums zu Lübeck, 1881) zu erwähnen, welche unmittelbar an diese C. Jordan'schen Untersuchungen anknüpft und in welcher geradezu eine gegebene Gruppe zur Bildung einer zugehörigen regulären Gebietseintheilung auf einer Fläche von gewissem Geschlechte verwandt wird.

Die vorliegenden Untersuchungen betrachten dagegen die geometrische Darstellung nur als ein Durchgangsstadium zur Entwickelung der abstracten gruppentheoretischen Anschauungen. So kam es mir bei der hier zu Grunde gelegten geometrischen Deutung**) wesentlich darauf an, die zur Erzeugung einer Gruppe zum Ausgangspunkt gewählten Substitutionen als gleichberechtigte geometrische Operationen unmittelbar hervortreten zu lassen und dabei eine für die gruppentheoretischen Operationen möglichst übersichtliche Darstellung zu erhalten. Man vergl. hierzu die Schlussbemerkungen dieser Einleitung, sowie pag. 25.

---

*) Vergleiche hierzu § 14. der vorliegenden Arbeit, wo die Stellung des gruppentheoretischen Theiles dieser Untersuchungen zu den vorliegenden allgemeinen Ausführungen bezeichnet ist.

**) — und diese unterscheidet sich von der bei Godt angewandten, welche auf dem durch C. Jordan eingeführten „aspect d'un polyèdre" basirt ist.

Diese Beispiele, theils angedeutet, theils durchgeführt, bilden den Schluss der vorliegenden Arbeit. Unter ihnen gestalten sich diejenigen, für welche das Geschlecht der zugehörigen Riemann'schen Fläche gleich Null ist, besonders einfach.

Eine letzte Bemerkung bezieht sich auf gewisse gruppentheoretische Festsetzungen, welche man der Definition eines Systems von Einheiten für gewisse complexe Zahlsysteme zu Grunde legen kann, Festsetzungen, unter denen sich insbesondere die übliche Definition der *Quaternioneneinheiten* als ein besonderer Fall einbegreifen lässt.

Wenn somit in der Durchführung der Absicht, *die Definition einer Gruppe von der speciellen Gestalt ihrer Operationen loszulösen*, eben wieder eine specielle (geometrische) Darstellung dieser letzteren mit zur Verwendung kommt, so steht eine solche, theoretisch genommen, allerdings mit jeder anderen auf gleicher Stufe. Aber wie gerade *diese* Darstellung für mich die Veranlassung zu den abstracten Fragestellungen gewesen ist, so scheint sie auch (practisch) die erste Behandelung derselben zu erleichtern. Diese Versinnlichung gruppentheoretischer Operationen hat nämlich vor anderen den Vorzug, für einfache Fälle die Gesammtheit der Operationen einer Gruppe in ihrer gegenseitigen Stellung überblicken zu lassen*) und so gelingt es von ihr aus, das Wesentliche einer Gruppe von den durch ihre specielle Erscheinungsform zufällig hineingetragenen Eigenschaften zu sondern.

Was nun *ähnliche geometrische Operationen* anlangt, welche, an Stelle der von mir gewählten, zur Versinnlichung einer Gruppe eintreten können, so bezeichne ich in § 10., pag. 23 eine *allgemeinere Auffassung* meiner Figuren, welche das ganze Gebiet andeutet, dem diese geometrischen Repräsentationen angehören**). — Gleichwohl konnte und wollte ich den heuristischen Entwickelungsgang, der gerade in der *specielleren* von mir gewählten Darstellungsform liegt, nicht verwischen. Er findet in meinen früheren Studien über Riemann'sche Flächen seine Entstehung und hat vor der allgemeineren geometrischen Auffassung den Vorzug der grösseren Uebersichtlichkeit für die einzelnen Operationen der Gruppe, auf die es mir zur Entwickelung der abstracten gruppentheoretischen Formulirungen vor Allem ankam. Dagegen kenn-

*) Was beispielsweise bei einer Darstellung der Operationen als Buchstabenvertauschungen sicher nicht der Fall ist.

**) Ein Gebiet, welches *nach seiner functionentheoretischen Bedeutung* durch die (schon erwähnten) Arbeiten von Schwarz, Klein und von Fuchs (in einer Reihe von Abhandlungen in Crelle's Journal) eröffnet und durch die neuesten Untersuchungen von Poincaré (Comptes Rendus 1881) wesentlich gefördert worden ist. Weiter gehört hieher eine Arbeit von Schottky „Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen" im 83. Bande von Crelle's Journal. — Man vergl. noch pag. 24, Anm. der vorl. Abh.

zeichne ich auch (pag. 24) bestimmt eine gewisse hieraus erwachsene *Einseitigkeit* meiner *geometrischen* Behandlung, die mich in meinen früheren Arbeiten zu einem Fehler verleitet hat*). Die Beschränkung auf diese speciellere Darstellungsform ist indess für den hier festgehaltenen gruppentheoretischen Zielpunkt keine wesentliche. Für die *Weiterentwickelung* der vorliegenden *gruppentheoretischen* Probleme hat nämlich an Stelle jeder geometrischen Sprechweise die *analytische* (combinatorische) Formulirung einzutreten. Für sie aber hat diese erste geometrische Orientirung gewisse Gesichtspunkte ergeben, die in ihrer geometrischen Fassung, wie ihrem analytischen Inhalte nach, zu entwickeln, den Zweck der vorliegenden Arbeit bildet.

I. Abschnitt.

Allgemeine Entwickelungen.

§ 1.

Definition einer Gruppe G als Ausgangspunkt der Betrachtung.

Wir gehen, um auf die Darstellung einer Gruppe in dem von uns intendirten Sinne zu kommen, von der denkbar allgemeinsten Gruppe von Operationen aus und fragen uns dann nach der Stellung einer speciellen Gruppe zu dieser allgemeinsten.

Seien $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m$ irgendwelche m Operationen, welche auf ein Object J (Identität), das wir in der Folge stets als 1 bezeichnen, angewandt werden können, so lassen sich diese A_i stets als die „*erzeugenden*" Operationen einer Gruppe auffassen, die wir erhalten, wenn wir auf unser Object J alle Operationen in Iteration und Combination anwenden.

Die *allgemeinste* Gruppe aus m erzeugenden Operationen entsteht dann, wenn wir voraussetzen, dass unsere Operationen A_i *keine Perioden* besitzen und ausserdem gegenseitig durch *keine Relation* verbunden sind. Wir wollen dabei auch die den Operationen A_i *entgegengesetzten* Operationen in die Betrachtung ziehen, die wir in der üblichen Weise durch A_i^{-1} bezeichnen. Dann erhalten wir die unendlich vielen Substitutionen, welche unserer Gruppe G angehören, wenn wir auf die Identität zunächst die Operationen $A_1, A_1^{-1}, A_2, A_2^{-1}, \cdots, A_m, A_m^{-1}$ anwenden, je auf die so entstandenen Substitutionen die gleichen Operationen u. s. f. Da wir zwischen den erzeugenden Operationen

*) Man vergl. mein Referat über die Arbeit „Ueber reguläre Riemann'sche Flächen." (Math. Ann. Bd. XVII, p. 473 ff.) in Ohrtmann's Jahrbuch für 1880, ferner pag. 30 der vorliegenden Abhandlung.

keine Relation angenommen haben, so sind die so entstandenen Substitutionen sämmtlich von einander verschieden und *es kann jede nur auf einem ganz bestimmten Wege aus den erzeugenden Substitutionen erlangt werden*, den die Formel

$$A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} \cdots A_1^{\nu_1} A_2^{\nu_2} \cdots \cdots$$

(die wir stets von links nach rechts lesen wollen) angiebt.*)

In der That ist die Forderung, dass alle Substitutionen einer Gruppe nur auf *einem* Wege aus den erzeugenden Substitutionen erlangt werden, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen den letzteren *keine* Relationen bestehen und die folgenden Entwickelungen beschäftigen sich gerade mit der Frage, wie nun der Umstand, dass gewisse Substitutionen einer Gruppe auf *mehrfache* Weise aus den zu Grunde gelegten erzeugenden Substitutionen erhalten werden können, dass also gewisse Relationen zwischen den erzeugenden Substitutionen bestehen, zur Definition jeder speciellen Gruppe dient.

Es erweist sich im Folgenden, mit Rücksicht auf die von uns gewählte geometrische Interpretation unserer Gruppen, zweckmässig, den Gebrauch der negativen Potenzen unserer Operationen A_i zu vermeiden und wir führen zu dem Ende eine neue Operation A_n ein durch die Definition

$$A_1 A_2 A_3 \cdots A_m A_n = 1 \tag{1}$$

oder wie wir in der Folge kurz schreiben:

$$\Pi(A_i) = 1. \tag{1a}$$

Wir bemerken dabei, dass die Definition der Substitution A_n an eine *bestimmte* Reihenfolge der Operationen $A_1, A_2, \cdots A_m$ geknüpft ist, die noch auf die verschiedenste Weise gewählt werden kann. Wir wollen stets die in (1) gegebene Reihenfolge der Operationen A_i zu Grunde legen und in *dieser* auch das Symbol $\Pi(A_i)$ verstehen.

Dann ergiebt sich für die negativen Potenzen unserer Operationen sofort:

$$\begin{aligned} A_1^{-1} &= A_2 A_3 \cdots A_m A_n, \\ A_2^{-1} &= A_3 A_4 \cdots A_n A_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m^{-1} &= A_n A_1 \cdots \quad A_l, \\ \{A_n^{-1} &= A_1 A_2 \cdots \quad A_m\}. \end{aligned}$$

Wir können also unsere Gruppe G erzeugen, indem wir die

*) Wir wollen jede solche Substitution in der Folge durch

$$S(A_1, A_2, \cdots, A_m) = S(A_i)$$

oder kurz durch S bezeichnen.

Operationen $A_1, A_2 \cdots A_m, A_n$ nur in *positivem* Sinne anwenden*) und bemerken dabei, dass wir durch Anwendung bloss der positiven Operationen wieder *nur auf einem Wege* zu einer bestimmten Substitution gelangen können, von der Einschaltung von Operationen $A_1 A_2 A_3 \cdots A_n$, $A_2 A_3 \cdots A_n A_1$ u. s. w., die nach der obigen Relation gleich 1 sind, abgesehen. Fassen wir aber gleichzeitig auch negative Potenzen der A_i hinzu, so giebt es zu jedem Ausdrucke $S(A_1, A_2 \cdots A_m, A_n)$ unendlich viele äquivalente.

§ 2.

Eine geometrische Versinnlichung der Gruppe G.

Das geometrische Bild, durch das wir jetzt die ganze Gruppe ersetzen wollen, zeigt, so zu sagen, nur eine schematische Raumeintheilung, deren wir bedürfen, um die Substitutionen unserer soeben definirten Gruppe G übersichtlich aufzuschreiben.

Der präciseren Ausdrucksweise wegen wollen wir zunächst eine ganz bestimmte geometrische Anordnung bezeichnen, deren Verallgemeinerung im Sinne der analysis situs sich daraus aber sofort ergiebt.

Wir zeichnen ein, etwa reguläres, Kreisbogenpolygon, dessen Ecken $a_1, a_2 \cdots a_m, a_n$, sämmtlich auf einem Kreise K gelegen sind, während die Seiten auf ebendiesem Kreise K senkrecht stehen, und vervielfältigen dasselbe, indem wir es nach dem Principe der reciproken Radien zu den Seiten spiegeln. Indem wir die Ecken dieser Spiegelbilder in symmetrischer Weise durch $a_1, a_2 \cdots a_m, a_n$ bezeichnen und diesen Process in's Unendliche fortsetzen, erhalten wir eine unendliche Reihe von (in Rücksicht auf die Bezeichnung der Ecken) congruenten und symmetrischen Polygonen — die wir auch als schraffirte und nichtschraffirte bezeichnen mögen — welche sich dem Begrenzungskreise K näher und näher anschliessen. Dabei stossen, weil alle Polygonseiten auf dem Kreise K senkrecht stehen, in jeder Ecke unendlich viele Polygone zusammen [man vergleiche Fig. 1., Tafel I, welche für $n = 4$ entworfen ist.].

Denkt man sich nun durch einen, im Sinne der analysis situs aufzufassenden Process ein bestimmtes, etwa schraffirtes Polygon P_1 in ein anderes schraffirtes Polygon P_2 übergeführt, so, dass die homologen Eckpunkte der beiden Polygone sich decken und setzt dabei fest, dass benachbarte Polygone wieder in benachbarte übergehen**), so wird dabei, weil die Anordnung unserer unendlichen Polygonreihe

*) Des kurzen Ausdruckes halber sprechen wir in der Folge auch von diesen n Operationen $A_1, \cdots A_m, A_n$ als den *erzeugenden* Operationen der Gruppe.

**) Eine Operation, die bei unseren *speciellen* Annahmen mit einer linearen Substitution einer complexen Veränderlichen (die wir in der Zeichnungsebene deuten) äquivalent ist.

mit Bezug auf alle congruenten Polygone eine identische ist, das ganze Polygonnetz in sich übergehen. Die unendlich vielen Operationen also, die ein bestimmtes Ausgangspolygon 1 in *sämmtliche* andere schraffirten Polygone überführen, bilden *eine Gruppe von unendlich hoher Ordnung.*

Von dieser Gruppe beweisen wir, dass sie *holoedrisch isomorph* auf die im vorigen Paragraphen definirte Gruppe bezogen werden kann, oder, sofern wir überhaupt holoedrisch isomorphe Gruppen als identisch betrachten*), dass sie mit ihr zusammenfällt.

Wir definiren zu dem Zwecke eine Reihe von Elementaroperationen

$$A_1,\ A_1^{-1},\ A_2,\ A_2^{-1},\ \cdots A_m,\ A_m^{-1},\ A_n,\ A_n^{-1}$$

dadurch, dass jede derselben ein bestimmtes (etwa schraffirtes) Ausgangspolygon 1 in das bezüglich an der Ecke a_1, $a_2 \cdots a_m$, a desselben nach der einen oder anderen Richtung anstossende schraffirte Nachbarpolygon überführt, Operationen, die wir als „Drehungen" des Polygons 1 um seine Eckpunkte a_1, a_2, $\cdots a_m$, a_n figürlich bezeichnen wollen**). Dabei setzen wir fest, dass die Drehung A_i immer in einem dem Uhrzeiger entgegengesetzten Sinne verstanden sein soll, die Drehung A_i^{-1} also im Sinne des Uhrzeigers.

Wenden wir die Operationen A_1, $A_2 \cdots A_m$, A_n hintereinander an, eine Operation die wir durch $A_1 A_2 A_3 \cdots A_m A_n$ bezeichnen, so kommen wir zum Ausgangspolygone 1 zurück und somit besteht zwischen unseren Operationen die Beziehung:

$$A_1 A_2 A_3 \cdots A_m A_n = 1.$$

Die Anordnung der einzelnen Polygone in unserem Netze lässt nun ersehen, dass, wenn wir die Operationen A_1, $A_2 \cdots A_m$, A_n von einem Polygone 1 ausgehend nur im *positiven* Sinne anwenden, wir in *jedes* andere schraffirte Polygon gelangen können *und zwar nur auf einem Wege* —, dabei abgesehen von der Einschaltung von Wegen $A_1 A_2 \cdots A_m A_n$, $A_2 A_3 \cdots A_n A_1$ u. s. w., welche sich auf die Identität reduciren. Das sagt aber, dass zwischen den Operationen $A_1, A_2, \cdots A_m, A_n$, ausser der obigen Relation, *keine weiteren* mehr bestehen und *dass somit die Substitutionen dieser Gruppe den Substitutionen der in* § 1. *definirten Gruppe holoedrisch isomorph zugeordnet werden, wenn wir die beiderseits gleichbezeichneten erzeugenden Operationen einander zuordnen.*

Wir können etwa auch nur von den Operationen A_1, $A_2 \cdots A_m$

*) Und das liegt, wie schon Eingangs erwähnt, im Sinne unserer ganzen Betrachtungen.

**) Ueber die Stellung dieser speciellen geometrischen Reprüsentation zu allgemeineren Auffassungen vergl. pag. 23.

zur Erzeugung unserer Gruppe ausgehen, wo wir dann auch die Operationen A_1^{-1}, $A_2^{-1} \cdots A_m^{-1}$, die Drehungen im entgegengesetzten Sinne, zur Darstellung der gewollten Gruppe heranziehen müssen, analog wie eben in § 1.

Um den Isomorphismus der beiden Gruppen noch deutlicher hervortreten zu lassen, können wir jetzt die einzelnen schraffirten Polygone mit Namen belegen, indem wir, von irgend einem Polygone als erstem, 1, beginnend, jedes Polygon durch die Substitution S bezeichnen, welche, von jenem ersten ausgehend, zu ihm hinführt. Dann erhält nach dem Obigen jedes Polygon, wenn wir nur positive Operationen anwenden, eine *bestimmte* Bezeichnung $S(A_1, A_2, \cdots A_n)$ und so ist *jede Substitution* unserer Gruppe durch ein bestimmtes Polygon unseres Netzes vertreten.

Was wir bisher nur für die eine Reihe der (schraffirten) Polygone ausgeführt, gilt selbstverständlich auch für die andere Polygonreihe. Dabei wollen wir für diese letzteren (nichtschraffirten) Polygone eine mit der obigen *gleichlaufende* Bezeichnung einführen, in der Weise, dass wir gleichfalls irgend eines dieser Polygone mit 1 bezeichnen und nun dasjenige weisse Polygon mit S, in welches das weisse Polygon 1 übergeführt wird, wenn wir auf das schraffirte Polygon 1 die Substitution S ausüben. Es ist dann in der Folge zweckmässig, eines der an das schraffirte Polygon 1 *anstossenden* weissen Polygone mit 1 zu bezeichnen, etwa das an der Kante $a_1 a_n$ benachbarte, wo dann jedesmal die zwei in den analogen Kanten (also hier in Kanten $a_1 a_n$) zusammenstossenden Polygone die gleiche Bezeichnung tragen.

Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung der in § 1. gegebenen allgemeinen Gruppe G zu der durch unser eben geschildertes Polygonnetz definirten liegt in der vollen Allgemeinheit und Unabhängigkeit der beiderseits zu Grunde gelegten erzeugenden Operationen $A_1, A_2, \cdots A_m$, nicht aber in der speciellen Gesetzmässigkeit, mit der wir, zur besseren Uebersicht, unser Polygonnetz entworfen haben. Wir fassen dasselbe, insoferne für uns nur die gegenseitige Anordnung der einzelnen Gebiete von Wichtigkeit ist, lediglich im Sinne der analysis situs auf und können es also beliebigen Dehnungen unterwerfen.

Wir können, sofern sich die Polygone unseres eben betrachteten Netzes näher und näher *einer* bestimmten Randcurve anschmiegen, das System in einem gewissen Sinne als *einfach zusammenhängend* bezeichnen. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für die Anordnung unserer Polygone und bleibt bei beliebigen Dehnungen erhalten. Im Sinne der analysis situs ausgesprochen lautet dieselbe: Es ist nicht möglich, eine unendliche Reihe von lauter *einfach zusammenhängenden n-Ecken*, deren an jedem Ecke unendlich viele zusammenstossen, so aneinander zu schliessen, dass das Netz sich *mehreren* getrennten Randcurven anschmiegt. Der Beweis dafür liegt eben darin, dass die

Gruppen aller solcher Netze holoedrisch isomorph aufeinander bezogen werden können, und dadurch in den zugehörigen Netzen successive je *einfach zusammenhängende* Gebiete einander entsprechen.

§ 3.

Isomorphismus der Gruppe G in sich.

Mit Bezug auf die im vorigen Paragraphen festgesetzte Bezeichnungsweise der einzelnen Polygone erwähnen wir für unsere allgemeine Gruppe G einer bestimmten Art der isomorphen Beziehung dieser Gruppe in sich, mit der wir uns weiterhin, im Anschluss an die geometrische Formulirung, für gewisse specielle Gruppen noch zu beschäftigen haben.

Unser unendlich ausgedehntes Polygonnetz ist in Bezug auf *die Anordnung* der schraffirten und der nichtschraffirten Polygone *symmetrisch*.

Wir greifen speciell die Anordnung des Netzes um das schraffirte und weisse Polygon 1 heraus, die etwa mit der Kante $a_1 a_n$ zusammenstossen mögen. [In der zugehörigen Fig. 2., Taf. I. tritt, der Uebersicht halber, diese Symmetrie der Anordnung noch in einer gestaltlichen Symmetrie der Polygone hervor]. Dann lassen sich zu den Operationen A_1, A_2, $A_3 \cdots A_l$, A_m, A_n, die als erzeugende Substitutionen der Gruppe für die schraffirten Polygone definirt sind, sofort die *symmetrischen* Operationen — mit Bezug auf diese beiden in einer Kante $a_1 a_n$ zusammenstossenden Polygone 1 — für die nichtschraffirten Polygone angeben. Es sind die Operationen:

$$
\begin{aligned}
A_1' &= A_1^{-1} &&= A_2 A_3 A_4 \cdots A_l A_m A_n,\\
A_2' &= A_1 A_2^{-1} A_1^{-1} &&= A_1 A_3 A_4 \cdots A_l A_m A_n,\\
A_3' &= A_1 A_2 A_3^{-1} A_2^{-1} A_1^{-1} &&= A_1 A_2 A_4 \cdots A_l A_m A_n,\\
&\cdots\cdots\cdots

Der Relation:

$$A_1 A_2 A_3 \cdots A_m A_n = 1$$

entspricht weiter die zu ihr „symmetrische" Relation:

$$A_1' A_2' A_3' \cdots A_m' A_n' = 1,$$

während die A_i sowohl, wie die A_i' *keiner* weiteren Bedingung unterworfen sind.

Damit schliessen wir aber unmittelbar, dass durch die Zuordnung der Substitutionen A_i zu den A_i' *sämmtliche Substitutionen* der Gruppe einander *wechselseitig eindeutig* zugeordnet werden.

Geometrisch lässt sich diese holoedrisch isomorphe Beziehung der Gruppe G in sich folgendermassen darthuen: Die symmetrische Anordnung des Netzes in Bezug auf die Kante $a_1 a_n$ unserer beiden Ausgangspolygone 1 ergiebt das Vorhandensein einer (nicht mit zu unserer Gruppe gehörigen) Operation Θ, der „Spiegelung" längs der Kante $a_1 a_n$, durch welche die Gruppe in sich transformirt wird und vermöge deren wir die erzeugenden Substitutionen A_i sofort in die A_i' überführen können durch die Beziehung:

$$\Theta A_i \Theta^{-1} = A_i'.$$

Allgemein können wir die symmetrische Anordnung unseres Netzes auffassen mit Bezug auf irgend ein schraffirtes und irgend ein weisses Polygon. Dies besagt aber gegen vorhin nur eine Aenderung in der Bezeichnung etwa der Reihe der weissen Polygone. Wir gehen dann zur Definition der zu den A_i symmetrischen Operationen A_i', statt von jenem in Kante $a_1 a_n$ an das schraffirte Polygon 1 anstossenden weissen Polygone, von irgend einem anderen mit 1 zu bezeichnenden weissen Polygone aus.

§ 4.

Stellung einer speciellen Gruppe $\overline{G}$ zu der allgemeinen Gruppe G.

In §§ 1. und 2. haben wir die allgemeinste Gruppe G, die aus irgend welchen m Operationen $A_1, A_2, \cdots A_m$ erzeugt wird, in ihrer abstracten Formulirung und in einem geometrischen Bilde gekennzeichnet.

Es handelt sich jetzt um die Frage nach der Stellung jeder beliebigen speciellen Gruppe $\overline{G}$, — von der also angenommen wird, dass sie aus m, durch vorgegebene Processe definirten Operationen $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \cdots \overline{A_m}$ (die wir uns, wenn $\overline{G}$ z. B. eine endliche Gruppe ist, etwa als Permutationen gewisser Buchstaben gegeben denken mögen) erzeugt wird, — *zu der in allgemeinster Weise definirten Gruppe* G.

Wir behandeln diese Frage zuvörderst im analytischen Sinne, um sie weiterhin auch in unserer geometrischen Darstellung zu verfolgen. Zunächst haben wir den Satz:

Unsere Gruppen G und $\overline{G}$ lassen sich isomorph auf einander beziehen.

Wegen der Allgemeinheit der Operationen A_i ist es nämlich gestattet, den m erzeugenden Operationen $A_1, A_2 \cdots A_m$ der Gruppe G die Operationen $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots \overline{A}_m$, durch welche die Gruppe $\overline{G}$ entsteht, zuzuordnen: Indem wir dann die jedesmal gleichen Substitutionen der einen und anderen Gruppe entsprechend setzen, folgt:

Jeder Operation $S(A_1, A_2, \cdots A_m)$ in den A_i entspricht eine und nur eine Operation $S(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots \overline{A}_m)$ in den $\overline{A}_i$.

Die Annahme, dass mehrere Substitutionen $S(\overline{A}_i), S'(\overline{A}_i) \cdots$ der einen Substitution $S(A_i)$ entsprechen, führt nämlich zu dem Widerspruche, dass mehrere Substitutionen $S(A_i), S'(A_i) \cdots$ der Gruppe G einander gleich sein müssten, was nach unseren allgemeinen Annahmen für die Substitutionen A_i unzulässig ist.

Umgekehrt aber entspricht einer Operation in den $\overline{A}_i$ entweder gleichfalls nur eine Operation in den A_i, oder aber unendlich viele.

Im ersten Falle sind die Gruppen G und $\overline{G}$ holoedrisch isomorph auf einander bezogen und die Operationen $\overline{A}_i$ von derselben Allgemeinheit, wie die Operationen A_i. *Die Gruppen erscheinen also für unsere Auffassung als identisch.*

Wir nehmen zweitens an, die Gruppe aus den Operationen $\overline{A}_1, \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m$ sei so beschaffen, dass neben der identischen Operation 1 auch noch die Operation

$$F(A_1, A_2, \cdots A_m) = F$$

gebildet in den $\overline{A}_i$ zur Identität führt, haben also für unsere Operationen $\overline{A}_i$ die Beziehung:

$$F(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots \overline{A}_m) = \overline{F} = 1.$$

Dann folgt aber sofort, dass alle aus F mit Hülfe der Substitutionen $1, S, S' \cdots$ der Gruppe G „transformirten" Substitutionen:

$$F, \; SFS^{-1}, \; S'FS'^{-1} \cdots$$

in den $\overline{A}_i$ gebildet, gleichfalls zur Identität führen und ebenso alle aus diesen Substitutionen wieder durch Iteration und Combination abgeleiteten. Es sind dies *unendlich viele* Operationen für die Gruppe G, weil sie als solche sämmtlich von einander verschieden sind.

Alle diese unendlich vielen Operationen der Gruppe G, welche sonach der Identität in $\overline{G}$ entsprechen, bilden eine Gruppe H und diese ist, wie aus der Entstehungsweise ihrer Operationen unmittelbar hervorgeht, mit allen Substitutionen $S, S' \cdots$ der Gruppe G vertauschbar, oder um die von Herrn Lie eingeführte Bezeichnungsweise zu gebrauchen, diese Gruppe H ist in G ausgezeichnet enthalten.

Bezeichnen wir die Operationen der Gruppe H, also die Operationen in G, welche der Identität in $\overline{G}$ zugeordnet sind, durch $1, T, T' \cdots$, so sind die irgend einer Substitution $\overline{S}$ der Gruppe $\overline{G}$ zugeordneten Substitutionen gegeben durch $S, ST, ST' \cdots$.

Jetzt setzen wir ganz allgemein fest, dass die Operationen

$$F_1(A_1, \cdots A_m),\ F_2(A_1, \cdots A_m), \cdots F_h(A_1, \cdots A_m), \cdots$$
$$\cdots F_r(A_1, \cdots A_m),$$

in den $\overline{A}_i$ ausgeführt, die Identität ergeben, dass also:

$$\overline{F}_1 = 1,\ \overline{F}_2 = 1, \cdots \overline{F}_h = 1, \cdots \overline{F}_r = 1$$

statthat.

Dann ist die Beziehung der Gruppen G und $\overline{G}$ eine solche, dass jeder Substitution S der Gruppe G die eine Substitution $\overline{S}$ in $\overline{G}$ entspricht. Umgekehrt aber entsprechen der Identität in $\overline{G}$, neben der identischen Substitution, zunächst die Substitutionen $F_1, F_2, \cdots F_h, \cdots F_r$ der Gruppe G. Dann aber alle aus diesen durch Iteration, Combination und Transformation (durch die Substitutionen $S, S' \cdots$) abgeleiteten Substitutionen.

Dabei bilden diese Operationen $1, T, T' \cdots$, wie dies wieder aus ihrer Entstehungsweise sich ergiebt, eine Gruppe H, die in der Gruppe G ausgezeichnet enthalten ist*).

Einer beliebigen Substitution $\overline{S}$ der Gruppe $\overline{G}$ entsprechen dann wieder die Substitutionen $\overline{S}, \overline{S}\overline{T}, \overline{S}\overline{T}' \cdots$ in der Gruppe G.

Die soeben definirte Gruppe H bildet sich durch die Combination einer Reihe von Untergruppen $H_1, H_2, \cdots H_h, \cdots H_r$**). Jeder einzelne Ausdruck F_h giebt nämlich Anlass zu einer speciellen Gruppe H_h, die aus allen Substitutionen SF_hS^{-1} und den hieraus durch Iteration, und Combination abgeleiteten Substitutionen besteht. Dabei ist nach dem früher Gesagten auch jede dieser speciellen Gruppen H_h in der ganzen Gruppe G ausgezeichnet enthalten.

Weiter aber folgt unmittelbar aus der Entstehungsweise jeder einzelnen dieser Gruppen:

---

*) Der Satz, dass meriedrischer Isomorphismus — und ein solcher liegt hier in der $1, \infty$-deutigen Beziehung der Gruppen G und $\overline{G}$ vor — nur bei zusammengesetzter Gruppe G statthaben kann, findet sich bei C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, pag. 56.

**) Die indess im Allgemeinen nicht völlig von einander getrennt zu sein brauchen, sondern sehr wohl gewisse Theile (Untergruppen) gemeinsam haben können.

1. Die Gruppen H_h sind auch in der Gruppe H ausgezeichnet enthalten.

2. Jede Gruppe H_h ist mit jeder anderen H_i vertauschbar.

3. Jede Combination zweier oder mehrerer Gruppen $H_h, H_i, \cdots$, die also in der zu Grundelegung zweier, oder mehrerer Relationen $\overline{F_h} = 1, \overline{F_i} = 1, \cdots$ ihre Entstehung findet, ist in der Gruppe H als ausgezeichnete Untergruppe enthalten.

4. Auch alle solche Combinationen sind gegeneinander vertauschbar.

Wir gehen auf die Folgerungen, welche sich an diese Sätze knüpfen, im nächsten Paragraphen ein. Doch wollen wir schon hier die Beziehung unserer Gruppe $\overline{G}$ zu der allgemeinen Gruppe G, wie sie aus der Zuordnung der erzeugenden Substitutionen $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \cdots, \overline{A_m}$ einerseits, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ andererseits entstanden ist, formuliren:

Die isomorphe Zuordnung der Gruppen G und $\overline{G}$ spaltet die Gruppe G in zwei Factoren: In die Gruppe der Substitutionen, welche in den Substitutionen $\overline{A_i}$ geschrieben verschieden sind, d. h. die Gruppe $\overline{G}$ selbst — und in die Gruppe H derjenigen Substitutionen, welche in den Substitutionen von $\overline{G}$ geschrieben der Identität äquivalent sind. Die letztere Gruppe H ist dabei in G ausgezeichnet enthalten und folgt aus ihr „durch Adjunction von $\overline{G}$“.

§ 5.

Fortsetzung. Verallgemeinerungen.

Der Zusammenhalt der im vorigen Paragraphen besprochenen Beziehungen der Gruppen G und $\overline{G}$ ergiebt jetzt *die Definition einer Gruppe $\overline{G}$ in dem von uns beabsichtigten Sinne durch die blosse Kenntniss einer Anzahl von Beziehungen zwischen erzeugenden Substitutionen unmittelbar.*

Wir können nämlich diese Sätze auch folgendermassen formuliren:

Legen wir den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_m$ unserer allgemeinsten Gruppe G die Bedingung auf, dass:

$$F_1(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1 \tag{1}$$

sei, so wird die Gruppe dadurch eingeschränkt auf die Gruppe $\overline{G_1}$ der Substitutionen, welche mit Berücksichtigung der Bedingung (1) noch verschieden ausfallen.

Fügen wir die weitere Bedingung

$$F_2(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1 \tag{2}$$

zur ersten hinzu, so wird dadurch die engere Gruppe $\overline{G_{1,2}}$ der Sub-

stitutionen definirt, welche nach Zuziehung der beiden Relationen noch von einander verschieden sind u. s. f.

Dabei ist es *gleichgültig*, in welcher Reihenfolge wir die Substitutionen $F_1, \cdots, F_r$ zur successiven Abgrenzung unserer Gruppe $\overline{G}$ benutzen *und somit bilden, unabhängig von ihrer Reihenfolge, die Relationen*

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1, \cdots, F_r = 1$$

zwischen den erzeugenden Substitutionen A_i, die Definition einer bestimmten Gruppe $\overline{G}$ von Substitutionen.

Es ist zweckmässig, gleich hier noch eine etwas allgemeinere Auffassung dieser Definition einzufügen, die wohl implicite im Vorstehenden enthalten ist, die aber der folgenden Darstellung wegen besonders formulirt sein mag:

Wir haben die Gruppe $\overline{G}$ aus der denkbar allgemeinsten Gruppe G, die aus m erzeugenden Substitutionen sich bildet, ausgeschieden. Unser Process lässt sich analog definiren, wenn wir von einer weniger allgemeinen Gruppe dabei ausgehen.

Bezeichnen zu dem Ende

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots, \mathsf{A}_m$$

wieder die erzeugenden Operationen einer Gruppe Γ, für welche wir aber jetzt gewisse *specielle Voraussetzungen*

$$\text{(I)} \qquad F_1(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots, \mathsf{A}_m) = 1, \cdots, F_k(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \cdots, \mathsf{A}_m) = 1$$

vorab machen wollen.

Seien dann

$$\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots, \overline{\mathsf{A}_m}$$

die erzeugenden Substitutionen einer speciellen Gruppe $\overline{\Gamma}$, für welche zunächst gleichfalls die Voraussetzungen:

$$\text{(I)} \qquad F_1(\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots, \overline{\mathsf{A}_m}) = 1, \cdots, F_k(\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots, \overline{\mathsf{A}_m}) = 1$$

erfüllt sind, welche aber *ausserdem* noch gewisse weitere Bedingungen:

$$\text{(II)} \qquad F_{k+1}(\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots \overline{\mathsf{A}_m}) = 1, \cdots, F_r(\overline{\mathsf{A}_1}, \overline{\mathsf{A}_2}, \cdots, \overline{\mathsf{A}_m}) = 1$$

befolgen.

Dann ist das Verhältniss dieser Gruppen Γ und $\overline{\Gamma}$ genau das gleiche wie in unserem allgemeinsten Falle: *Wir haben zwei Gruppen, welche zunächst eine Reihe gemeinsamer Bedingungen* (I) *erfüllen. Diese kommen also bei der Frage nach dem gegenseitigen Verhältniss beider Gruppen nicht in Betracht. Vielmehr wird die Stellung der Gruppe $\overline{\Gamma}$ zu Γ eben durch die zweite Reihe von Relationen bezeichnet, welche der Gruppe*

$\overline{\Gamma}$ gegenüber von Γ ihren speciellen Charakter ertheilt. Dabei gelten für diese Relationen wieder analoge Sätze, wie die auf pag. 14 oben allgemein formulirten.

§ 6.

Geometrische Interpretation.

Ehe wir in unseren abstracten Betrachtungen weitergehen, und nun gewisse Gesichtspunkte für die wirkliche Aufstellung der Relationen F_k entwickeln, welche zur Definition einer Gruppe dienen, wollen wir das bisherige in unserer anschauungsmässigen Darstellung verfolgen, weil gerade auch diese für unsere weiteren Ausführungen von Bedeutung wird.

Wie schon früher erwähnt, haben wir jedem der schraffirten und weissen Polygone unseres für die Gruppe G entworfenen Netzes eine bestimmte Bezeichung $S(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ beigelegt, indem wir dabei von einem bestimmten als (1) bezeichneten Polygone ausgingen. Wir haben, zu einer präcisen Festsetzung, dabei jedesmal den beiden an einer Kante $a_1\, a_n$ zusammenstossenden Polygonen die gleiche Bezeichnung beigelegt und halten auch hier daran fest. Die isomorphe Zuordnung der Gruppen G und $\overline{G}$ bedeutet nun, dass wir diese Bezeichnungen durch die in den speciellen Operationen $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_m$ der Gruppe $\overline{G}$ geschriebenen Bezeichnungen $S(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_m)$ ersetzen.*) Dadurch erhält jedesmal eine unendliche Zahl von Polygonen die *gleiche* Bezeichnung; alle Polygone, die durch eine Substitution der Gruppe H bezeichnet sind, werden als (1) benannt werden u. s. f.

Wir greifen unter allen solchen zu *einer* Substitution gehörigen Polygonen, die wir wohl auch als *äquivalente* Polygone bezeichnen, jedesmal einen „Repräsentanten" unter den schraffirten und den nichtschraffirten Polygonen heraus; dann entspricht ein solches System von lauter verschieden bezeichneten Polygonen der Gruppe $\overline{G}$.

Alle Ränder der Polygone, die wir so als Repräsentanten der verschiedenen Substitutionen abgeschieden haben, sind einander paarweise zugeordnet, derart, dass immer ein Rand $a_i a_{i+1}$ eines schraffirten Gebietes einem bestimmten Rande $a_i a_{i+1}$ eines nichtschraffirten Gebietes entspricht. Dabei ist diese Zuordnung eine völlig bestimmte und eindeutige, weil jedes schraffirte (nichtschraffirte) Polygon von ganz bestimmten nichtschraffirten (schraffirten) Polygonen umgeben ist. (Vgl. Fig. 1 der I. Tafel.) Da nun die Substitutionen, durch welche unsere

*) Wir mögen dabei auch die der Operation A_n, für welche $A_1 A_2 \cdots A_m A_n = 1$ ist, entsprechende Operation $\overline{A}_n$ definiren durch die Relation $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_m \overline{A}_n = 1$.

Polygone bezeichnet sind *eine Gruppe* bilden, *lässt sich dieses System von Polygonen als ein zusammenhängendes Ganze in unserem Netze ausbreiten.*

Der Rand dieses Bereichs besteht dann noch aus einer Reihe von Kanten $a_i a_{i+1}$, die wieder paarweise einander zugeordnet sind. Jede solche Zuordnung zweier Randkanten K_1 und K_2 bedeutet dabei im gruppentheoretischen Sinne, dass ein (etwa schraffirtes) Polygon S, welches an der einen Randkante K_1 *in* unserem Bereiche *liegt,* äquivalent ist mit jenem (schraffirten) Polygone S', welches an der Randkante K_2 *an* unseren Bereich *angrenzt.* Mit anderen Worten: Jeder solchen Zuordnung entspricht eine Substitution T unserer Gruppe H, welche die zu einem gegebenen Polygone S äquivalenten Polygone definirt.

Das so umgrenzte zusammenhängende System von Polygonen breitet sich überdies noch als *einfach zusammenhängendes* Ganze in unserem Netze aus, weil jedes einzelne Polygon mit seinen Spitzen bis zur „Randcurve" desselben (vergl. pag. 9) sich erstreckt. Wir wollen dieses System, das indess noch der mannigfachsten „äquivalenten" Modificationen fähig ist, als das *Fundamentalpolygon* der Gruppe $\overline{G}$ bezeichnen*).

Indem wir über das Fundamentalpolygon unserer Gruppe hinaus die Substitutionen entsprechend fortsetzen, lassen sich an dieses unendlich viele äquivalente Fundamentalpolygone anreihen, deren jedes in gleicher Weise die Gruppe $\overline{G}$ repräsentirt.

Wir beweisen, dass dieselben *lückenlos* und *einfach* unser ganzes unendliches Gebiet von Polygonen überdecken.

Zunächst nämlich lässt sich an jede freie Kante des ursprünglichen Fundamentalpolygons ein neues Fundamentalpolygon anlegen und ebenso an jedes folgende. Wir haben also nur zu zeigen, dass zwei solche Fundamentalpolygone coincidiren, sobald sie nur *ein* Polygon miteinander gemein haben. Bezeichnen aber in einer bestimmten Reihenfolge

$$1, \quad S, \quad S', \cdots, \quad S^{(i)}, \cdots$$

die Polygone des ursprünglichen Fundamentalpolygons, so sind

$$T_1, \; T_1 S, \; T_1 S', \cdots, \; T_1 S^{(i)}, \cdots$$
$$T_2, \; T_2 S, \; T_2 S', \cdots, \; T_2 S^{(i)}, \cdots$$

die diesen entsprechenden Polygone zweier neuen Fundamentalpolygone, für welche beziehungsweise T_1 und T_2 dem Polygone 1 entspricht. Ist nun irgend ein

*) Nach Klein, der diese Bezeichnung speciell bei der Gruppe der linearen ganzzahligen Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ von der Determinante 1 einführt.

$$T_1 S^{(0)} = T_2 S^{(0)}$$

so folgt $T_1 = T_2$ und damit die Coincidenz der beiden Fundamentalpolygone*).

Durch unsere Entwickelungen ist jetzt das Verhältniss der Gruppen $\overline{G}$ und G in der geometrischen Auffassung völlig deutlich und wir können dem Schlusssatze des § 4. (pag. 14) die folgende geometrische Beziehung zur Seite setzen:

Die isomorphe Zuordnung der Gruppen G und $\overline{G}$ spaltet unser unendliches Netz in eine unendliche Reihe von „äquivalenten Gebieten", deren jedes der Gruppe $\overline{G}$ entspricht. Die Gruppe H kennzeichnet sich dabei als die Gruppe der Operationen, welche alle unsere Fundamentalpolygone ineinander überführt, dergestalt, dass dabei das Polygon 1 *in alle äquivalenten Polygone übergeführt wird.*

§ 7.

Geometrische Interpretation. Fortsetzung.

Den Entwickelungen des § 5. gehen nach unserer geometrischen Auffassung die folgenden Sätze parallel:

Legen wir den Substitutionen $A_1, A_2, \cdots, A_m$ unserer allgemeinsten Gruppe G die Bedingung auf:

$$F_1(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1 \tag{1}$$

so wird aus dem unendlichen Netze der Gruppe G ein Stück herausgeschnitten, welches die mit Berücksichtigung der Bedingung (1) noch „verschiedenen" Polygone umfasst. Die Ränder dieses Gebietes sind einander paarweise zugeordnet, so dass dasselbe geeignet ist, die Gruppe G_1 zu repräsentiren.

Die weitere Bedingung:

$$F_2(A_1, A_2, \cdots, A_m) = 1 \tag{2}$$

spaltet auch hier wieder ein Gebiet ab, das sich durch die paarweise Zuordnung seiner Randkanten als geschlossenes Ganze und geeignet erweist, die Gruppe G_{12} zu versinnlichen u. s. f.

Dabei ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge wir die Relationen $F_1, F_2, \cdots, F_r$ zur successiven Einschränkung unseres Fundamentalpolygons benutzen, so dass dieses letztere, bis auf äquivalente Modificationen in *eindeutiger* Weise erhalten, in geometrischer Form die Definition einer bestimmten Gruppe $\overline{G}$ bildet.

*) Diese Entwickelung für die Gruppe der linearen ganzzahligen Substitutionen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ von der Determinante 1 hat Herr Klein in einer Vorlesung über elliptische Modulfunctionen, Sommersemester 1879, gegeben. Vergl. auch die Ausführung von Hurwitz, Math. Annalen, Bd. XVIII, pag. 537 ff.

Was die verallgemeinerte Auffassung unserer Definition anlangt, deren wir in § 5. erwähnt haben, indem wir zur Specialisirung einer Gruppe $\bar{\Gamma}$ nicht von der allgemeinsten Gruppe G ausgingen, sondern bereits von einer speciellen Γ, so ist ihre geometrische Bedeutung jetzt gleichfalls unmittelbar ersichtlich:

Wir gehen dann zur Abscheidung eines Fundamentalpolygons für die Gruppe $\bar{\Gamma}$ nicht von dem allgemeinsten Polygonnetze G aus, sondern bereits von einem Fundamentalpolygone Γ desselben.

Dabei erscheint es aber zweckmässig, dieses Fundamentalpolygon Γ so umzugestalten, dass es seine speciellen Eigenschaften

$$(I) \qquad F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ \cdots,\ F_k = 1$$

bereits implicite enthält. Dies geschieht, indem wir die durch die obigen Relationen gegebenen Zuordnungen der *Ränder* dieses Fundamentalpolygons uns durch die Vereinigung der Randkanten wirklich ausgeführt denken. Es erscheint dann das Fundamentalpolygon nicht mehr über dem allgemeinen Polygonnetze G ausgebreitet, sondern als Individuum für sich, implicite behaftet mit den Eigenschaften (I).

Wir wollen ein solches Netz, auch wenn es eine unendlich grosse Gruppe definirt, und dann eine niemals abschliessende Reihe von Polygonen umfasst, als ein *geschlossenes Netz* bezeichnen, mit Rücksicht darauf, dass es keine freien Randkanten mehr besitzt.

In diesem Sinne bildet also auch der ganze Bereich der Gruppe G ein geschlossenes Netz. Dabei beachten wir noch folgendes: Während das geschlossene Netz G in gewissem Sinne als *einfach zusammenhängend* zu bezeichnen war (vergl. pag. 9), wird dies für das geschlossene Netz einer Gruppe Γ *im Allgemeinen nicht mehr der Fall sein.* Vielmehr kann der Zusammenhang eines solchen Netzes ein gewisser endlicher sowohl, wie auch ein unendlich grosser sein.

Aus einem geschlossenen Netze Γ schneiden wir nun wieder das Fundamentalpolygon $\bar{\Gamma}$ aus, vermöge der Relationen

$$(II) \qquad F_{k+1} = 1,\ \cdots,\ F_r = 1.$$

Dann spricht sich in diesem letzteren Fundamentalpolygone explicite nur mehr das Verhältniss von $\bar{\Gamma}$ zu Γ aus, nicht mehr das allgemeinere von $\bar{\Gamma}$ zu G.

Dabei wird sich ein solches Fundamentalpolygon $\bar{\Gamma}$ im Allgemeinen jetzt nicht mehr als *einfach* zusammenhängendes Ganze in dem geschlossenen Netze Γ ausbreiten lassen, wie dies speciell für ein Fundamentalpolygon $\bar{G}$ der Fall war, das wir aus dem allgemeinsten Netze G ausgeschnitten haben.

§ 8.

Geschlossene Netze.

Das bisherige zusammenfassend, gewinnen wir für die geometrische Definition einer Gruppe die folgende Auffassung:

Die Definition einer Gruppe $\overline{\Gamma}$, welche sich analytisch durch die, zwischen den erzeugenden Substitutionen A_i bestehenden Relationen:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ \cdots,\ F_k = 1,\ \cdots,\ F_r = 1$$

kennzeichnet, ist geometrisch gegeben:

1. Durch die Angabe eines Fundamentalpolygons, welches sich über dem geschlossenen Netze einer allgemeinen Gruppe Γ (und das kann selbstverständlich auch die allgemeinste Gruppe G sein) ausbreitet, und durch die Festsetzung der paarweisen Zuordnung der Ränder dieses Fundamentalpolygons.

2. Zweitens aber lässt sich die Gruppe $\overline{\Gamma}$ (die wir nach der eben gemachten Bemerkung auch als Gruppe $\overline{G}$ bezeichnen können) in einem *geschlossenen* Netze versinnlichen, welches erhalten wird, wenn wir die eben angegebene Aneinanderfügung der Ränder des Fundamentalpolygons wirklich ausführen. Dabei wird dieses geschlossene Netz *eindeutig* erhalten, welche allgemeinere Gruppe Γ auch den Ausgangspunkt für die Bildung des Fundamentalpolygons von $\overline{\Gamma}$ gegeben hat. *Somit bildet dieses geschlossene Netz auch die geometrische Definition unserer Gruppe* $\overline{\Gamma}$.

Wir fügen dieser Definition der geschlossenen Netze noch zwei Sätze bei, welche die Lagenverhältnisse der einzelnen schraffirten und nichtschraffirten Polygone eines solchen Netzes charakterisiren und welche sich unmittelbar den Sätzen anschliessen, welche wir in § 2. und § 3. für das Netz der allgemeineren Gruppe G aufgestellt haben:

1. *Die Lagenbeziehung der einzelnen schraffirten Polygone untereinander ist für jedes schraffirte Polygon genau dieselbe wie für jedes andere.*

Betrachten wir nämlich die Anordnung der Fläche in Bezug auf das schraffirte Polygon 1, so gehen wir von den Operationen $A_1, A_2, \cdots, A_n$ aus, durch welche wir successive alle Gebiete unserer Fläche um das Gebiet 1 anordnen. Die Anordnung der Fläche um irgend ein anderes schraffirtes Gebiet S erhalten wir nun, wenn wir von den Operationen ausgehen, welche dieses Gebiet S in die den obigen analogen Gebiete $SA_1, SA_2, \cdots, SA_n$ überführen. Dies sind aber auf das Polygon 1 angewandt die Operationen SA_iS^{-1}. Da nun unsere Gruppe holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen ist, wenn wir sie einmal durch die Operationen A_i erzeugen, das andere Mal durch die Operationen SA_iS^{-1}, so ist die Anordnung um ein Gebiet S dieselbe, wie um ein Gebiet 1, w. z. b. w.

Das gleiche gilt bezüglich der gegenseitigen Anordnung der nichtschraffirten Polygone, aus welchen sich in analoger Weise die Gruppe des Netzes herleitet.

Wir bezeichnen dieses Lagenverhältniss der einzelnen Polygone zu einander, indem wir sagen: *Jede Gruppe lässt sich durch ein reguläres Polygonnetz versinnlichen.*

2. *Was die Lagenbeziehung der schraffirten Polygone zu den nichtschraffirten anlangt*, so gilt hierüber das Folgende:

Wir haben diese Anordnung für das Netz der Gruppe G als eine *symmetrische* bezeichnet. Es war nämlich die Gruppe G holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen, wenn wir den erzeugenden Operationen $A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n$ der Gruppe die „symmetrischen" Operationen $A_1', A_2', \cdots, A_m', A_n'$ zuordneten (vergl. pag. 10). Dabei fanden die Beziehungen statt:

$$A_i' = A_1 A_2 \cdots A_{i-1} A_{i+1} \cdots A_m A_n,$$

$$A_i = A_1' A_2' \cdots A_{i-1}' A_{i+1}' \cdots A_m' A_n',$$

$$\Pi(A_i) = 1, \qquad \Pi(A_i') = 1.$$

Diese Symmetrie, welche für das geschlossene Netz der Gruppe G statthat, tritt im Allgemeinen für das geschlossene Netz einer speciellen Gruppe $\overline{G}$ nicht ein. Dies ist vielmehr dann und nur dann der Fall, wenn den Relationen:

$$F_h(A_1, A_2, \cdots A_m, A_n) = 1,$$

welche die Gruppe $\overline{G}$ definiren, sich die analogen Relationen, geschrieben in den A_i' zur Seite stellen, wenn also unsere erzeugenden Substitutionen auch den Bedingungen:

$$F_h(A_1', A_2', \cdots A_m', A_n') = 1,$$

genügen, wo die A_i und A_i' durch die obigen Relationen verbunden sind.

Sprechen wir also allgemein von dem *regulären Polygonnetze einer Gruppe $\overline{G}$*, so wollen wir diese *besonderen* Netze, welche sich durch die Möglichkeit einer gewissen holoedrisch isomorphen Beziehung der Gruppe $\overline{G}$ in sich ergeben, als *regulär-symmetrische Polygonnetze* bezeichnen*).

Schliesslich bemerken wir noch, dass ein durch die obigen Processe erhaltenes Polygonnetz G stets *einer bestimmten* Erzeugungsweise der

*) Man vergleiche hierzu § 10, sowie die im II. Abschnitte (§ 12. u. § 14.) für *endliche* Gruppen gegebenen Erörterungen, die speciell auf die Stellung dieser allgemeineren Auffassung zu meinen früheren Arbeiten Bezug nehmen, in denen ich in falscher Beschränkung ausschliesslich gewisse *regulär-symmetrische* Netze betrachtet habe.

Gruppe aus gewissen Operationen A_i entspricht, dass also zu einer Gruppe, den unendlich vielen verschiedenen Arten ihrer Erzeugung durch solche Operationen entsprechend, eine unendliche Anzahl verschiedener Netze gehört.

§ 9.

Verhältniss der Gruppen $\overline{G}$ und H.

Unsere bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, dass zur Definition einer Gruppe $\overline{G}$ es darauf ankommt, für eine Anzahl von „erzeugenden Substitutionen“ $A_1, A_2, \cdots A_m$ die hinreichende Zahl von Relationen $F_h(A_1, A_2, \cdots A_m) = 1$ zu bestimmen, welche diese Gruppe aus der allgemeinen Gruppe G abscheidet.

*Die Aufgabe fällt zusammen mit der anderen, unsere Gruppe H zu bestimmen derjenigen Substitutionen von G, welche mit Bezug auf die Gruppe $\overline{G}$ der Identität congruent sind**).

Es mögen *die erzeugenden Substitutionen* dieser Gruppe H sich in der Form:

$$\Phi_1(A_1, \cdots A_m), \quad \Phi_2(A_1, \cdots A_m), \quad \cdots \Phi_t(A_1, \cdots A_m)$$

darstellen. Diese Substitutionen liefern für unsere Gruppe $\overline{G}$ ein System von *definirenden Relationen*. Denn die aus den Φ_i gebildete Gruppe H soll, in Bezug auf die Gruppe $\overline{G}$ betrachtet, mit der Identität congruent sein, d. h. mit Bezug auf die Substitutionen $\overline{A_i}$ der Gruppe $\overline{G}$ ist

$$\Phi_i(\overline{A_1}, \cdots \overline{A_m}) = 1.$$

Die linken Seiten der obigen Relationen

$$F_h(A_1, \cdots A_m) = 1$$

für unsere Gruppe $\overline{G}$ finden sich also sicher als *erzeugende Substitutionen* unter den $\Phi_i(A_i)$. *Aber das System der Φ_i ist umfassender als das System der F_h.* Es ist nämlich ersichtlich, dass mit einer Relation $F_h = 1$ alle aus ihr durch Transformation mit den Substitutionen der Gruppe G abgeleiteten Relationen $SF_hS^{-1} = 1$ *äquivalent* sind**), während die linken Seiten dieser Relationen doch als wesentlich *verschiedene erzeugende Substitutionen* Φ_i der Gruppe H im Allgemeinen zu gelten haben.

Insofern nun jede Relation $F_h = 1$ (wie auch die Relationen $\Phi_i = 1$) geometrisch die Zusammengehörigkeit zweier Randkanten des Fundamentalpolygons für unsere Gruppe bedeutet, lassen sich umgekehrt diese *definirenden Relationen* einer Gruppe $\overline{G}$ (sowie jene der

*) Es sei die kurze Ausdrucksweise in diesem übertragenen Sinne gestattet.

**) Nicht aber im Allgemeinen die aus solchen Substitutionen durch Iteration und Combination abgeleiteten.

Gruppe H) bilden, wenn uns für eine Gruppe das Fundamentalpolygon und die Zuordnung der Ränder desselben gegeben vorliegt. Gerade in dieser Form, ausgehend von der geometrischen Darstellung, stellen wir im II. Abschnitte die abstracte Definition einiger bekannten Gruppen auf. Es sind die Beispiele, an denen ich zuerst die vorliegende Auffassungsweise gruppentheoretischer Processe studirte. Doch ist gerade auch hier nicht zu verkennen, dass die Geometrie nur für verhältnissmässig einfache Fälle die Lösung ermöglicht, während weitergehende Untersuchungen auf die rein combinatorische Formulirung der Frage eingehen müssen, welche ich hier zu entwickeln versucht habe.

§ 10.

Anschliessende Bemerkungen.

Zum Schlusse dieses Abschnittes seien noch einige Punkte berührt, die sich unmittelbar den bisherigen Erörterungen anfügen.

1. Was zunächst die hier verwendete *geometrische Darstellung* einer Gruppe betrifft, so habe ich die allgemeinere Auffassung solcher Figuren zu bezeichnen, deren ich in der Einleitung erwähnte. Sie liegt geradezu in den vorstehend gegebenen Entwickelungen über *Fundamentalpolygone.*

Die Gruppe H, welche wir vorhin (pag. 12, ff.) aus unserer allgemeinsten Gruppe G abgeschieden haben, als die Gruppe der mit Bezug auf $\bar{G}$ der Identität congruenten Substitutionen von G, ist uns in geometrischer Form gegeben durch die Ueberführungen eines gewissen Fundamentalpolygons (welches der Gruppe $\bar{G}$ entsprach) in eine Reihe von gleichartigen Fundamentalpolygonen, die, mit ihren Rändern aneinander grenzend, das ganze Gebiet der Gruppe G *einfach* und *lückenlos* überdecken. Diese Gruppe H entsteht dabei *aus denjenigen Operationen als „den erzeugenden Substitutionen", welche durch die paarweisen Zuordnungen der Randkanten eines ursprünglichen Fundamentalpolygons bezeichnet sind*, und aus welchen die Zuordnung der einzelnen Fundamentalpolygone, deren jedes eine Substitution der Gruppe H versinnlicht, hervorgeht.

Gehen wir, zu einer noch etwas allgemeineren Formulirung, von dem „geschlossenen Netze" einer Gruppe Γ aus (vergl. § 7. u. 8.), so wird durch das Fundamentalpolygon einer Gruppe $\bar{\Gamma}$, in analoger Weise wie soeben, in diesem geschlossenen Netze eine Eintheilung in eine Reihe von Fundamentalpolygonen hergestellt, deren Ueberführungen in einander eine zur obigen Gruppe H analoge Gruppe H definiren. Dabei werden jetzt diese Fundamentalpolygone, deren jedes Träger einer Substitution der Gruppe H ist, im Allgemeinen *mehrfachen Zusammenhang* aufweisen und von *einer Anzahl getrennter Ränder* be-

grenzt sein, für welche eine gegenseitige Zuordnung wieder die Art der Ueberführung der einzelnen Polygone ineinander bestimmt.

Das Wesentliche für alle solche Darstellungen von Gruppen H und H *ist dabei dieses, dass die Reihe der Fundamentalpolygone ein „in sich geschlossenes" (vergl. pag.* 19) *Gebiet (von endlichem oder unendlich hohem Zusammenhange) lückenlos und einfach, und in regulärer Eintheilung überdeckt**).

Eine solche allgemeinere geometrische Darstellung kann man nun ersichtlich von Anfang an zur Repräsentation einer jeden Gruppe zu Grunde legen, und hat dabei vor der im Vorstehenden gewählten speciellen Formulirung gewisse Vortheile voraus:

Zunächst fällt die gezwungene Auffassung fort, welche darin liegt, dass wir auf ein *„symmetrisches"* Netz G (vgl. pag. 10) als den Ausgangspunkt der Darstellung zurückgehen**) und alle Gruppen $\overline{G}$ als Fundamentalpolygone aus einem solchen Netze ausschneiden, während doch diese selbst dabei durchaus nicht symmetrisch zu sein brauchen (vergl. pag. 21). Dadurch kommt es, dass jedes specielle geschlossene Polygonnetz G, auch wenn es kein *regulär-symmetrisches* ist, doch eine *scheinbare* Symmetrie in der Unterabtheilung in schraffirte und nichtschraffirte, zu einander symmetrische, Polygone besitzt***). Wir müssen je zwei solcher Gebiete, welche die gleiche Bezeichnung tragen, zu einem einzigen zusammenfassen, um eine Darstellung in dem hier gegebenen allgemeineren Sinne zu erhalten.

Indem weiter in der allgemeineren Darstellung die erzeugenden Substitutionen der Gruppen G, $\overline{G}$, Γ, $\overline{\Gamma}$, ebenso wie die der Gruppen H und H, definirt erscheinen durch die paarweise Zuordnung der Ränder in einem ersten Polygone einer regulären Gebietseintheilung,

---

*) *Ebene* Gebietseintheilungen solcher Art sind es, welche den schon Eingangs erwähnten functionentheoretischen Untersuchungen von Schottky und Poincaré zu Grunde liegen. [Vergl. insbesondere Comptes rendus 1881, I., pag. 333, 1274, 1484, sowie Crelle's Journal, Bd. 83, pag. 346.]*) Dabei sind, im Gegensatz zu der hier eingeführten abstract gruppentheoretischen Auffassung, die in Gebietseintheilungen vorliegenden Gruppen stets als *Gruppen linearer Substitutionen* einer Veränderlichen verstanden, zu welchen ebendiese Gebietseintheilungen in einer *bestimmten quantitativen Beziehung* stehen.

**) Wir legen damit eigentlich eine Gruppe zu Grunde, welche doppelt so gross ist, als die Gruppe G. Zu den Operationen von G kommen nämlich noch die *Spiegelungen* hinzu, welche die schraffirten und nichtschraffirten Polygone mit einander vertauschen.

***) Und hier liegt die Quelle des schon erwähnten Fehlers meiner früheren Arbeit, auf den ich pag. 30 ausführlich eingehe.

---

*) Den auf pag. 4 gegebenen Citaten habe ich nachträglich noch 2 demnächst in diesen Annalen (Bd. XIX, Heft 4) erscheinende Abhandlungen von Poincaré und Klein beizufügen [Januar 1882].

fällt die Besonderheit fort, welche der specielleren Darstellung anhaftet, dass nämlich die erzeugenden Substitutionen der Gruppen $G, \overline{G}, \Gamma, \overline{\Gamma}$ definirt sind als „Drehungen um die Eckpunkte der Gebietseintheilung", während gleichzeitig die erzeugenden Substitutionen für die Gruppen H und $\mathfrak{H}$ durch die Zuordnung der Ränder eines Fundamentalpolygons gegeben erscheinen.

Gleichwohl habe ich an der specielleren geometrischen Darstellung festgehalten. Einmal ist sie mir durch meine früheren Studien die geläufigere; dann aber, und darauf kommt es hier vor Allem an, lässt sich in der allgemeineren Formulirung die geometrische Uebersichtlichkeit nicht in dem Maasse erreichen, wie dies hier (auch noch für verhältnissmässig complicirte Beispiele) gelingt, wo durch die Trennung schraffirter und nichtschraffirter Gebiete die Definition der einzelnen gruppentheoretischen Operationen in anschaulichster Form gegeben ist. Und insoferne der geometrische Apparat, wie schon in der Einleitung erwähnt, nur einem ersten Eindringen auf die *gruppentheoretischen* Fragen dient, an dessen Stelle weiterhin eine davon unabhängige Behandelung zu treten hat, mag es genügen, hier gezeigt zu haben, wie eine solche Darstellung sich unter ein allgemeines Gebiet subsumirt, das von anderer Seite her Gegenstand der Untersuchung geworden ist, und mag es genügen, von der *Besonderheit*, welche unserer engeren *geometrischen* Formulirung anhaftet, Rechenschaft gegeben zu haben.

2. Die folgende Bemerkung bezweckt, der *gruppentheoretischen* Fragestellung, welche uns in ihrer allgemeinen Gestalt seither beschäftigte, noch eine andere Fassung zu geben, die uns gleichzeitig zu den Ausführungen des folgenden Abschnittes hinüberleitet. Ist uns „in independenter Form" eine Gruppe gegeben durch Relationen $F_k = 1$ zwischen erzeugenden Substitutionen A_i, und wir haben die Aufgabe, nun die Substitutionen derselben explicite zu bilden, so werden wir uns aus den erzeugenden Substitutionen zunächst eine Reihe von Gruppen herstellen, die, mit den Bedingungen $F_k = 1$ verträglich, sicher als *Untergruppen* in der ganzen Gruppe enthalten sind. Durch die Combination solcher Untergruppen entsteht dann die Gesammtgruppe, und die Regeln nach welchen diese Combinationen vorzunehmen sind, liegen eben wieder in den obigen Relationen vor.

Wir kennzeichnen also in dieser Auffassung eine Gruppe dadurch, dass wir sagen, sie enthält eine Reihe von (bekannten) Gruppen als Untergruppen, für welche die gegenseitige Stellung durch gewisse Relationen zwischen ihren Substitutionen gegeben ist. Diese Darstellung lässt sich dabei noch auf die mannichfachste Weise, durch zweckmässige Umformungen der Relationen $F_k = 1$, gestalten, den verschiedenen in einer Gruppe enthaltenen Untergruppen entsprechend.

Wir machen im Folgenden von diesem allgemeinen Principe Gebrauch: Indem wir uns nämlich im folgenden Abschnitte auf *endliche Gruppen* beschränken, geben wir durch eine erste Reihe von Formeln $F_h = 1$ jedesmal die *Perioden* der erzeugenden Substitutionen A_i an; es ist also unmittelbar eine Reihe von *cyklischen* Untergruppen, welche in der Gesammtgruppe enthalten sind, durch diese Formeln definirt; eine zweite Reihe von Formeln $F_h = 1$ bestimmt dann die gegenseitige Stellung dieser cyklischen Untergruppen untereinander.

II. Abschnitt.

Endliche Gruppen.

§ 11.

Definition einer Gruppe Γ, welche den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen bildet.

Die specielle Weiterführung der im vorhergehenden Abschnitte in allgemeinster Weise gegebenen Entwickelungen soll sich auf die Behandelung *endlicher Gruppen* beziehen.

Dabei wollen wir in unserer Darstellung nicht mehr von der allgemeinsten Gruppe G ausgehen, sondern im Sinne des § 5. von einer speciellen Gruppe Γ, die aber geeignet ist, alle möglichen Fälle endlicher Gruppen zu umfassen. *Wir wollen (wie soeben erwähnt) annehmen, dass unsere erzeugenden Operationen* $A_1, A_2, \cdots, A_m$ *bestimmte Perioden* $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_m$ *besitzen,* so dass für unsere Gruppe Γ die Relationen

$$A_1^{\nu_1} = 1, \quad A_2^{\nu_2} = 1, \quad \cdots, \quad A_m^{\nu_m} = 1$$

bestehen. Diesen fügen wir noch die analoge Relation zu für die Operation A_n (welche wir durch die Beziehung $A_1 A_2 \cdots A_m A_n = 1$ definirt hatten). Wir setzen für A_n die Periode ν_n fest und stellen also kurz als *Definition der Gruppe* Γ *die Relationen auf:*

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} A_i^{\nu_i} = 1, \\ \Pi A_i = 1, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots m, n.$$

Die Einführung und nähere Definition der Substitution A_n geschieht im Interesse unserer *geometrischen Darstellung*, wie denn die folgenden Entwickelungen sich enger an diese anschliessen sollen als dies bisher der Fall war, wo sie nur eine gelegentliche anschauungsmässige Deutung unserer gruppentheoretischen Sätze bildete.

Unserer neuen, im Allgemeinen*) noch unendlich grossen, Gruppe Γ entspricht nun in dem unendlichen Netze der Gruppe G als Funda-

*) Ueber gewisse *specielle* Fälle vergleiche § 15, 1.

mentalpolygon, wie wir oben (pag. 17) allgemein gezeigt, ein *einfach zusammenhängender* Bereich. An jedem Eckpunkte a_i desselben sind nur mehr $2\nu_i$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Polygone zu berücksichtigen, den Perioden ν_i der Operationen A_i entsprechend. Die jedesmal entstehenden beiden Randkanten sind dann einander zugeordnet.

Indem wir durch Dehnungen des Fundamentalpolygons diese freien Randkanten vereinigen, entsteht ein neues „geschlossenes Polygonnetz", in welchem an jedem Eckpunkte a_i je $2\nu_i$ abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Polygone zusammenstossen, die sich (im Allgemeinen (vergl. vorige Anm.)) unendlich oft reproduciren. Ertheilen wir auch diesem Netze, im Sinne unserer früheren Darstellung (pag. 7) eine übersichtliche Anordnung, so können wir die Kanten unserer Polygone wieder als Orthogonalkreise zu einem festen Kreise K zeichnen und auseinander durch Spiegelung nach dem Principe der reciproken Radien ableiten. Dabei müssen wir dann, um die gewünschte Anzahl der jedesmal in einem Ecke zusammenstossenden Polygone zu erhalten, dem Ausgangspolygone an den Ecken $a_1, a_2, \cdots, a_m, a_n$ bez. die Winkel $\frac{\pi}{\nu_1}, \frac{\pi}{\nu_2}, \cdots, \frac{\pi}{\nu_m}, \frac{\pi}{\nu_n}$ beilegen, eine Anordnung, die sich im Allgemeinen noch auf sehr mannigfache Weise bewerkstelligen lässt.

Dieses unendliche geschlossene Netz definirt jetzt unsere Gruppe Γ *im Sinne des* § 7., *denn die näheren Eigenschaften*

$$(I) \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi A_i = 1$$

dieser Gruppe, und nur diese, sprechen sich implicite in der gegenseitigen Anordnung der einzelnen Polygone aus. Dabei bemerken wir, dass das Netz dieser Gruppe gleichfalls noch ein *einfach zusammenhängendes* Ganze bildet in unserer pag. 9 gegebenen Auffassung.

Indem wir jetzt wieder von einem Polygone 1 ausgehen, ertheilen wir allen übrigen Polygonen bestimmte Namen, den Substitutionen entsprechend, welche vom Ausgangspolygone 1 zu ihnen führen. Diese Bezeichnungen sind dabei wieder *bestimmte*, wenn wir von äquivalenten Ausdrücken absehen, die durch das Vorhandensein der obigen Relationen herbeigeführt werden. Geometrisch gesprochen können wir von Polygon 1 auf unendlich vielen „*Transformationswegen*" zu einem Polygone S gelangen: Alle diese Wege sind *äquivalent* und durch die obigen Relationen in einander überführbar. Wir geben mit Rücksicht auf das Folgende diesem Satze noch die Formulirung:

Jeder in sich geschlossene Transformationsweg auf unserem unendlichen Netze, der also ein Stück desselben herausschneidet, kann auf einen Punkt zusammengezogen werden, d. h. die einem solchen Wege auf der Fläche entsprechende Substitution $S(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n)$ *kann mit Hülfe der Bedingungen* (I) *auf die Identität gebracht werden.*

Dabei sei erwähnt, dass (wie dies auch unmittelbar in der Figur deutlich) unser Polygonnetz ein *regulär-symmetrisches* ist. Den Relationen

$$A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi(A_i) = 1$$

entsprechen nämlich, wie aus den pag. 10 gegebenen Formeln unmittelbar hervorgeht, die symmetrischen Relationen:

$$A_i'^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi(A_i') = 1$$

womit nach § 8. (pag. 21) die Symmetrie gekennzeichnet ist. In geometrischer Auffassung bildet wieder die *Spiegelung* der Polygone längs einer der Kanten eine Operation Θ, durch welche die Gruppe in sich übergeführt wird und für welche gleichzeitig $\Theta A_i \Theta^{-1} = A_i'$ ist, womit die holoedrisch isomorphe Zuordnung der Gruppe in sich gleichfalls bezeichnet ist (vergl. pag. 11).

§ 12.

Fundamentalpolygon und geschlossenes Polygonnetz (Riemann'sche Fläche) für eine endliche Gruppe $\bar{\Gamma}$.

Jede Gruppe $\bar{\Gamma}$, für welche ein System von erzeugenden Operationen $A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n$ existirt, welches den Bedingungen:

(I) $$A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi(A_i) = 1$$

der Gruppe Γ genügt, stellt sich jetzt in der Weise dar, dass zu diesen Bedingungen noch weitere Relationen (II) hinzutreten, die wir (um Verwechselung mit der früheren Bezeichnung zu vermeiden) jetzt in der Form

(II) $P_1(A_i) = 1,\ P_2(A_i) = 1, \cdots, P_h(A_i) = 1, \cdots, P_q(A_i) = 1$

schreiben wollen.

Wir verfolgen die Bedeutung dieser Relationen $P_h = 1$ unter der Annahme, dass wir es mit einer endlichen Gruppe $\bar{\Gamma}$ von N Substitutionen zu thun haben.

In gleicher Weise, wie früher geschildert, breiten wir die Substitutionen der Gruppe $\bar{\Gamma}$ in dem geschlossenen Netze der Gruppe Γ aus und gelangen zu einem *Fundamentalpolygone* der Gruppe, welches bis auf „äquivalente Aenderungen" bestimmt ist. Es besteht aus $2N$ abwechselnd schraffirten und nichtschraffirten Polygonen (n-Ecken), welche, der Erzeugung unserer Gruppe durch die Substitutionen A_i entsprechend, sich als ein *zusammenhängendes Gebiet* im Netze Γ ausbreiten lassen, dessen Randkanten vermöge der Relationen (II) paarweise einander zugeordnet sind. Wir haben zu beweisen, dass wir das Gebiet wiederum in Gestalt eines *einfach zusammenhängenden* Stückes in unserem Netze ausbreiten können.

Nimmt man nämlich an, dass innerhalb des Fundamentalpolygons ausgeschlossene „Inseln" von Polygoncomplexen liegen, so brauchen wir zunächst diese Inseln nur als einfach zusammenhängend vorauszusetzen, denn andernfalls hätten wir unser Fundamentalpolygon überhaupt nicht zusammenhängend ausgebreitet, was sicher möglich ist. Die Ränder R_1, R_2 einer solchen Insel sind nun irgendwie anderen Randkanten R_1', R_2', $\cdots$ unseres Fundamentalpolygons zugeordnet. Die an diese letzteren grenzenden Stücke S_1', S_2', $\cdots$ des Fundamentalpolygons sind also den entsprechenden Stücken S_1, S_2, $\cdots$ der Insel äquivalent und diese kann, indem wir die Stücke S_1', S_2', $\cdots$ ersetzen durch die Stücke S_1, S_2, $\cdots$ der Insel, verkleinert und ganz zum Verschwinden gebracht werden, ohne dass eine neue Insel aufträte. Indem wir dieses Verfahren fortsetzen, sehen wir:

Für jede Gruppe $\bar{\Gamma}$, *welche durch Substitutionen* A_1, A_2, $\cdots$, A_n *erzeugt wird, welche den Bedingungen*

$$(I) \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi A_i = 1$$

genügen, lässt sich in unserem unendlichen Netze ein einfach zusammenhängendes Fundamentalpolygon construiren, dessen Ränder einander paarweise zugeordnet sind.

Wir wollen die freien Ränder dieses Fundamentalpolygons wirklich aneinanderschliessen, wie es die Relationen

$$(II) \qquad P_h(A_i) = 1$$

angeben, d. h. wir wollen das *geschlossene Polygonnetz* für unsere *endliche* Gruppe $\bar{\Gamma}$ bilden. *Dieses ist dann eine allseitig geschlossene Fläche von einem gewissen Geschlechte p: eine frei im Raume gelegene Riemann'sche Fläche**), deren $2N$ einzelne, abwechselnd schraffirte und weisse Gebiete in den Ecken (Verzweigungspunkten) zu je $2\nu_i$ zusammenstossen, den Relationen (I) $A_i^{\nu_i} = 1$ entsprechend. Je zwei in irgend einer Kante $a_i a_{i+1}$ benachbarte Polygone sind dabei als *ein Blatt* der Riemann'schen Fläche aufzufassen.

Der pag. 21 für unsere allgemeinen Polygonnetze aufgestellte Satz lautet für unseren speciellen Fall:

Das geschlossene Polygonnetz ist eine reguläre N blättrige Riemann'sche Fläche.

---

*) Ich gebrauche für diese Polygonnetze das Wort „*Riemann'sche Fläche*" wegen ihrer unmittelbaren Beziehung zu den betreffenden Eingangs erwähnten Abhandlungen (pag. 2, 3, 4, Anm.). Doch sei nochmals hervorgehoben, dass in der vorliegenden Untersuchung alle unsere geometrischen Gebilde, allein den *gruppentheoretischen* Fragen dienend, nur im Sinne der analysis situs verstanden sind.

Dabei ist, wie schon im § 8. allgemein erwähnt, die Anordnung der nichtschraffirten Gebiete nicht nothwendig symmetrisch zu der Anordnung der schraffirten Gebiete. Vielmehr verlangen die früher hiefür aufgestellten Bedingungen unter Festhaltung der dortigen Bezeichnung, dass neben den Relationen:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \text{I.} & A_i^{\nu_i} = 1, \quad \Pi A_i = 1, \\ \text{II.} & P_h(A_i) = 1 \end{cases}$$

noch die symmetrischen Relationen

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \text{I.} & A_i'^{\nu_i} = 1, \quad \Pi A_i' = 1, \\ \text{II.} & P_h(A_i') = 1 \end{cases}$$

stattfinden, was wohl stets für die Relationen I. (pag. 28) nicht aber im Allgemeinen für die Relationen II. eintritt.

Die Zusammenfassung des Bisherigen ergiebt folgenden Satz: der eine früher (Ann. Bd. XVII, p. 476) aufgeworfene Frage beantwortet:

Jede endliche Gruppe von N Substitutionen lässt sich, ausgehend von gewissen erzeugenden Substitutionen derselben, durch eine reguläre N-blättrige Riemann'sche Fläche versinnlichen, und zwar, den verschiedenen Arten entsprechend, durch die wir die Gruppe aus erzeugenden Substitutionen definiren können, noch auf sehr verschiedene Weise. Die reguläre Fläche, die wir erhalten, ist aber im Allgemeinen nicht auch regulär-symmetrisch. Dies tritt vielmehr dann und nur dann ein, wenn die Gruppe vermöge ihrer erzeugenden Substitutionen in der eben angedeuteten Weise holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen werden kann*).

*) Anmerkung: Hier sei es gestattet, die Richtigstellung des Fehlers einzufügen, der sich, wie schon erwähnt, in meinen früheren Arbeiten über reguläre Riemann'sche Flächen findet: Meine Untersuchungen über reguläre Riemann'sche Flächen (in meiner Inauguraldissertation, (München 1879) und im XVII. Bande der Mathematischen Annalen pag. 473—510) beschränken sich auf die Betrachtung nur *regulär-symmetrischer* Flächen (vergl. pag. 17 der Diss., sowie pag. 477, 478 der Annalenarbeit), ohne dass dieses Umstandes *als einer Einschränkung* — weil als solche nicht erkannt — Erwähnung gethan ist. So sind also die Sätze in pag. 9 der Inauguraldisseertation, sowie pag. 477, Anm. und 501 der Annalenarbeit, welche eine *Aufzählung* gewisser *regulärer* Riemann'scher Flächen betreffen, dort nur für *regulär-symmetrische* Flächen zu verstehen. Die eigentliche gruppentheoretische und algebraische Untersuchung der Arbeiten macht von dieser Voraussetzung keinen Gebrauch und ist somit allgemeingültig. Inwiefern sich gerade diese Untersuchungen den hier gegebenen allgemeineren gruppentheoretischen Formulirungen einordnen, zeige ich in § 14. Fassen wir die reguläre Riemann'sche Fläche in ihrer algebraischen Definition als Galois'sche Resolvente $f(\eta, z) = 0$ auf, so bedeutet die Einschränkung auf nur regulär-symmetrische Flächen im algebraischen Sinne *die Betrachtung Galois'scher Resolventen mit nur reellen Coefficienten*, wie dies Herr Klein in seiner soeben erschienenen Schrift „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" § 21. für symmetrische Flächen überhaupt zeigt.

§ 13.

Geschlossene Curven auf unserer Riemann'schen Fläche. Maximalzahl der Relationen II.

Wir haben uns vermöge der Relationen

$$\text{(I)} \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi A_i = 1,$$

$$\text{(II)} \qquad P_h(A_i) = 1$$

eine geschlossene Riemann'sche Fläche hergestellt, die unsere, N Substitutionen umfassende, Gruppe Γ repräsentirt. *Für jede solche Darstellung wird also einer Gruppe Γ ein gewisses Geschlecht p zugewiesen.* Dasselbe ergiebt sich nämlich aus der Kenntniss der Zahl N, (der Blätterzahl) und den durch *die Formeln* (I) gegebenen Zahlen ν_i, welche die Anzahl der in einem Eckpunkte zusammenstossenden schraffirten Polygone (Multiplicität der Verzweigungspunkte) angeben. Man hat nämlich nach dem Geschlechtssatze:

$$p = -N + 1 + \sum \frac{\nu_i - 1}{2}$$

wo die Summe über alle Eckpunkte der Gebietseintheilung ausgedehnt ist.

Wir wollen uns über die Anzahl der Relationen (II) *orientiren, welche die Gruppe Γ aus dem unendlichen, durch die Formeln* (I) *definirten Netze ausschneiden.*

Ziehen wir auf unserer geschlossenen Fläche irgend eine Curve, welche von einem Polygone zu einem anderen hinführt, so lässt sich dieser Weg *mit Bezug auf die auf der Fläche getroffene reguläre Eintheilung* sofort als eine aus den Operationen $A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n$ zusammengesetzte Substitution $P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n)$ schreiben, analog wie früher im unendlichen Netze.

Ist dieser Weg ein *geschlossener*, so implicirt er eine Relation

$$P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1.$$

Dabei haben wir aber jetzt zu unterscheiden, ob der Weg im Sinne der analysis situs auf einen Punkt zusammengezogen werden kann oder nicht. Im ersteren Falle lässt sich die Relation $P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1$ mit Hülfe der Formeln (I) auf eine Identität zurückführen, wie wir dies beim unendlichen Netze gesehen. *Im anderen Falle ist dies nicht möglich*, d. h. die Relation $P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1$ stellt eine *wesentlich neue* in den Formeln (I) nicht ausgesprochene Beziehung zwischen den Operationen A_i auf. Dabei können wir diese Relationen (I) noch mannigfach umgestalten, d. h. wir können die geschlossene Curve noch mannigfach auf der Fläche verschieben — und umgekehrt sind alle geschlossenen Wege, die sich auf der Fläche durch blosse

Verschiebung ineinander überführen lassen, von jenen durch (I) hervorgerufenen Aenderungen abgesehen, einer einzigen Relation $P(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1$ äquivalent.

Nun giebt es auf einer Fläche vom Geschlechte p in diesem Sinne nicht mehr als $2p$ von einander unabhängige geschlossene Wege; alle übrigen lassen sich aus diesen unter Zuhülfenahme blosser Verschiebungen durch Wiederholung und Combination zusammensetzen. Sprechen wir diesen Satz in gruppentheoretischem Sinne aus, so folgt:

Es giebt für unsere reguläre Eintheilung sicher nicht mehr als $2p$ von einander unabhängige Relationen:

$$P_i(A_1, A_2, \cdots, A_m, A_n) = 1.$$

Jede weitere Relation lässt sich mit Hülfe dieser und übrigens der Relationen (I) *herstellen.*

Dabei stellt aber die Zahl $2p$ nur eine obere Grenze der nothwendigen Relationen $P_i = 1$ fest. Denn für unsere reguläre Eintheilung sind nicht bloss die geschlossenen Wege äquivalent, die wir durch stetige Verschiebungen auf der Fläche ineinander überführen können. Eine Relation $P_i = 1$ sagt nämlich zunächst, dass wir, von einem Polygone 1 ausgehend, auf dem Wege P_i wieder zum Polygone 1 zurückgelangen; sie sagt aber auch, dass wir vom Polygone $\mathfrak{P}$ ausgehend auf dem Wege P_i wieder nach $\mathfrak{P}$ gelangen; d. h. aus $P_i = 1$ folgt unmittelbar $\mathfrak{P} P_i \mathfrak{P}^{-1} = 1$. Und allgemein wird sich ein aus solchen Wegen zusammengesetzter Zug

$$\mathfrak{P} P_i \mathfrak{P}^{-1} \mathfrak{P}' P_i \mathfrak{P}'^{-1} \cdots = \mathsf{P}(\mathfrak{P} P_i \mathfrak{P}^{-1})$$

schliessen, wenn nur $P_i = 1$ ist*). Nun kann aber sehr wohl:

$$\mathfrak{P} P_i \mathfrak{P}^{-1} = P_k \quad \text{oder} \quad \mathsf{P}(\mathfrak{P} P_i \mathfrak{P}^{-1}) = P_k$$

sein, und also aus $P_i = 1$ auch $P_k = 1$ folgen, ohne dass darum diese beiden Wege stetig (d. h. durch blosse Verschiebung auf der Fläche) ineinander übergeführt werden können.

Verzeichnen wir also auf unserer Fläche $2p$ Curven, die dieselbe zu einer einfach zusammenhängenden machen und drücken diese geschlossenen Curven als Relationen $P_1 = 1, P_2 = 1, \cdots, P_{2p} = 1$ aus, so wird die Zahl $2p$ derselben sich um 1 vermindern lassen, so oft eine Relation $\mathsf{P}(\mathfrak{P} P_i \mathfrak{P}^{-1}) = P_k$ statthat.

Gerade diese geometrische Formulirung ist es nun, von welcher wir in § 15. ausgehen, um für einzelne specielle Gruppen eine „independente Definition“ abzuleiten. Wir legen die Definition dieser Gruppen durch reguläre Riemann'sche Flächen zu Grunde, deren

*) Umgekehrt folgt aber aus $\mathsf{P}(\mathfrak{P} P_i \mathfrak{P}^{-1}) = 1$ *nicht* auch nothwendig $P_i = 1$.

Verzweigung uns die *Relationen* (I) erkennen lässt, deren zweckmässige *Zerschneidung* zu einfach zusammenhängenden Flächenstücken uns die zugehörigen *Relationen* (II) ergiebt.

§ 14.

Frühere Untersuchungen.

Ehe ich dazu übergehe, die im Vorstehenden allgemein exponirten Principien an einigen Beispielen durchzuführen, sei es gestattet, die Stellung meiner früheren gruppentheoretisch-geometrischen Untersuchungen zu den hier gegebenen zu bezeichnen.

In den soeben, pag. 30, citirten Abhandlungen wird geometrisch die Aufgabe gelöst, *eine Gruppe* Γ, *die uns in Form einer regulären Riemann'schen Fläche gegeben vorliegt, zu zerlegen*, d. h. für dieselbe eine Reihenfolge von Gruppen $\Gamma, H_1, H_2, \cdots$ aufzustellen, deren jede ausgezeichnet in der unmittelbar vorhergehenden enthalten ist und dabei aus ihr sich abscheidet durch Adjunction bez. einer Gruppe $\overline{\Gamma}_1, \overline{\Gamma}_2, \cdots$. Zu dem Ende*) wird die N-blättrig über der complexen Ebene ausgebreitete reguläre Riemann'sche Fläche einer Deformation unterworfen, durch welche die Blätter derselben zum Theile nebenzum Theile übereinander zu liegen kommen. Gelingt dann diese Deformation so, dass eine M'-blättrige ($N = M' \cdot M''$) frei im Raume gelegene *reguläre* Riemann'sche Fläche entsteht, deren jedes Blatt vom Geschlechte p_1 wieder regulär eingetheilt erscheint, so ist durch diese Deformation die Gruppe $\overline{\Gamma}$ der Fläche gespalten in eine Gruppe $\overline{\Gamma}_1$, repräsentirt durch die reguläre Eintheilung des einzelnen Blattes der deformirten Fläche und eine Gruppe H_1, die Gruppe der Vertauschungen der übereinanderliegenden Blätter.

In unserer hier gegebenen allgemeinen Ausdrucksweise haben wir aus dem geschlossenen Netze einer endlichen Gruppe $\overline{\Gamma}$ ein *Fundamentalpolygon* für eine Gruppe $\overline{\Gamma}_1$ abgeschieden, durch dessen Adjunction die Gruppe $\overline{\Gamma}$ sich auf die Gruppe H_1 reducirt, welche in der Ueberführung der einzelnen äquivalenten Fundamentalpolygone $\overline{\Gamma}_1$ besteht. Somit kennzeichnet sich diese frühere Behandelung als eine specielle Form unserer hier gegebenen allgemeinen Auffassung**).

---

*) Vergl. pag. 46 ff. der Inauguraldissertation; pag. 484 ff. der Arbeit im XVII. Annalenbande.

**) Es sei hier der Hinweis gestattet, dass für die allgemeine *Frage nach der Zerlegung einer Gruppe, die durch Relationen* $F_k = 1$ *gegeben ist*, in der vorliegenden Untersuchung (zumal in §§. 4., 5., 9., 10.) die nothwendigen Mittel gegeben sind, und ich möchte mir vorbehalten, auf eine Behandlung derselben,

§ 15.

Beispiele.

1. Die Gruppen beim Geschlechte $p = 0$.

Die vorstehenden Sätze über die Definition von endlichen Gruppen an einigen Beispielen zu erläutern, beginnen wir mit den Fällen, in denen das, aus den Relationen

$$(I) \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \qquad \Pi(A_i) = 1$$

und der Zugrundelegung der Anzahl N der Substitutionen einer Gruppe sich ableitende Geschlecht p gleich *Null* ist. Dann ergiebt unser in § 13. abgeleiteter Satz über die Maximalzahl $2p$ der zur vollständigen Definition einer endlichen Gruppe noch nothwendigen Relationen (II) sofort:

Die beim Geschlechte Null auftretenden Gruppen sind durch die Relationen (I) *allein vollständig definirt.*

Wir zählen die in Betracht kommenden, nachgerade sehr bekannten Gruppen*) kurz auf, indem wir zunächst die hierhergehörigen regulären Riemann'schen Flächen vom Geschlechte 0 durch ihre Verzweigung und Blätterzahl charakterisiren, durch welche ja ganz ebenso die Gebietseintheilung der entsprechenden „frei im Raume gelegenen Fläche" bezeichnet ist. Es sind die folgenden:

	Verzweigung der Blätter der Riemann'schen Fläche an den Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ zu je			Blätterzahl
	ν_1,	ν_2,	ν_3	$N =$
1. Cyklische Gruppe.	ν,	ν,	·	ν
2. Doppelpyramidengruppe.	ν,	2,	2	2ν
3. Tetraedergruppe.	3,	3,	2	12
4. Oktaedergruppe.	4,	3,	2	24
5. Ikosaederpruppe.	5,	3,	2	60

Für diese Gruppen ergeben sich hiernach unmittelbar die independenten Definitionen. Wir schreiben dieselben, wie wir dies im Anschluss an unsere *geometrischen* Formulirungen stets gethan, in der Weise, dass wir 2 bez. 3 Substitutionen A_i als erzeugende Substitutionen einführen, der Anzahl der Verzweigungsstellen entsprechend, zwischen denen eine

die sich in einfachster Weise gestaltet und das Wesen der Frage klar erfassen lässt, demnächst im weiteren Verfolge meiner Untersuchungen einzugehen.

*) Man vergl. Klein, Math. Ann. Bd. IX, pag. 183 ff., und ebenda Bd. XIV, pag. 149.

Relation $\Pi(A_i) = 1$ besteht — eine Schreibweise, die man etwa als „homogene“ bezeichnen könnte. Dann kommen *die definirenden Formeln:*

1. Cyklische Gruppe: $A_1^{\nu} = 1,\ A_2^{\nu} = 1,\ A_1 A_2 = 1.$
2. Doppelpyramidengruppe: $A_1^{\nu} = 1,\ A_2^{2} = 1,\ A_3^{2} = 1,\ A_1 A_2 A_3 = 1.$
3. Tetraedergruppe: $A_1^{3} = 1,\ A_2^{3} = 1,\ A_3^{2} = 1,\ A_1 A_2 A_3 = 1.$
4. Oktaedergruppe: $A_1^{4} = 1,\ A_2^{3} = 1,\ A_3^{2} = 1,\ A_1 A_2 A_3 = 1.$
5. Ikosaedergruppe: $A_1^{5} = 1,\ A_2^{3} = 1,\ A_3^{2} = 1,\ A_1 A_2 A_3 = 1.$

Dies Resultat, etwa speciell für die letzte dieser Gruppen ausgesprochen, lautet also:

Sind uns zwei Operationen irgend welcher Art, A_1 und A_2, gegeben, von denen, auf ein Object 1 *angewandt, die erste nach* 5*-maliger Wiederholung, die zweite nach* 3*-maliger Wiederholung den Anfangszustand herstellt, während die Combination der beiden $A_1 A_2 (= A_3^{-1})$ von der Periode* 2 *ist, so ist die durch Iteration und Combination der beiden Operationen A_1, A_2 entstehende Gruppe holoedrisch isomorph mit der Ikosaedergruppe* (*also mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von* 5 *Dingen*).

Abgesehen von unserer *geometrischen* Entwickelung überzeugt man sich auf rein combinatorischem Wege leicht von diesem Resultate.

Es lassen sich nämlich (indem wir etwa A_2 zunächst durch die Beziehung $A_2^{-1} = A_3 A_1$ eliminiren) alle aus A_1 und A_3 möglichen Producte $A_1^{\alpha} A_3 A_1^{\beta} A_3 \cdots$ mit Hülfe der obigen Relationen

$$A_1^{5} = 1,\quad A_3^{2} = 1,\quad (A_1 A_3)^{3} = 1$$

auf die folgenden 60 *von einander verschiedenen Producte* zurückführen:

$$A_1^{\mu},$$
$$A_1^{\mu} A_3 A_1^{\nu},$$
$$A_1^{\mu} A_3 A_1^{2} A_3 A_1^{\nu},$$
$$A_1^{\mu} A_3 A_1^{2} A_3 A_1^{3} A_3 = A_3 A_1^{2} A_3 A_1^{3} A_3 A_1^{-\mu},$$
$$(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4),$$

welche die Substitutionen unserer Gruppe vorstellen.

In unserer geometrischen Sprechweise lautet der Satz: Setzt man irgend welche krummlinige Dreiecke $\overline{a_1 a_2 a_3}$ (schraffirte Dreiecke) und im Sinne der analysis situs symmetrische Dreiecke $\overline{a_1 a_2 a_3}$ (nichtschraffirte Dreiecke) derart nebeneinander, dass in den Ecken a_1 je 10 abwechselnd schraffirte und nichtschraffirte Dreiecke zusammenstossen, in den Ecken a_2 ebenso je 6 und in den Ecken a_3 je 4 solcher Dreiecke, *so enthält das entstehende Netz von Dreiecken, wie wir auch die Gestalt dieser Dreiecke*

im Uebrigen wählen mögen, nur 60 *schraffirte und ebensoviele weisse Dreiecke, welche die ganze Ebene ausfüllen**). [*Die Ebene ist dabei als geschlossene Fläche mit einem unendlich fernen Punkte aufgefasst.*]

In Tafel II ist ein solches Netz von Dreiecken entworfen. Zur besseren Uebersicht sind diese als Kreisbogendreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ gezeichnet und somit erscheint die Figur als die bekannte stereographische Projection eines auf die Kugel verzeichneten Ikosaeders**). Weiter ist in der Figur von einem Polygon „1" ausgehend ein Theil der Dreiecke durch die zugehörigen Substitutionen $S(A_1, A_3)$ bezeichnet, wodurch sich die eben angeführte Tabelle der 60 Substitutionen unmittelbar ergiebt.

Die Zurückführung irgend einer allgemeinen Substitution

$$A_1^{\alpha} A_3 A_1^{\beta} A_3 \cdots$$

auf eine dieser 60 Substitutionen wird dann geometrisch sofort geleistet, wenn wir nur den einer solchen Substitution entsprechenden Weg vom Polygone 1 beginnend auf unserer Gebietseintheilung verfolgen. Dieser Weg führt uns zu einem bestimmten *Endpolygone*, welches die „reducirte Form" des obigen Ausdruckes darstellt.

Für die übrigen, bei $p = 0$ auftretenden Gruppen und die zugehörigen Gebietseintheilungen ergeben sich selbstverständlich ganz analoge Sätze. Insoferne aber diese Gruppen die einzigen sind, deren, aus den Relationen I gebildete Netze nur eine *endliche* Zahl von Polygonen umfassen, können wir auch umgekehrt den Satz aussprechen:

Die aufgezählten Gruppen sind die einzigen, für welche die Kenntniss der Relationen I *zu ihrer völligen Definition hinreicht.*

Es bedarf dabei wohl kaum der Erwähnung, dass unsere Gebietseintheilungen, als Netze der in § 11. gegebenen Art, *symmetrische* sind, die Gruppen also durch die pag. 21 gegebene Zuordnung holoedrisch isomorph auf sich selbst bezogen sind.

2. Einige Gruppen, für welche das Geschlecht einer zugehörigen Riemann'schen Fläche $p = 1$ ist.

a. Als Beispiel einer Gruppe, bei welcher die in §. 13. abgeleitete Maximalzahl der Relationen (II) wirklich *nothwendig* ist zur völligen Charakterisirung der Gruppe, dient uns die Gruppe der Transformationsgleichungen der elliptischen Functionen.

---

*) Der Ausdruck „im Allgemeinen", den wir in den Sätzen pag. 26 u. 27 gebraucht, ist also gerade mit Bezug auf die Gebietseintheilungen bei $p = 0$ als specielle Fälle zu verstehen.

**) Eine Figur, wie sie Schwarz in der mehrfach erwähnten Abhandlung im 75. Bande von Crelle's Journal pag. 321 ff. angiebt. Vergleiche auch Klein, Math. Annalen Bd. XII, pag. 511.

Verwandeln wir die Perioden 2ω, $2\omega'$ einer elliptischen Function in $\frac{2\omega}{m}$, $\frac{2\omega'}{n}$, so besteht die zur Gruppe der Transformationsgleichung gehörige reguläre Riemann'sche Fläche aus $N = 2mn$ Blättern, die an vier Stellen paarweise verzweigt sind*). Das Fundamentalpolygon unserer Fläche zeigt also die bekannte Parallelogrammeintheilung (Fig. 1 der Tafel III), in der die schraffirten und nichtschraffirten Polygone jedesmal den Halbblättern unserer Riemann'schen Fläche entsprechen. Die Anordnung dieses Polygonnetzes in seiner unendlichen Ausdehnung liefert uns also sofort die „Relationen (I)" für die erzeugenden Substitutionen unserer Gruppe in der Gestalt:

(I) $A_1^2 = 1,\ A_2^2 = 1,\ A_3^2 = 1,\ A_4^2 = 1,\ A_1A_2A_3A_4 = 1$

und aus diesem Netze wird ein endliches Stück als Fundamentalpolygon unserer Gruppe herausgeschnitten durch die unmittelbar aus der Figur abzulesenden Relationen

(II) $(A_1A_2)^m = 1,\ (A_3A_2)^n = 1,$

durch welche die „Länge" und „Breite" unseres Fundamentalpolygons sich bestimmt.

Die Substitutionen (A_1A_2) und (A_3A_2) (also die Combination zweier „Drehungen" A_i) bezeichnen dabei zwei „Verschiebungen" des unendlichen Netzes in sich, aus welchen sich alle möglichen Verschiebungen desselben zusammensetzen; gerade der Umstand nun, dass diese Verschiebungen unter einander vertauschbar sind, bewirkt, dass wir hier wirklich $2p=2$ Relationen (II) bedürfen, um aus diesen zweifach unendlich vielen Operationen eine endliche Gruppe abzuscheiden.

Schliessen wir das nunmehr analytisch definirte Fundamentalpolygon unserer Gruppe zur Riemann'schen Fläche zusammen, so kommt die bekannte, regulär eingetheilte Ringfläche, auf welcher sich die „geschlossenen Wege" einer Fläche in ihrer gruppentheoretischen Bedeutung an einem einfachsten Beispiele darstellen.

b. Wir führen als weitere Beispiele $p = 1$ zwei reguläre Riemann'sche Flächen auf, welche *nicht regulär-symmetrisch* sind, für welche also die aus den Flächeneintheilungen abgeleitete Erzeugungsweise der zugehörigen Gruppen den in § 12. gekennzeichneten Isomorphismus der Gruppe in sich *nicht* zulässt.

---

*) Führen wir in der Weierstrass'schen Bezeichnung $p(u)$, $p'(u)$ als doppeltperiodische Functionen mit den Perioden 2ω, $2\omega'$ ein, und bezeichnen durch $\overline{p}(u)$, $\overline{p}'(u)$ Functionen mit den Perioden $\frac{2\omega}{m}$, $\frac{2\omega'}{n}$, so stellt die obige Fläche *unmittelbar* die Verzweigung von $p'(u)$ in Bezug auf $\overline{p}(u)$ dar. Vergl. Math. Ann. XVII, pag. 504 ff.

Die beiden Gruppen sind durch die in Figur 2 und 3 der Tafel III gegebenen Fundamentalpolygone und die beigesetzte Zuordnung der Ränder definirt. Uebertragen wir dieses geometrische Bild in unsere analytische Formelsprache, so ergeben sich zunächst die „Relationen I", welche das unendliche Polygonnetz kennzeichnen. Sie sind:

α) Für die erste Gruppe (Fig. 2):

$$(I) \qquad A_1^6 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1.$$

β) Für die zweite Gruppe (Fig. 3):

$$(I) \qquad A_1^4 = 1, \quad A_2^4 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1.$$

Die Zuordnung der Ränder der Fundamentalpolygone für unsere endlichen Gruppen liefern nun weiter die Relationen (II), welche wir der in die Figuren eingetragenen Bezeichnung der einzelnen Polygone sofort entnehmen. Es sind die folgenden:

α) Für die erste Fläche:

$$(II) \qquad (A_3 A_1^3)^3 = A_2 A_1^4.$$

β) Für die zweite Fläche:

$$(II) \qquad (A_3 A_1^2)^2 = A_2 A_1^3.$$

Bilden wir nun für diese Flächen die analogen Definitionen, wie sie sich mit Hülfe der (pag. 21 gegebenen) symmetrischen Relationen A_1', A_2', A_3' gestalten, so kommt:

α) Für die erste Fläche:

$$(I') \qquad A_1'^6 = 1, \quad A_2'^3 = 1, \quad A_3'^2 = 1, \quad A_1' A_2' A_3' = 1,$$

$$(II') \qquad (A_3' A_1'^3)^3 = (A_2' A_1'^4)^2.$$

β) Für die zweite Fläche:

$$(I') \qquad A_1'^4 = 1, \quad A_2'^4 = 1, \quad A_3'^2 = 1, \quad A_1' A_2' A_3' = 1,$$

$$(II') \qquad (A_3' A_1'^2)^2 = (A_2' A_1'^3)^4.$$

Hier zeigt sich also, dass die obigen Relationen (II), geschrieben in den gestrichenen Buchstaben, *nicht* erfüllt sind, dass also eine isomorphe Beziehung der Gruppe in sich durch Zuordnung der Operationen A_i und A_i' *nicht* statthat, wie dies geometrisch unmittelbar ersichtlich ist*).

*) Flächeneintheilungen dieser Art sind, nach den Ausführungen auf pag. 30, in meiner Arbeit im XVII. Annalenbande (Abschnitt III.) *nicht* enthalten, vielmehr sind dort (pag. 506, § 12.) unter den Flächen der Verzweigung [6, 3, 2] und [4, 4, 2] (in der dortigen Bezeichnung) nur die *regulär-symmetrischen* Flächen aufgezählt. Wie dort beziehen sich auch die hier charakterisirten *nicht-symmetrischen* Flächen auf die complexe Multiplication der elliptischen Functionen mit $g_2 = 0$ bez. $g_3 = 0$ (in der Weierstrass'schen Bezeichnung) und zwar ist

3. Die Gruppen der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Functionen.

Die Darstellung der Gruppe der Modulargleichungen, welche einer Primzahltransformation der elliptischen Functionen entsprechen, durch Relationen zwischen den erzeugenden Substitutionen ist mir in endgültiger Form noch nicht gelungen. Während ich also hierauf bei nächster Gelegenheit zurückzukommen denke, sei doch für diese Gruppen die Form der Fragestellung, die sich hier kurz bezeichnen lässt, entwickelt. Gerade für diese Gruppen ist nämlich das Princip der Bildung eines Fundamentalpolygons, auf dem ja unsere *geometrischen* Definitionen beruhen, von Herrn Klein, im Verfolge anderer Gesichtspunkte, zuerst ausgesprochen worden.

Alle linearen ganzzahligen ω-Substitutionen von der Determinante 1 bilden eine Gruppe Γ, die erzeugt wird durch die beiden Substitutionen

$$A_1 \cdots \omega' = \omega + 1,$$
$$A_2 \cdots \omega' = -\frac{1}{\omega},$$

wo A_1 eine „unendlich hohe" Periode — wenn dieser Ausdruck gestattet ist —, A_2 die Periode 2 besitzt. Die Combination beider Operationen

$$A_2 = A_1^{-1} A_3 \cdots \omega' = -\frac{\omega + 1}{\omega}$$

ist von der Periode 3. *In unserem Sinne ist also diese Gruppe Γ definirt durch die Relationen:*

(I) $$A_1^{\infty} = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1.$$

Geometrisch entspricht ihr ein unendliches Netz von abwechselnd schraffirten und nichtschraffirten Dreiecken, die an den Ecken a_1 zu je unendlich vielen, bei a_2 zu je 6, bei a_3 zu je 4 zusammenstossen — in eine gewisse Symmetrie gebracht die bekannte Eintheilung der ω-Ebene, wie sie sich ergiebt, wenn wir die Abhängigkeit des Periodenverhältnisses ω des elliptischen Integrales von der absoluten Invariante desselben studiren. *Die gestaltliche Anordnung dieses Netzes, im Sinne der analysis situs, ergiebt sich dabei hier, unabhängig von der Theorie der*

---

es hier speciell die Multiplication mit $(2+\varrho)$, wo ϱ eine dritte Einheitswurzel, beziehungsweise die Multiplication mit $(2+i)$, also eine specielle Transformation der 7^{ten} bez. 5^{ten} Ordnung, deren Gruppe durch die obigen Flächen bezeichnet wird.

Es finden sich diese Flächen in den Tabellen der regulären Gebietseintheilungen vom Geschlechte 1 von C. Jordan und W. Godt (vergl. dessen bereits erwähnte Programmschrift pag. 11 ff.) nicht aufgezählt; auch die Flächen, die ich nach meiner früheren Bezeichnung durch [2, 3, 6], $N = 18m^2$; [3, 3, 3], $N = 9m^2$ und [2, 4, 4], $N = 8m^2$ charakterisirt habe, sind dort nicht erwähnt.

linearen Substitutionen, auf einem independenten Wege aus den Relationen (I).

Nehmen wir alle Substitutionen der Gruppe Γ nach einem Modul n (der als Primzahl vorausgesetzt sei), so spaltet sich dieselbe dadurch in die Gruppe H der modulo n *der Identität congruenten* ω-Substitutionen und die Gruppe $\bar{\Gamma}$ der modulo n *verschiedenen* ω-Substitutionen. Die letztere Gruppe ist die Gruppe der Modulargleichung für Transformation n^{ter} Ordnung. Ihr entspricht in der ω-Ebene ein Fundamentalpolygon von $N = \frac{n \cdot n^2 - 1}{2}$ schraffirten und ebensovielen nichtschraffirten Dreiecken, dessen Ränder einander paarweise zugeordnet sind. Das „geschlossene Netz" bildet die reguläre Riemann'sche Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung zukommt. Ihre $2N = n \cdot n^2 - 1$ abwechselnd schraffirten und nichtschraffirten Gebiete (Halbblätter) stossen an Ecken a_1 zu je $2n$, an Ecken a_2 zu je 6, und an Ecken a_3 zu je 4 zusammen. Diese Fläche und das zugehörige Fundamentalpolygon habe ich (Annalen XVIII, p. 507 ff.) einer eingehenden gestaltlichen Discussion unterworfen, auf die man eine Definition unserer Fläche durch Relationen $F_h(A_i) = 1$ gründen kann. *Die Ableitung der Relationen* $F_h = 1$ *für diese Gruppen ist dabei, nach den früher allgemein ausgesprochenen Sätzen, gleichlaufend mit der Bestimmung der Gruppe* H *der modulo n der Identität congruenten Substitutionen* $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ *durch ihre erzeugenden Substitutionen.*

Indem ich auf diese allgemeine Fragestellung später zurückzukommen denke, sei hier die Durchführung unseres Problems *für den Fall der Transformation* 7^{ter} *Ordnung* gegeben. Die hier zugehörige 168-blättrige Fläche hat Herr Klein im XIV. Annalenbande in der Abhandlung „Ueber Transformation siebenter Ordnung" ausführlich discutirt*). Wir beziehen unsere folgende Entwickelung auf das dort in einer besonderen Tafel gegebene *Fundamentalpolygon* der Gruppe.

Zuvörderst ergeben sich die „Relationen (I)" für unsere Gruppe sofort aus der Multiplicität der Verzweigungspunkte unserer Fläche in der Form:

$$\text{(I)} \qquad A_1^7 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1.$$

Zur Herstellung der „Relationen (II)" haben wir jetzt die *Zuordnung der Ränder* unseres Fundamentalpolygons (wie sie auf jener Tafel bezeichnet ist) symbolisch auszudrücken. Dies gelingt am einfachsten, wenn wir die in jener Tafel stark markirte Zickzacklinie verfolgen, welche von dem mit 13 bezeichneten Rande des Gebietes

*) Vergl. insbesondere § 12. dieser Abhandlung.

zum Rande 4 hinführt. Indem nämlich die Ränder 4 und 13 einander zugeordnet sind, schliesst sich in der geschlossenen Fläche unsere Linie gerade zusammen; schreiben wir also den Zickzackweg mit Hülfe der Substitutionen A_1, A_2, A_3 als eine Substitution, welche von einem am Rande 13 liegenden Dreieck unseres Fundamentalpolygons hinführt zu dem „äquivalenten" Dreieck, welches im Rande 4 an unser Fundamentalpolygon anstösst, so haben wir diese Substitution gleich 1 zu setzen, um die gewünschte Relation zu erhalten, welche die Ränder 4 und 13 einander zuordnet. So kommt eine Relation (II) in der Gestalt:

$$(II) \qquad (A_2 A_1^5)^4 = 1^*).$$

Diese Relation ist aber ausreichend, um das ganze Fundamentalpolygon unserer Gruppe auszuschneiden. In der That, die Zuordnungen der übrigen Ränder unserer Figur (wie sie die, jener Tafel beigesetzte, Tabelle angiebt) werden durch ebensolche Zickzacklinien bezeichnet, welche sich als Substitutionen schreiben lassen, die aus der obigen durch Transformation abgeleitet sind.

Es bilden also die Relationen (I) *und* (II) *die gewollte Definition unserer Gruppe, die wir kurz etwa in der folgenden Form schreiben können:*

$$A_1^7 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad (A_1 A_2)^2 = 1, \quad (A_2 A_1^5)^4 = 1.$$

Die 168 Substitutionen, welche unsere Gruppe umfasst, lauten dabei — indem wir zu einfacher Schreibweise wieder von A_1 und A_3 als erzeugenden Substitutionen ausgehen — kurz wie folgt:

$$S^\lambda A_1^\mu,$$
$$S^\lambda A_1^\mu A_3 A_1^\nu,$$

wo S die folgende Substitution von der Periode 3 bedeutet:

$$S = A_3 A_1^3 A_3 A_1^5 A_3 A_1^3,$$

und α die Werthe $0, 1, 2$; μ und ν (von einander unabhängig) die Werthe $0, 1, 2, \cdots, 6$ durchläuft**).

---

*) Selbstverständlich hätten wir (nach pag. 17 u. 31) auch irgend einen anderen Weg von Rand zu Rand führen können; der vorliegende ist nur in der gruppentheoretischen Schreibweise der einfachste.

**) Diese Schreibweise der 168 Substitutionen beruht auf der Zerlegung der Fläche in drei Gebiete von 56 schraffirten und ebensovielen nichtschraffirten Dreiecken, welche ich in der erwähnten Abhandlung im XVIII. Annalenbande (p. 525) als „Polygoncyklen" bezeichnet habe.

Ich füge hier gleich die ganz entsprechende Schreibweise überhaupt für die Substitutionen der Modulargruppe für Transformation n^{ter} Ordnung (n Primzahl) bei. Bezeichnen hier A_1 und A_3 die (jetzt modulo n verstandenen) Substitutionen $\omega' = \omega + 1$, bez. $\omega' = -\frac{1}{\omega}$, so sind die $\frac{n \cdot n^2 - 1}{2} = \frac{n-1}{2} \cdot n + \frac{n-1}{2} \cdot n^2$ Substitutionen, welche unsere Gruppe umfasst, gegeben durch die Formeln:

Unsere Fläche kennzeichnet sich — (wie die Figur lehrt und eine Umsetzung der obigen Formeln (pag. 21 gemäss) zeigt — als eine *regulär-symmetrische*. Die isomorphe Zuordnung der Gruppe in sich, welche sich hierin ausspricht, ist, wenn wir die betreffenden Substitutionen etwa wieder als „ω-Substitutionen" deuten wollen, bezeichnet durch:

$$A_1 \cdots \omega' = \omega + 1, \quad A_1' \cdots \omega' = \omega - 1,$$
$$A_3 \cdots \omega' = -\frac{1}{\omega}, \quad A_3' \cdots \omega' = -\frac{1}{\omega}\ ^*).$$

$$S^\lambda A_1^\mu,$$
$$S^\lambda A_1^\mu A_3 A_1^\nu,$$
$$\left[\lambda = 0, 1, \cdots \frac{n-3}{2};\ \ \mu, \nu = 0, 1, \cdots n-1\right],$$

wo S die folgende Substitution bedeutet:

$$S = A_3 A_1^\delta A_3 A_1^\alpha A_3 A_1^\delta;$$

hierin sind die Exponenten α und δ zwei primitive Wurzeln der Primzahl n, für welche die Beziehung $\alpha\delta \equiv 1 \bmod. n$ statthat. Für die Potenzirung der Substitution S hat man dabei die folgende einfache Regel:

$$S^\lambda = A_3 A_1^{\delta^\lambda} A_3 A_1^{\alpha^\lambda} A_3 A_1^{\delta^\lambda},$$

aus welcher sich, mit Berücksichtigung der soeben gemachten Festsetzungen, die Periode von S zu $\frac{n-1}{2}$ ergiebt.

Diese Angaben folgen unmittelbar aus pag. 515 ff. und 523 ff. der oben erwähnten Arbeit: Die Substitution S, als ω-Substitution (und modulo n) geschrieben, lautet nämlich einfach $\omega' = \frac{\alpha\omega}{\delta}$, und die obige Schreibweise für die Substitutionen unserer Gruppe besagt geometrisch nichts anderes, als dass die reguläre Riemann'sche Fläche, welche wir unseren Darstellungen zu Grunde legen können, in $\frac{n-1}{2}$ „Polygoncyklen" zerlegt werden kann, welche den verschiedenen Werthen von λ entsprechen.

Selbstverständlich lässt sich in dieser Formulirung auch die vorhin (pag. 35) gegebene Modulargruppe für die Transformation 5ter Ordnung (die „Ikosaedergruppe") einbegreifen. Man hat nämlich hiefür $S = A_3 A_1^2 A_3 A_1^3 A_3 A_1^2$ und bekommt dann 60 Ausdrücke $S^\lambda A_1^\mu$, $S^\lambda A_1^\mu A_3 A_1^\nu$, welche sich sofort in die vorhin (pag. 35), in unmittelbaren Anschluss an die Figur (Tafel II.), gegebenen überführen lassen.

*) Diese holoedrisch isomorphe Beziehung hat, wie bekannt, allgemein für *jede* Modulargruppe statt. Man sehe die Entwickelungen in Serret's Traité d'algèbre supérieure vol. II., sowie auch einen Aufsatz von Kronecker in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1861. Geometrisch spricht sich der Isomorphismus wieder in der Symmetrie der zugehörigen Riemann'schen Flächen aus (vergl. Ann. XVIII, pag. 521).

§ 16.

Ueber die Definition gewisser complexer Zahlsysteme.

Bei der Aufstellung eines Systems von complexen Zahlen im allgemeinsten Sinne des Wortes handelt es sich zunächst stets um die Annahme einer Reihe von Einheiten für dieses Zahlsystem und weiter um die Festsetzung der Rechenoperationen in diesem Systeme.

Die folgenden Bemerkungen betreffen die Einführung gewisser *Multiplicationsregeln* für die Einheiten eines Zahlsystems. Unter den verschiedenartigen Verabredungen, die man hier treffen kann, setzen wir nämlich ein Princip solcher Bestimmung folgendermassen fest:

Die durch Iteration und Combination der zu Grunde gelegten Einheiten $E_1, E_2, E_3, \cdots E_m$ *gebildeten Producte*

$$E_1^{\mu_1} E_2^{\mu_2} \cdots E_1^{\nu_1} E_2^{\nu_2} \cdots$$

sollen eine geschlossene Gruppe von Operationen bilden.

Dann gelten die ursprünglichen Einheiten $E_1, E_2, \cdots E_m$ als die erzeugenden Substitutionen dieser Gruppe und die *Multiplicationsregeln* für unsere Einheiten stellen sich als die zur Definition der Gruppe nothwendigen Relationen zwischen den erzeugenden Substitutionen dar. Die Gesammtheit aller Substitutionen dieser Gruppe entspricht dem *vollen Systeme der Einheiten* für unsere complexen Zahlen.

Es soll gezeigt werden, dass dieses Princip bei der *Definition der Quaternioneneinheiten* thatsächlich zur Verwendung kommt und diese also eine Gruppendefinition in dem hier aufgestellten Sinne ist.*)

Wir bezeichnen durch $1, E_1, E_2, E_3$ *vier Einheiten*, für welche die Multiplicationsregeln gegeben sind durch folgende Formeln:

$$E_1 = E_3 E_2, \quad E_2 = E_1 E_3, \quad E_3 = E_2 E_1,$$
$$E_1 E_2 E_3 = 1.$$

Dann ist, 1 (die identische Substitution), E_1, E_2, E_3 als die erzeugenden Substitutionen einer Gruppe aufgefasst, durch diese Relationen die Gruppe folgender acht Substitutionen definirt:

---

*) Analoges gilt für die von Clifford, im Anschluss an Grassmann, gegebene Erweiterung der Quaternionen auf ein System mit n Einheiten (vergl. den Aufsatz „Applications of Grassmann's extensive Algebra" im American Journal, vol. I., pag. 351). Was Festsetzungen für die Multiplicationsregeln eines Zahlengebietes anlangt, so ist hier (neben der schon Eingangs angeführten „Ausdehnungslehre") noch der Aufsatz von Grassmann „Sur les différents genres de multiplication" im 49. Bande von Crelle's Journal zu erwähnen. Doch sei bemerkt, dass eine Reihe der dort getroffenen Multiplicationsregeln sich *nicht* unter den Gruppenbegriff subsumiren lassen, insoferne dort gewisse Producte von Einheiten gleich Null gesetzt werden.

$$\begin{array}{ccc} & 1, & \\ E_1, & E_2, & E_3, \\ E_1^2 = & E_2^2 = & E_3^2, \\ E_1^3, & E_2^3, & E_3^3. \end{array}$$

Man findet nämlich, für die Zurückführung irgendwelcher Substitutionen, sofort die Beziehungen:

$$E_1^4 = E_2^4 = E_3^4 = 1,$$

und

$$E_1^3 = E_2 E_3, \quad E_2^3 = E_3 E_1, \quad E_3^3 = E_1 E_2.$$

Diese Einheiten und ihre Multiplicationsregeln entsprechen hiernach unmittelbar dem System der Quaternioneneinheiten, wenn wir für dasselbe die acht Einheiten

$$1, \ -1, \ i, \ -i, \ j, \ -j, \ k, \ -k$$ *)

*(in der gewöhnlichen Schreibweise) zu Grunde legen***).

Leipzig, am 6. December 1881.

---

*) Die *getrennte* Einführung positiver und negativer Einheiten giebt z. B. Weierstrass in seinen Vorlesungen über analytische Functionen.

**) Man vergleiche die Formeln in Hamilton's Elements of Quaternions pag. 157 ff., oder auch in H. Hankel's Theorie der complexen Zahlen, Abschnitt VIII.

In Ergänzung des pag. 1 gegebenen Citats auf die Cayley'sche Note „On the theory of groups" im 1. Bande des American Journal of Mathematics habe ich noch drei kleine Abhandlungen Cayley's „On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\Theta^n = 1$" (Philosophical Magazine and Journal of Science, S^e 4, Bd. 7 u. 18, 1854, 1859) zu erwähnen, die mir bisher entgangen sind. Sie behandeln die Aufstellung aller möglichen Gruppen von n Substitutionen als Lösungssysteme der symbolischen Gleichung $\Theta^n = 1$ für die einfachsten Fälle; insbesondere findet sich dort die soeben gegebene Darstellung der „Gruppe der Quaternioneneinheiten".

April 1882.

Notiz zur Theorie der Modulfunctionen.

Von

Otto Rausenberger in Frankfurt a. M.

In seiner Arbeit *„Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen u. s. w.“* im XVIII. Bande der Annalen basirt Herr Hurwitz die Construction der Modulfunctionen auf die Bildung von Reihen, die in etwas modificirter Gestalt lauten

$$(1) \qquad \sum{}' \left(\frac{1}{\mu x + \nu}\right)^{2n}, \quad n > 1,$$

und die er, falls sie homogen gemacht werden, als *Modulformen* bezeichnet. μ und ν durchlaufen beide hierbei *alle* ganzzahligen Werthe mit Ausnahme der Combination $\mu = \nu = 0$. — Herr Poincaré legt in seinen Untersuchungen über Functionen mit linearen Transformationen in sich (vgl. z. B. die Abhandlung im XIX. Band der Annalen: *Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaires*) der Bildung von Transcendenten, welche die Modulfunctionen als speciellen Fall in sich schliessen, ähnliche Reihen zu Grunde. Diejenige unter denselben, welche der obigen entspricht, lautet

$$(2) \qquad \sum{}_1' \left(\frac{1}{\mu x + \nu}\right)^{2n},$$

worin jedoch μ und ν nur diejenigen Werthe durchlaufen, welche der ganzzahligen Gleichung

$$a\nu - b\mu = 1$$

Genüge leisten, d. h. zu einander *relativ prim* sind.

Es bietet sich uns nun die Frage dar: *Sind die Reihen* (1) *und* (2) *wesentlich von einander verschieden, oder stehen sie zu einander in einfacher Beziehung?* Dass das Letztere der Fall ist, ergiebt sich überaus leicht in folgender Weise.

Bezeichnet

$$(3) \qquad \sum{}_k' \left(\frac{1}{\mu x + \nu}\right)^{2n}$$

eine Reihe, in welcher μ und ν alle Werthepaare durchlaufen, welche den grössten gemeinschaftlichen Theiler k besitzen, so leuchtet ohne Weiteres ein, dass sich diese Reihe den Substitutionen

$$y = -\frac{1}{x} \quad \text{und} \quad y = x \pm 1$$

gegenüber genau ebenso verhält wie die Reihe (1). Während nämlich die erste Substitution die Absonderung eines Factors veranlasst, wird durch die zweite aus (3)

$$\sum_k' \left(\frac{1}{\mu x + \nu \pm \mu}\right)^{2n},$$

und es ist klar, dass μ und $\nu \pm \mu$ ebenfalls den grössten gemeinschaftlichen Theiler k besitzen und dass somit nur eine Vertauschung der Glieder hervorgebracht wird. Da nun

$$\sum' \left(\frac{1}{\mu x + \nu}\right)^n = \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_k' \left(\frac{k}{\mu x + \nu}\right)^{2n}$$

und

$$\sum_k' \left(\frac{1}{\mu x + \nu}\right)^{2n} = \frac{1}{k^{2n}} \sum_1' \left(\frac{1}{\mu x + \nu}\right)^{2n}$$

ist, so erhalten wir

$$\sum' \left(\frac{1}{\mu x + \nu}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \cdots\right) \sum_1' \left(\frac{1}{\mu x + \nu}\right)^{2n}$$

$$= \frac{(2\pi)^{2n}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n \cdot 2} \cdot B_n \sum_1' \left(\frac{1}{\mu x + \nu}\right)^{2n},$$

wobei B_n die n^{te} Bernoulli'sche Zahl bedeutet. Diese Formel behält auch für $n = 1$ ihre Richtigkeit, falls man die Reihenfolge der Summation derart festsetzt, dass je 2 Glieder mit $+\nu$ und $-\nu$ zusammengefasst werden; denn bei der obigen Zerlegung bleiben die zusammengeordneten Glieder ungetrennt.

Man ersieht hieraus, dass es keinen wesentlichen Unterschied macht, ob man sich der einen oder der andern Reihe bedient; da sich jedoch die Poincaré'sche in naturgemässerer Weise ergiebt — sie enthält eben gerade nur die *nothwendigen* Glieder —, so glaube ich, dass sie als die eigentliche Normalform zu betrachten ist.

Frankfurt a. M., im März 1882.

Zur Theorie der Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden.

Von

Otto Rausenberger in Frankfurt a. M.

Bezeichnet $f(x)$ eine Modulfunction, d. h. eine eindeutige Function, welche den Gleichungen

$$f(x+1) = f(x) \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

genügt, mithin nach der von mir in der Abhandlung: „Theorie der allgemeinen Periodicität" im XVIII. Band der Annalen gebrauchten Ausdrucksweise eine Function mit den beiden nicht vertauschbaren Perioden

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x},$$

so lassen sich mit Hülfe derselben Functionen construiren, welche die Perioden (n ist eine positive, ganze Zahl)

$$y = x + \sqrt{n} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x},$$

oder, was durch eine einfache Transformation zu erreichen ist, die Perioden

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{nx}$$

besitzen. Bildet man nämlich irgend eine rationale, symmetrische Function von

$$f(x\sqrt{n}) \quad \text{und} \quad f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

z. B.

$$F(x) = f(x\sqrt{n}) + f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right),$$

so erhält man eine Function mit den ersterwähnten Perioden; denn es ist

$$F(x+\sqrt{n}) = f(x\sqrt{n}+n) + f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}+1\right)$$
$$= f(x\sqrt{n}) + f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = F(x)$$

und

$$F\left(-\frac{1}{x}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{n}}{x}\right) + f\left(-\frac{1}{x\sqrt{n}}\right) = f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) + f(x\sqrt{n}) = F(x).$$

Die durch Iterirung und Combination der Substitutionen

$$y = x + \sqrt{n} \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x}$$

gebildete Gruppe ist nur dann eine Untergruppe der durch

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = -\frac{1}{x}$$

erzeugten Gruppe, wenn n eine Quadratzahl ist.

Ich gedenke dieser kurzen Notiz umfassendere Untersuchungen über Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden folgen zu lassen, welche die von Herrn Poincaré auf diesem Gebiete erzielten Resultate in mannigfacher Weise ergänzen werden.

Frankfurt a. M., im März 1882.

Ueber eindeutige Functionen mit linearen Substitutionen in sich.

(Zweite Mittheilung.)

Von

Felix Klein in Leipzig.

Der allgemeine Satz, welchen ich in meiner ersten unter gleichem Titel erschienenen Note (diese Annalen XIX, p. 565—568) mitgetheilt habe, gehört als einzelnes Glied in eine ganze Kette ähnlicher Theoreme, bei denen es sich immer um unendlich viele lineare Substitutionen einer Variabelen η handelt, welche einen ursprünglichen, auf der η-Kugel gegebenen Bereich, der das Bild einer zerschnittenen Riemann'schen Fläche ist, in der Art reproduciren, dass je nachdem entweder die Gesammtkugel oder nur eine von einer Ebene begrenzte Kugelcalotte von den Reproductionen einfach und vollständig überdeckt wird. Ich will dementsprechend einen Augenblick von η-Functionen der ersten und der zweiten Art sprechen. Dann ist das einfachste Resultat, welches ich bis jetzt in dieser Richtung gewonnen habe, für $p > 1$ durch folgenden Satz gegeben:

*Unter allen auf einer Riemann'schen Fläche existirenden unverzweigten Functionen giebt es immer eine und nur eine**) *η-Function der zweiten Art. Alle anderen unverzweigten Functionen sind eindeutige Functionen dieses η.*

Dabei beachte man, dass zu diesen unverzweigten Functionen nicht nur die zur Riemann'schen Fläche gehörigen algebraischen, überhaupt die eindeutigen Functionen zu rechnen sind, sondern z. B. auch die Integrale erster und zweiter Gattung, sodann die ∞^{3p-3} in meiner vorigen Mittheilung besprochenen ξ-Functionen etc. —

Ich will dabei, um eine Anschauung vom Verlaufe dieser η-Func-

*) Von linearen Transformationen, denen man η unterwerfen mag, wird dabei natürlich abgesehen.

tion zu geben, an die Tafel erinnern, welche meiner Arbeit über Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen (diese Annalen Bd. XIV, p. 428 ff.) beigegeben ist. Die betreffende Zeichnung versinnlicht genau die hier in Rede stehende η-Function für die dort in Betracht gezogene Fläche $p = 3$. Die in bestimmter Weise*) zerschnittene Fläche wird durch das in der η-Ebene gelegene Vierzehneck der Figur abgebildet. In ähnlicher Weise kann vermöge der zugehörigen η-Function jede Fläche $p = 3$ durch ein Kreisbogen-Vierzehneck repräsentirt werden. Nur wird dasselbe im Allgemeinen in keiner Weise regulär sein. Die Zerlegung des in der Figur gegebenen Vierzehnecks in 168 schraffirte und ebensoviele nicht schraffirte Kreisbogendreiecke ist nur das Aequivalent dafür, dass die dort in Betracht gezogene Fläche $p = 3$ 168 directe und ebensoviele inverse eindeutige Transformationen in sich gestattet**).

Es kann hier nicht die Aufgabe sein, die Tragweite des hiermit ausgesprochenen Satzes noch besonders zu schildern. Ich will nur bemerken, dass für $p = 1$ unser η durch einen leicht zu verstehenden Grenzübergang in das zugehörige Integral erster Gattung übergeht, so dass also umgekehrt unser η als die richtige Generalisation jenes Integrals für den Fall eines beliebigen p erscheint.

Es ist übrigens sehr einfach, den vorstehenden Satz noch so zu generalisiren, dass auch solche auf der Riemann'schen Fläche existirende Functionen eindeutig darstellbar werden, welche, in übrigens beliebiger Weise, an *vorgegebenen* Stellen $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\nu$ verzweigt sind. *Es giebt nämlich immer eine und nur eine η-Function der zweiten Art, welche in $Q_1, Q_2, \cdots, Q_\nu$ logarithmisch verzweigt ist****), andere Verzweigungspunkte aber nicht besitzt.*

Der so erweiterte Satz gilt nun auch ungehindert für $p = 1$ und, falls $\nu > 2$, für $p = 0$. Im letzteren Falle wird unser η mit derjenigen Function identisch, welche Herr Poincaré in Nr. 10. und 11. seiner Annalenarbeit†) benutzt, und die für $\nu = 3$ die Modul-

*) Nämlich durch sieben, zwei bestimmte Flächenpunkte verbindende Querschnitte.

**) Ich habe dabei eine Uebereilung zu corrigiren, die sich in meine vorige Note eingeschlichen hat. Für die jetzt (im Texte) besprochene η-Function gilt allgemein, dass η eine lineare Transformation erfährt, sobald man die ursprüngliche Riemann'sche Fläche durch eine eindeutige Umformung in sich überführt. Dagegen ist dies für die damals besprochene η-Function nur so lange richtig als die betreffende eindeutige Transformation das dort in Betracht kommende System der Rückkehrschnitte in ein äquivalentes überführt. Auf die Construction symmetrischer Flächen, wie ich sie damals gab, hat diese Bemerkung keinen Einfluss.

***) D. h. so, wie etwa $\log z$ für $z = 0$.

†) Siehe Bd. XIX, pag. 561, 562.

function*) $\omega(\varkappa^2)$ als speciellen Fall umfasst, während die gewöhnliche Logarithmusfunction ein der Annahme $\nu = 2$ entsprechender Grenzfall ist. Man kann, wie ich beiläufig bemerken will, mit Hülfe dieser Function die allgemeine Aufgabe lösen: zu einer Riemann'schen Fläche, die mehrblättrig über der z-Ebene gegeben ist, die zugehörige algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$ zu finden. Denn ein beliebiges zu verwendendes w wird eine eindeutige Function desjenigen auf die z-Ebene bezüglichen η sein, dessen Verzweigungspunkte mit denen der Riemann'schen Fläche zusammenfallen, und zwar eine eindeutige Function, welche bei allen linearen Substitutionen des η ungeändert bleibt, die unter jenen Substitutionen, welche z invariant lassen, als bestimmte durch die Gestalt der Riemann'schen Fläche definirte Untergruppe enthalten sind.

Düsseldorf, den 27. März 1882.

*) ω ist das Periodenverhältniss des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{x \cdot 1 - x \cdot 1 - \varkappa^2 x}}$.

Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaires.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. F. Klein.)

Par

H. Poincaré à Paris.

. . . Vous avez eu dernièrement la bonté de faire insérer aux Mathematische Annalen*) mon travail sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires et vous l'avez fait suivre d'une note où vous exposez les raisons qui vous font trouver peu convenables les noms que j'ai donnés à ces transcendantes. Permettez-moi de vous adresser quelques lignes pour défendre mes dénominations, que je n'ai pas choisies au hasard**).

Si j'ai cru devoir donner aux fonctions nouvelles le nom de M. Fuchs, ce n'est pas que je méconnaisse la valeur des travaux de M. Schwarz et des vôtres; je suis le premier, au contraire, à en apprécier la haute importance. Mais il ne m'était pas possible d'oublier les découvertes si remarquables que le savant professeur de Heidelberg a publiées dans le Journal de Crelle. Elles sont le fondement de la théorie des équations linéaires et, sans elles, je n'aurais pu aborder l'étude de mes transcendantes qui se lient si directement à cette théorie. Dans ses premiers travaux, M. Fuchs se place, il est vrai, à un point de vue un peu différent du mien et ne se préoccupe ni de la discontinuité des groupes, ni de l'uniformité des fonctions. Mais M. Schwarz, dans ses mémoires des tomes 70 et 74 du Journal de

*) t. XIX, p. 553—564.

**) Herrn Poincaré's Darlegungen habe ich nur hinzuzufügen, dass ich für mein Theil allerdings nach wie vor an der Auffassung festhalte, der ich auf p. 564 des XIX. Annalenbandes Ausdruck gegeben habe. Dabei will ich nicht unterlassen, ausdrücklich auf die Note aufmerksam zu machen, mit welcher Herr Fuchs von sich aus dem auf ihn bezüglichen Passus meiner Auseinandersetzung entgegengetreten ist (cf. Göttinger Nachrichten vom 4. März 1882).

Düsseldorf, den 2. April 1882.

F. Klein.

Crelle, ne s'en préoccupe pas non plus; il en dit quelques mots dans un cas très particulier, dans le mémoire du tome 75 que j'ai cité dans ma note. C'est là seulement qu'il se trouve: „auf dem Gebiete der fonctions fuchsiennes." Dans vos belles recherches sur les fonctions modulaires, votre façon d'envisager les choses différait peu de la mienne, mais vous aviez plutôt en vue alors l'étude des fonctions elliptiques, que celle des équations linéaires. Quant à M. Fuchs, dans ses mémoires des tomes 83 et 89 du Journal de Crelle, il s'est élevé à un point de vue nouveau et a mis en lumière le lien étroit qui unit la théorie des équations différentielles à celle de certaines fonctions uniformes. Ce fut la lecture de ces mémoires qui devint le point de départ de mes recherches.

En ce qui concerne les fonctions Kleinéennes, j'aurais due commettre une injustice, si je leur avais donné un autre nom que le votre. C'est M. Schottky qui a découvert la figure qui faisait l'objet de votre lettre, mais c'est vous qui avez: „ihre principielle Wichtigkeit betont", comme vous dites à la fin de votre savant travail: „Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich".

Quant à ce que vous dites de Riemann, je ne puis qu'y souscrire pleinement. C'était un de ces génies qui renouvellent si bien la face de la science qu'ils impriment leur cachet, non seulement sur les oeuvres de leurs élèves immédiats, mais sur celles de tous leurs successeurs pendant une longue suite d'années. Riemann a créé une théorie nouvelle des fonctions, et il sera toujours possible d'y retrouver le germe de tout ce qui s'est fait et se fera après lui en analyse mathématique. . . .

Paris, le 30. Mars 1882.

Ueber Multiplicatorgleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

Von

M. Krause in Rostock.

Ausser den Modulargleichungen bietet die Theorie der elliptischen Functionen noch andere Gleichungen dar, unter welchen die Multiplicatorgleichungen einen hervorragenden Platz einnehmen. Es soll im Folgenden auf analoge Gleichungen im Gebiete der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung aufmerksam gemacht werden. Hierbei beschränkt sich der Verfasser auf den Fall, dass der Grad der Transformation eine ungerade Primzahl ist, er sieht ferner einstweilen von einem jeden Versuch ab, die bei den elliptischen Functionen in neuester Zeit entwickelten allgemeinen Theorien auf die hyperelliptischen zu übertragen.

§ 1.

Setzt man nach Rosenhain:

$$\frac{\vartheta_1^2(v,w)}{\vartheta_0^2(v,w)} = \varkappa\lambda\mu x_1 x_2 \text{ etc.},$$

so wird:

$$dv = \frac{B - Cx_1}{\sqrt{(x_1 \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_1 + \frac{B - Cx_2}{\sqrt{(x_2 \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_2,$$

$$dw = \frac{B_1 - C_1 x_1}{\sqrt{(x_1 \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_1 + \frac{B_1 - C_1 x_2}{\sqrt{(x_2 \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_2.$$

Das Vorzeichen der Wurzeln lassen wir unbestimmt, dann ist:

$$2B = \frac{\vartheta_3'(w)_0}{i\pi\vartheta_{34}\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_5}, \quad 2B_1 = -\frac{\vartheta_3'(v)_0}{i\pi\cdot\vartheta_{34}\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_5},$$

$$2C = \sqrt{\varkappa\lambda\mu}\,\frac{\vartheta_{24}'(w)_0}{i\pi\vartheta_{34}\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_5}, \quad 2C_1 = -\sqrt{\varkappa\lambda\mu}\,\frac{\vartheta_{24}'(v)_0}{i\pi\cdot\vartheta_{34}\cdot\vartheta_4\cdot\vartheta_5}.$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\vartheta_3'(v)_0\vartheta_{24}'(w)_0 - \vartheta_3'(w)_1\vartheta_{24}'(v)_0 = \pi^2\vartheta_{12}\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_{14}$$

ist, so folgt, wenn überdies für $\sqrt{\varkappa\lambda\mu}$ sein Werth eingesetzt wird:

$$B_1C_- - C_1B = \frac{\vartheta_{01}\cdot\vartheta_{12}\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_{14}}{\vartheta_{34}^3\cdot\vartheta_4^3\cdot\vartheta_5^3}.$$

Wir wollen nun setzen:

$$u_1 = 2K_{11}v + 2K_{12}w,$$
$$u_2 = 2K_{21}v + 2K_{22}w$$

und die Grössen K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} so bestimmen, dass wird:

$$du_1 = \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1\varkappa\lambda\mu)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2\varkappa\lambda\mu)}},$$

$$du_2 = \frac{x_1dx_1}{\sqrt{(x_1\varkappa\lambda\mu)}} + \frac{x_2dx_2}{\sqrt{(x_2\varkappa\lambda\mu)}}.$$

Dann folgt:

$$4(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}) = \frac{1}{B_1C - C_1B},$$

oder also:

$$4(K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}) = \frac{\vartheta_{34}^3\cdot\vartheta_4^3\cdot\vartheta_5^3}{\vartheta_{01}\cdot\vartheta_{12}\cdot\vartheta_{23}\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_{03}\cdot\vartheta_0\cdot\vartheta_{14}}.$$

§ 2.

Wir gehen jetzt zu der Transformation n^{ter} Ordnung über und zwar unter der Voraussetzung, dass n eine ungerade Primzahl ist.

Dann gehen für die Transformation $(a_0b_1c_2d_3)$ die ursprünglichen Argumente der Thetafunctionen v, w über in zwei neue v', w', für welche ist:

$$v' = (a_0 + a_3\tau_{11}' + a_2\tau_{12}')\,v + (b_0 + c_3\tau_{11}' + b_2\tau_{12}')\,w,$$
$$w' = (a_1 + a_3\tau_{21}' + a_2\tau_{22}')\,v + (b_1 + b_3\tau_{21}' + b_2\tau_{22}')\,w.$$

Setzen wir daher:

$$A_0 = a_0 + a_3\tau_{11}' + a_2\tau_{12}', \qquad A_1 = a_1 + a_3\tau_{21}' + a_2\tau_{22}',$$
$$B_0 = b_0 + b_3\tau_{11}' + b_2\tau_{12}', \qquad B_1 = b_1 + b_3\tau_{21}' + b_2\tau_{22}',$$
$$u_1 = 2K_{11}v + 2K_{12}w, \qquad u_1' = 2C_{11}v' + 2C_{12}w',$$
$$u_2 = 2K_{21}v + 2K_{22}w, \qquad u_2' = 2C_{21}v' + 2C_{22}w',$$

so wird für dieselbe Transformation:

$$u_1' = M_0u_1 + M_1u_2,$$
$$u_2' = M_2u_1 + M_3u_2.$$

Setzen wir daher:

$$M_0M_3 - M_1M_2 = M, \qquad A_0B_1 - B_0A_1 = A,$$

so folgt:

$$M = A \frac{C_1 C_{23} - C_{23} \cdot C_{23}}{K_{23} K_{23} - K_{23} \cdot K_{23}}.$$

oder wenn wir die transformirten Thetafunctionen durch grosse Buchstaben von den ursprünglichen unterscheiden:

$$M = A \frac{\Theta_{34}^3 \cdot \Theta_4^3}{\vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_4^3} \frac{\Theta_3^3}{\vartheta_3^3} \cdot \frac{\vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23}}{\Theta_{12} \cdot \Theta_{23}} \frac{\vartheta_{23} \cdot \vartheta_2}{\Theta_{23} \cdot \Theta_2} \frac{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_1}{\Theta_{01} \cdot \Theta_1} \frac{\vartheta_{34} \cdot \vartheta_4}{\Theta_{34} \cdot \Theta_4}.$$

Nun lassen sich andererseits, wie Hermite gezeigt hat, die transformirten Functionen $\frac{\vartheta\,v', w'_2}{\vartheta\,v', w'_1}$ und $\frac{\vartheta\,v', w'_3}{\vartheta\,v', w'_1}$ als rationale Functionen der Grössen $\frac{\vartheta\,v, w_\alpha}{\vartheta\,v, w_0}$ ($\alpha = 3, 02, 23$ und gewisser Constanten $1, 2, 3 \cdots$ darstellen.

Setzen wir daher:

$$\frac{\vartheta\,v', w'_2}{\vartheta\,v', w'_1} = f(v, w)_3,$$
$$\frac{\vartheta\,v', w'_3}{\vartheta\,v', w'_1} = f(v, w)_{02},$$

so folgt durch Differentiation:

$$A = \frac{D}{D_1},$$

wenn D die Functionaldeterminante von $f(v, w)_3$, $f(v_1, w)_{02}$ und D_1 die Functionaldeterminante von $\frac{\vartheta(v', w')_3}{\vartheta\,v', w'_2}$, $\frac{\vartheta(v', w')_{02}}{\vartheta\,v', w'_3}$ bedeutet. Diese Gleichung gilt für alle Werthe von v und w.

Setzen wir in ihr $v = 0$, $w = 0$, mithin auch $v' = 0$, $w' = 0$ und berücksichtigen, dass:

$$\vartheta_{02}'(v)_0\, \vartheta_3'(w)_0 - \vartheta_{02}'(w)_0\, \vartheta_3'(v)_0 = \pi^2 \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4$$

ist, so folgt:

$$A = \frac{\vartheta_{12} \cdot \vartheta_{34} \cdot \vartheta_{01} \cdot \vartheta_4}{\Theta_{12} \cdot \Theta_{34} \cdot \Theta_{01} \cdot \Theta_4} \frac{\Theta_0^2}{\vartheta_0^2} F,$$

wo F eine rationale Function der Grösse $\frac{\vartheta_{23}}{\vartheta_0}$ und der Constanten $1, 2, 3, \cdots$ ist.

Setzen wir diesen Werth von A in die Gleichung für M ein, so folgt der

Lehrsatz:

Für eine jede Transformation n^{ter} Ordnung ist die Grösse M eine rationale Function den Grössen $\frac{\Theta_\alpha}{\Theta_0}$, $\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta_0}$ und der Constanten $1, 2, 3, \cdots$. Hierbei kann α den Index einer jeden geraden Thetafunction bedeuten.

Aus den angestellten Betrachtungen folgt, dass die Grösse M für eine jede lineare Transformation, für welche die Diagonalglieder ungerade, alle anderen gerade sind, der Einheit gleich wird.

In der That, sehen wir von den Factoren ab, die bei der linearen Transformation bei allen Thetafunctionen gemeinsam auftreten, so geht für eine solche Transformation $(a_0 b_1 c_2 d_3) A$ über in $(-1)^{\frac{i\pi}{2}(a_0-1)+\frac{i\pi}{2}(b_1-1)}$. Dasselbe gilt von dem Factor

$$\frac{0_{34}^3 \cdot 0_4^3 \cdot 0_5^3}{\vartheta_{34}^3 \cdot \vartheta_4^3 \cdot \vartheta_5^3} \cdot \frac{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{12} \cdot \vartheta_{23} \cdot \vartheta_2 \cdot \vartheta_{03} \cdot \vartheta_0 \cdot \vartheta_{14}}{0_{01} \cdot 0_{12} \cdot 0_{23} \cdot 0_2 \cdot 0_{03} \cdot 0_0 \cdot 0_{14}},$$

mithin wird, da die gemeinsamen Factoren sich fortheben,

$$M = 1.$$

§ 3.

Wir führen jetzt Repräsentanten ein und zwar nach Königsberger die Grössen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & i(\alpha n+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} n & i(\alpha n+1) & 0 & i'(\alpha n+1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & -i(\alpha n+1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} n & 0 & i(\alpha n+1) & i'(\alpha n+1) \\ 0 & n & i''(\alpha n+1) & i(\alpha n+1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

wo α eine Lösung der Congruenz ist:

$$\alpha n \equiv -1 \bmod. 8.$$

Nennen wir die zu einem beliebigen Repräsentanten gehörende Grösse $M : M_i$, so folgt aus dem Lehrsatze des vorigen Paragraphen, dass M_i eine algebraische Function der Grössen $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 ist, da dasselbe von den Grössen $\frac{0_\alpha}{0_0}$, $\frac{\vartheta_\alpha}{\vartheta_0}$ und den Constanten $1, 2, 3, \cdots$ gilt.

Mithin sind auch alle Potenzsummen $\sum_i M_i^\alpha$ — erstreckt über alle repräsentirenden Werthe M — algebraische Functionen von $\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2$.

Sei nun $(a_0 b_1 c_2 d_3)$ eine beliebige Transformation erster Ordnung, für welche die Diagonalglieder alle ungerade, die übrigen Glieder alle gerade sind, sei ferner $(u_0 v_1 w_2 x_3)$ ein beliebiger Repräsentant, dann findet stets eine Gleichung

$$(a_0 b_1 c_2 d_3)\,(u_0 v_1 w_2 x_3) = (u_0' v_1' w_2' x_3')\,(a_0' b_1' c_2' d_3')$$

statt, in welcher die erste Determinante rechts einen Repräsentanten, die zweite eine lineare Transformation derselben Art, wie die ursprüngliche darstellt.

Wir wollen die beiden zu den Repräsentanten links und rechts gehörenden Grössen M durch M_i und $M_{i'}$ bezeichnen. Dann folgt unter Hinzunahme der letzten Bemerkungen des vorigen Paragraphen, dass der Ausdruck für M_i in den Ausdruck für $M_{i'}$ übergeht, wenn in ihm die Grössen τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} durch Grössen τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}' ersetzt werden, welche durch die ursprüngliche lineare Transformation aus τ_{11}, τ_{12}, τ_{22} entstanden sind. Mithin sind die Potenzsummen $\sum_i M_i^\alpha$ algebraische Functionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2, die für eine jede lineare Transformation ungeändert bleiben, für welche die Diagonalglieder ungerade, alle übrigen gerade sind.

Derartige Functionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 sind aber eindeutige Functionen.

Mithin ergiebt sich, dass sämmtliche Potenzsummen $\sum_i M_i^\alpha$ eindeutige Functionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 sind.

Hieraus wiederum ergiebt sich mit Hülfe weniger Schlüsse der

Lehrsatz:

Die Grössen M_i sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung $1 + n + n^2 + n^{3\,ten}$ Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von $\varkappa^2$, λ^2, μ^2 sind.

Die Eigenschaften dieser Gleichungen sind aus dem Früheren leicht zu ersehen. Der Verfasser glaubt von ihrer Aufstellung absehen zu dürfen.

Rostock, den 21. Januar 1882.

Note über die algebraischen Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen.

Von

M. Noether in Erlangen.

Unter eindeutiger Transformation ist hier eine solche Transformation verstanden, die rational und eindeutig umkehrbar ist. Dass keine algebraischen Curven von einem Geschlecht $p > 1$ existiren, welche unendlich viele solcher Transformationen in sich zulassen, hat Schwarz im 87. Band von Crelle's Journal auf functionentheoretischem Wege bewiesen. Einen algebraischen Beweis dieses Satzes hat Hettner (Gött. Nachr. 1880) versucht, indem er sich auf Entwicklungen stützt, die Weierstrass als Grundlage seiner Vorlesungen über Abel'sche Functionen giebt; aber während der Gedanke dieses Beweises richtig ist, enthält der Schluss in Nr. 4. desselben eine Lücke. Da nun dieser Beweis einerseits sich nach bekannten Sätzen kurz darstellen, andererseits die noch bestehende Lücke sich einfach ergänzen lässt, so sei der vollständige Beweis unter Auseinanderhaltung der einzelnen Schritte in 1.—8. hier mitgetheilt.

1. Es existirt der Satz, dass bei einer eindeutigen Transformation einer irreduciblen algebraischen Gleichung $f(s, z) = 0$ in eine ebensolche Gleichung $F(\sigma, \zeta) = 0$ *ausnahmslos* stetig aufeinanderfolgende Werthsysteme (s, z) in stetig aufeinanderfolgende (σ, ζ), getrennte Werthsysteme (s, z) in getrennte (σ, ζ) übergehen. Einer rationalen Function $\psi(s, z)$ also, die in genau μ aufeinanderfolgenden Werthsystemen einen gegebenen Werth λ annimmt (d. h. für welche $\psi - \lambda$ in (s_0, z_0) genau in der Ordnung μ verschwindet), entspricht eine rationale Function $\Psi(\sigma, \zeta)$, die ebenfalls in genau μ aufeinanderfolgenden Werthsystemen den Werth λ hat.

2. Für die eindeutige Transformation von f in F in 1. existirt weiter der Satz*), dass die Gesammtheit der Verhältnisse der zu f adjungirten ganzen rationalen Functionen φ von s, z übergeht in die Gesammtheit der Verhältnisse der zu F adjungirten Functionen φ von σ, ζ. Solche Verhältnisse existiren erst von $p = 2$ an.

3. Man hat ferner den Satz**), dass es bei keiner algebraischen irreduciblen Gleichung $f(s, z) = 0$, vom Geschlecht p, eine unendliche Zahl von Werthsystemen (s_0, z_0) giebt, derart, dass eine rationale

*) Für die Bezeichnung „φ" vgl. Riemann, Abel'sche Functionen; für den Satz Brill und Noether, „Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie", Math. Ann. VII, pag. 283.

**) Einen algebraischen Beweis desselben wird der Verf. an anderer Stelle geben.

Function $\psi(s, z)$ existirte, die in einer solchen Stelle (s_0, z_0) in der p^{ten} oder niedrigeren Ordnung verschwände, ohne in weiteren Stellen zu verschwinden. Die Zahl derartiger Werthsysteme (s_0, z_0) ist vielmehr*) gleich $(p-1)p(p+1)$, wobei dieselben indessen auch je zu mehreren an eine Stelle zusammenfallen können. Für $p > 1$ ist die Zahl der Stellen (s_0, z_0) also eine endliche, von 0 verschiedene. Dass die endliche Zahl der Stellen (s_0, z_0) für $p > 1$ von 0 verschieden ist, kann man auch daraus folgern, dass dies für einen speciellen Fall, den hyperelliptischen, bekannt ist. — Eine derartige Function $\psi(s, z)$ ist als Quotient zweier Functionen φ darstellbar.

4. Die Eigenschaften 1. und 2. bleiben auch bei einer eindeutigen Transformation von $f(s, z) = 0$ in sich selbst bestehen. Die in 3. genannten speciellen Stellen (s_0, z_0) von $f(s, z) = 0$ können also hierbei nur wieder in ebensolche von $f(s, z) = 0$ übergehen.

5. Existiren unendlich viele eindeutige Transformationen, welche $f(s, z) = 0$ in sich überführen, so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Parameter der Transformationen in die Transformationsformeln *algebraisch* eingehen.

Denn sei $f(s, z) = 0$ gegeben, und etwa von der Gesammtordnung n; sei ferner die allgemeinste eindeutige Transformation, welche $f(s, z) = 0$ in sich überführt, von der Form:

$$\sigma : \zeta : 1 = \chi_1(s, z) : \chi_2(s, z) : \chi_3(s, z),$$

so kann man zunächst die χ_1, χ_2, χ_3 als ganze rationale Functionen von s, z annehmen, die zu $f(s, z) = 0$ adjungirt und höchstens von der Ordnung $n - 2$ sind**). Aus der Bedingung, dass das Resultat der Elimination von s, z zu $f(\sigma, \zeta) = 0$ werden soll, ergiebt sich eine Anzahl *algebraischer* Gleichungen zwischen den Coefficienten der Transformationsformeln und den gegebenen Constanten von $f(s, z) = 0$.

Nun lässt sich nach der Eliminationstheorie jedes algebraische Problem, das auf eine Anzahl von t algebraischen Gleichungen zwischen τ Variablen führt, und das überhaupt Auflösungen zulässt, derart auflösen, dass man als Eliminationsresultat eine, irreducible oder reducible, algebraische Gleichung zwischen τ' der Variablen erhält, wo $\tau \geq \tau' > 0$, während zu jedem irreduciblen Factor dieser Gleichung die übrigen Variablen entweder ganz beliebig werden oder sich als *rationale* Functionen dieser und der τ' Variablen darstellen lassen***). Die τ Variablen werden also *algebraische* Functionen einer Anzahl von Parametern und der Constanten des Problems. Dasselbe muss daher

*) Siehe Brill und Noether, Mathem. Ann. VII, pag. 302.

**) Siehe Brill und Noether, Mathem. Ann. VII, pag. 278.

***) Vgl. z. B. des Verf. Note „zur Eliminationstheorie" in Mathem. Ann. Bd. XI.

auch, wie behauptet, für die Coefficienten der Transformationsformeln eintreten.

6. Ueber die Form, in welcher die Parameter der Transformationen in 5. eingehen, kann man noch Näheres aussagen.

Sei ϱ einer der Parameter, und seien die etwaigen übrigen als constant betrachtet. Da ϱ algebraisch in die Coefficienten der Transformation eingeht, kann man auch sagen, dass dieselben rationale Functionen zweier Grössen ϱ, ϱ' sind, zwischen welchen eine algebraische Gleichung

$$F(\varrho, \varrho') = 0$$

besteht. Durch ein Werthsystem (ϱ, ϱ'), das dieser Gleichung genügt, ist eine der Transformationen eindeutig bestimmt, und man kann dieselbe auf irgend eines der Werthsysteme (s, z) von $f(s, z) = 0$ anwenden.

Nimmt man nun ein beliebiges, *nicht* speciell gewähltes, Werthsystem (s', z') von $f(s', z') = 0$ fest an und wendet auf dieses die Gesammtheit der Transformationen an, welche durch $F(\varrho, \varrho') = 0$ gegeben werden, so werden die Grössen s, z des transformirten Werthsystems rationale Functionen von $s', z', \varrho, \varrho'$; d. h. $f(s, z) = 0$ *gehört zur selben algebraischen Classe wie* $F(\varrho, \varrho') = 0$; und das (s', z') entsprechende Werthsystem (s, z) durchläuft, bei stetiger Aenderung von ϱ, auch stetig unendlich viele Werthsysteme (s, z) von $f(s, z) = 0$; also, wegen der Irreducibilität von $f(s, z) = 0$, *alle* solche.

Die Transformation (ϱ, ϱ'), welche das feste Werthsystem (s', z') in irgend ein anderes (s'', z'') von $f(s, z) = 0$ überführt, lässt sich eindeutig umkehren. Auch diese einfach unendlich vielen umgekehrten Transformationen, welche auch in den obigen (ϱ, ϱ') schon enthalten sein können, seien mit betrachtet.

7. Die Transformationen (ϱ, ϱ') in 6. und deren Umkehrungen führen nach 4. ein specielles Werthsystem (s_0, z_0) von 3. nur wieder in solche über. Da aber die stetig aufeinanderfolgenden Transformationen 6. aus irgend einem gegebenen Werthsystem nur stetig aufeinanderfolgende Werthsysteme liefern können und die speciellen Werthsysteme (s_0, z_0) getrennt liegen, so können dieselben sämmtlich (s_0, z_0) nur in ein und dasselbe analoge Werthsystem (s_0', z_0') überführen, und die Umkehrungen ebenso (s_0, z_0) nur in *ein* solches (s_0'', z_0'').

8. Sei (s', z'), wie in 6., ein beliebiges, *nicht* speciell gewähltes Werthsystem von $f(s, z) = 0$, also auch kein System (s_0, z_0). Durch die Transformationen (ϱ, ϱ') kann (s', z') nach 6. in irgend ein beliebiges Werthsystem (s, z) von $f(s, z) = 0$ übergeführt werden, also auch beliebig nahe in ein specielles (s_0, z_0), daher, wegen der Stetigkeit von $F(\varrho, \varrho') = 0$ und $f(s, z) = 0$, in (s_0, z_0) selbst. Die Um-

kehrung dieser Transformation muss dann (s_0, z_0) in (s', z') überführen, was aber nach 7. unmöglich ist.

Daher ist der Satz bewiesen, dass für $p > 1$ nicht eine Schaar von eindeutigen Transformationen existiren kann, welche $f(s, z) = 0$ in sich überführen*).

9. Dass für $p = 1$ einfach unendlich viele eindeutige Transformationen existiren, welche $f(s, z) = 0$ in sich überführen, sieht man so:

Sei $\frac{\alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2}{\psi_0}$ eine rationale Function von s, z, welche in 3 Werthsystemen von $f(s, z) = 0$ unendlich wird. Wenn nun für das beliebig gewählte Werthsystem (s', z') von $f(s, z) = 0$

$$\beta_0\psi_0(s', z') + \beta_1\psi_1(s', z') + \beta_2\psi_2(s', z') = 0,$$
$$\gamma_0\psi_0(s', z') + \gamma_1\psi_1(s', z') + \gamma_2\psi_2(s', z') = 0$$

werden, so hat man in

$$\Psi = \frac{\gamma_0\psi_0 + \gamma_1\psi_1 + \gamma_2\psi_2}{\beta_0\psi_0 + \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2}$$

eine Funetion, welche in nur 2 Werthsystemen von $f(s, z) = 0$ irgend einen gegebenen Werth λ erhält. Die Transformation nun, welche je zwei solche Werthsysteme, die den verschiedenen Werthen von λ entsprechen, in einander überführt, ist eine eindeutige Transformation von $f(s, z) = 0$ in sich selbst. Die einfach unendlich vielen Transformationen entstehen hieraus, indem man (s', z') als willkürliche Parameter der Transformation betrachtet, die nur der Gleichung $f(s', z') = 0$ genügen; der Parameter geht also so ein, wie in 5. und 6. gezeigt wurde. — Eine weitere Schaar mit einem solchen Parameter $0'$ entsteht so: man nehme zwei Werthsysteme, 0 und $0'$, auf f fest an; und lasse dann je zwei solche Werthsysteme 1 und $1'$ sich entsprechen, für welche eine rationale Function Ψ_1 existirt, die nur in $0'$ und 1 unendlich wird und in 0 und $1'$ verschwindet.

Für $p = 0$ erhält man die dreifach unendlich vielen eindeutigen Transformationen, welche $f(s, z) = 0$ in sich überführen, indem man s, z als rationale Functionen eines Parameters λ ausdrückt und dann alle linearen Functionen von λ an Stelle von λ setzt.

Erlangen, 4. März 1882.

*) Die Lücke des Hettner'schen Beweises lässt sich so bezeichnen, dass derselbe unmittelbar nach 1. und 3. annahm, dass ein (s_0, z_0) entsprechendes Werthsystem vom Parameter ϱ abhängig sei, statt die in 7. genannte Möglichkeit zu untersuchen.

Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.

Von

Herrmann Hankel †.

(Abdruck aus dem Gratulationsprogramm der Tübinger Universität vom 6. März 1870*)).

— — —

Einleitende Bemerkungen über den Functionsbegriff.

Nicht allein entschiedene Vorliebe für die Synthese und gänzliche Verleugnung allgemeiner Methoden charakterisirt die antike Mathematik gegenüber unserer neueren Wissenschaft; es giebt neben diesem mehr äusserem, formalen, noch einen tiefliegenden realen Gegensatz, welcher aus der verschiedenen Stellung entspringt, in welche sich beide zu der wissenschaftlichen Verwendung des Begriffes der *Veränderlichkeit* gesetzt haben.

Denn während die Alten den Begriff der Bewegung, des räumlichen Ausdruckes der Veränderlichkeit, aus Bedenken, die aus der philosophischen Schule der Eleaten auf sie übergegangen waren, in ihrem strengen Systeme niemals und auch in der Behandlung phoronomisch erzeugter Curven nur vorübergehend verwenden, so datirt die neuere Mathematik von dem Augenblick, als Descartes von der rein algebraischen Behandlung der Gleichungen dazu fortschritt, die Grössenveränderungen zu untersuchen, welche ein algebraischer Ausdruck erleidet, indem eine in ihm allgemein bezeichnete Grösse eine stetige Folge von Werthen durchläuft.

---

*) Indem wir die letzte Arbeit von Herrmann Hankel, welche bisher durch die Art ihrer Veröffentlichung nur schwer zugänglich war, erneut zum Abdruck bringen, rechnen wir auf den Dank des mathematischen Publicums; wird doch auf dieselbe bei fast allen neueren Untersuchungen über den Functionsbegriff zurückgegangen! Dabei wird man es nur billigen, dass wir den Abdruck durchaus wörtlich gestalteten und also die Incorrectheiten, welche die Arbeit im Einzelnen enthalten mag, als nebensächlich betrachteten.

Die Red. d. math. Annalen.

Die Abhängigkeit, in welcher hienach die Werthreihen zweier veränderlicher Grössen stehen, findet ihren anschaulichen Ausdruck in dem Verhältniss der Ordinate zur Abscisse einer krummen Linie, und bedurfte so lange keines besonderen Terminus, als man sich auf die Untersuchung specieller Fälle beschränkte.

Die Entdeckung des Infinitesimalcalculs aber mit seinen umfassenden Methoden drängte zu einer allgemeinen Bezeichnung dieses Abhängigkeitsverhältnisses, das nach Leibnitzens*) Vorgange Joh. Bernoulli**) im Jahre 1718 als „Function" bezeichnete.

Der Begriff der Function ist von da an der fundamentale Ausgangspunkt für die Analysis geworden, deren epochemachenden Fortschritte auf's Engste mit der Ausbildung zusammenhängen, welche er allmählich erlitten hat.

Euler, der das wissenschaftliche Bewusstsein in der Mitte des vorigen Jahrhunderts am Vollständigsten vertritt, definirt in wesentlicher Uebereinstimmung mit seinen Vorgängern***):

„Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus."

Wir haben uns unter einem solchen „*analytischen Ausdruck*", dessen Bedeutung Euler näher zu bestimmen nicht für nöthig hält, nichts anderes zu denken, als eine nach dem Typus algebraischer Functionen gebildete Grössenabhängigkeit. Denn die transcendenten Functionen dachte man sich durch Entwickelungen bestimmt, welche aus einer unendlichen Anzahl von Elementaroperationen (Addition, Subtraction, Multiplication und Division) ebenso gebildet werden, als die algebraischen durch eine endliche Anzahl solcher, ohne dass man sich über die Zulässigkeit einer solchen grenzenlosen Fortsetzung der Operationen, Bedenken gemacht hätte. Zu jenen vier Species traten dann noch die Differentiation und Integration als die der Analysis eigenen Operationen hinzu.

Indem man sich immer an jenes Vorbild der algebraischen Functionen anlehnte, so übertrug man alle allgemeinen Eigenschaften, die man an den algebraischen Functionen bemerkte, ihre besondere Stetigkeit, ihre Singularitäten, ihre besondere Weise, unstetig oder unendlich zu werden, ohne Weiteres auf alle Functionen. Da man bei den algebraischen Functionen die Reihenentwickelung nach Potenzen eines Incrementes, den Differentialquotienten und das Integral direct ab-

*) Acta Erudit. 1692. April p. 170, und 1694. Juli p. 316.

**) Opera omnia. t. II. p. 241. Vergl. auch Leibnitii et Joh. Bernoullii commerc. epist. t. I. p. 386, und Jac. Bernoullii, Oper. omn. t. II. p. 788.

***) Introd. in an. inf. 1748. t. I. p. 4.

leiten konnte, so hielt man sich nicht nur für berechtigt, die Existenz einer solchen Reihe, des Differentialquotienten und Integrales ganz allgemein für alle Functionen anzunehmen, sondern man kam überhaupt nicht auf den Gedanken, dass hierin eine Behauptung, sei es nun als Axiom oder Theorem liegt, — so selbstverständlich erschien diese, von der geometrischen Anschauung der die Functionen repräsentirenden Curven scheinbar unterstützte Uebertragung der Eigenschaften algebraischer Functionen auf die Transscendenten; und Beispiele, in denen recht eigentlich analytische Functionen*) Singularitäten zeigten, die von denen der algebraischen Functionen wesentlich verschieden waren, blieben gänzlich unbeachtet.

Wenn beliebig gezeichnete Curven in irgend einer Beziehung von dem Verhalten algebraischer Curven abwichen, so nannte man sie**) „curvae discontinuae seu mixtae seu irregulares" im Gegensatze zu den in Einer Gleichung enthaltenen „curvae continuae", und war der Ueberzeugung, dass jene auf keine Weise durch eine analytische Gleichung darstellbar seien. Indem man jedoch die Abhängigkeit der Ordinate solcher Curven von der Abscisse als willkürliche Function in dem Problem der Saitenschwingungen einführte, ging man bereits über die eigentliche Definition des Functionsbegriffes hinaus und d'Alembert hatte Recht, wenn er behauptete, dies sei „contre les règles d'analyse"***).

In noch viel stärkerem Maasse aber geschah dies, indem man sich gedrängt sah, die für ein gewisses Intervall der Veränderlichen wohl definirten Functionen auf ein weiteres Gebiet auszudehnen, und Functionen für alle reellen Werthe des Argumentes zu bestimmen, wenn auch ihre ursprüngliche Definition nothwendig auf ein bestimmtes Gebiet beschränkt war. Das erste Beispiel einer solchen Fortsetzung war die Bestimmung der Logarithmen negativer Zahlen. Damit aber hatte man den Boden gänzlich verlassen, auf den man sich durch die Definition der functionellen Abhängigkeit gestellt hatte, und ein neues

*) Wie $\sin\frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$, $\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $\int_{1+e^{\frac{1}{x}}}^{x}\frac{dx}{}$ u. a. für $x = 0$. Zum Beweise des im Texte gesagten, diene z. B. d'Alembert Hist. de l'Acad. Berlin für 1747. p. 236.

**) Euler, Introd. in an. inf. t. II. p. 6.

***) Opusc. math. t. I. p. 32. Die ganze Polemik, die sich über das Problem de chordis vibrantibus zwischen d'Alembert, Euler, Dan. Bernoulli und Lagrange erhob, und uns vollständigen Einblick in die Anschauungen gewährt, die man damals mit dem Functionsbegriffe verband, ist in meisterhafter Weise von Riemann dargestellt worden (Ueb. d. Darstellbarkeit einer Function d. eine trigon. Reihe. 1867. Abh. d. Gött. Ges. t. 13. Art. 1).

Princip geschaffen, das ich etwa folgendermassen aussprechen zu können glaube:

> Wenn für ein Gebiet der Veränderlichen eine Entwickelung gegeben ist, welche nicht unmittelbar über die Grenzen desselben fortgesetzt werden kann, weil sie ausserhalb ihre Bedeutung verliert, wenn ferner für ein anderes Gebiet der Veränderlichen eine andere Entwickelung gegeben ist, welche in das erste Gebiet nicht fortgesetzt werden kann, und es keine für beide Gebiete gültige Entwickelung giebt, so sollen beide Entwickelungen als zu Einer Function gehörig angesehen werden, wenn die Function in jedem der beiden Gebiete dieselben *Eigenschaften* zeigt.

Dass man hiemit einen wesentlich neuen Functionsbegriff gesetzt hatte, konnte um so weniger bemerkt werden, als man niemals dieses Princip als solches erkannte, wenigstens nicht ausdrücklich formulirte, und so sah man sich denn auch nicht veranlasst, genauer zu untersuchen, welche Eigenschaften und Relationen zwischen den Functionswerthen dazu erforderlich seien, um die Einheit der functionellen Abhängigkeit in zwei verschiedenen analytischen Entwickelungen für verschiedene Grössengebiete zu verbürgen.

Eine ganze Reihe von unzureichend oder fehlerhaft erwiesenen, nicht genügend determinirten, sowie von durchaus falschen Sätzen*) legen genügendes Zeugniss davon ab, wie unsicher das Fundament war, auf das man die ganze Functionentheorie gebaut hatte.

Diese ganze Auffassung des Functionsbegriffes, die ich kurz als die Euler'sche bezeichnen werde, erhielt den ersten schweren Stoss im Jahre 1807 durch Fourier's bedeutende Entdeckung**), dass es möglich ist, durch periodische Reihen nicht nur *analytische*, etwa daneben in Potenzreihen entwickelbare Functionen (funct. continuae),

*) In dieser Beziehung erinnere ich nur an Lagrange's Beweis des Taylor'schen Lehrsatzes, wie er ihn noch 1813 (théor. d. fonct. 2 éd.) gab, und, dass Cauchy (Leç. sur le calc. diff. p. 105) 1829 „entdeckte", wie dieser Satz zuweilen „en défaut" ist; ferner daran, dass Gauss (Theor. d. res. funct. dem. tertia, art. 4) erst 1816 in bestimmter Weise auf die Unzulässigkeit einer Integration über unendliche Werthe der Function hinwies; dass erst 1826 Abel (Crelle, Journ. t. I. p. 311) eine richtige Bestimmung der Potenz und der binomischen Reihe lieferte, nachdem Poisson auf verschiedene Paradoxieen in dieser Beziehung aufmerksam gemacht, und sich Männer, wie Poinsot (Rech. sur l'analyse d. sections angul. 1825) und viele andere vergeblich mit deren Auflösung beschäftigt hatten; ich erinnere ferner an die vielfachen ungenügenden und fehlerhaften Versuche, die allgemeine Begriffsbestimmung der numerischen Facultäten für gebrochene und negative Werthe der Veränderlichen zu geben, die erst Weierstrass (Crelle, Journ. t. 51. p. 1) 1856 durch deren richtige Definition ersetzte, u. s. w. u. s. w.

**) Bull. d. scienc. p. l. soc. philomatique. t. I. p. 112.

sondern auch ganz beliebige, keinem einfachen Gesetz genügende, oder verschiedene Gesetze in ihren verschiedenen Theilen folgende Functionen (funct. discontinuae), die ich *illegitime* nennen werde, darzustellen.

Damit aber war, wie man, freilich zögernd anerkannte, der ganze ältere Begriff unmöglich geworden: Wenn jene functiones discontinuae auch durch analytische Ausdrücke darstellbar waren, so konnten die Eigenschaften algebraischer Functionen nicht mehr als typisch auf alle Transcendenten übertragen werden; und wenn eine und dieselbe Reihe für verschiedene aneinanderstossende Gebiete der Veränderlichen verschiedene analytische Gesetze repräsentiren konnte, so fiel das oben formulirte Princip der Fortsetzung in sich selbst zusammen.

Es blieb nur übrig, das Axiom, dass jene Eigenschaften der algebraischen Functionen, die sich auf ihre Stetigkeit, ihre Entwickelbarkeit in Potenzreihen u. s. w. beziehen, allen analytischen Functionen ebenfalls zukommen, und daher auch die Forderung, eine Function solle analytisch darstellbar sein, als eine bedeutungslose fallen zu lassen; und indem man so den Knoten zerhieb, folgende Erklärung zu geben:

> Eine Function heisst y von x, wenn jedem Werthe der veränderlichen Grösse x innerhalb eines gewissen Intervalles ein bestimmter Werth von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht.

Diese reine Nominaldefinition, der ich im Folgenden den Namen Dirichlet's beilegen werde, weil sie seinen Arbeiten über die Fourier'schen Reihen*), welche die Unhaltbarkeit jenes älteren Begriffes zweifellos dargethan haben, zu Grunde liegt, reicht nun aber für die Bedürfnisse der Analysis nicht aus, da Functionen dieser Art allgemeine Eigenschaften nicht besitzen, und damit alle Beziehungen von Functionswerthen für verschiedene Werthe des Argumentes in Wegfall kommen.

Es ist so eine empfindliche Lücke in den analytischen Fundamentalbegriffen entstanden, die, obgleich sie überall mit Stillschweigen übergangen wird, doch nicht minder vorhanden ist; wie ein Blick selbst auf die besseren Lehrbücher der Analysis lehrt. Das eine definirt die Functionen wesentlich im Euler'schen Sinne, das zweite verlangt y solle sich „gesetzmässig" mit x ändern, ohne dass eine Erklärung dieses dunklen Begriffes gegeben ist, das dritte definirt sie in der Weise Dirichlet's, das vierte gar nicht; alle aber leiten aus ihrem Begriffe Folgerungen ab, die nicht in ihm enthalten sind.

*) Repert. d. Physik, her. v. Dove t. I. 1837 p. 152.

Es war nöthig, über den Dirichlet'schen Begriff hinauszugehen, wie bereits Cauchy dies seit dem Jahre 1815 zu thun begann. Aber erst in neuester Zeit (1851) ist durch Riemann*) mit echt philosophischem Geiste ein fester Grund neu gelegt worden, indem er, von dem Dirichlet'schen Begriffe ausgehend, den der (monogenen) Function einer *complexen Variabelen* begründete, und so jener leeren Definition wieder einen Inhalt gab, der sich dem des älteren Begriffes annäherte.

Es war dem Gründer der Functionentheorie complexer Veränderlicher leider nicht vergönnt, sein System allseitig und nach dem einheitlichen Plane aufzubauen, dessen Grossartigkeit wir aus den schönen uns bekannten Bruchstücken noch erschliessen können.

Die Grundpfeiler des neuen Systems werden hie und da noch nicht für sicher, und fest genug gehalten, um von ihnen aus das ganze Gebäude der Analysis aufzuführen, und namentlich das von Riemann in edler Bescheidenheit nach Dirichlet benannte Princip ist neuerdings mehrfach angegriffen und vertheidigt worden.

Die Bedenken sind hergenommen von gewissen a priori denkbaren Ausnahmefällen, in denen die Functionen Unstetigkeiten zeigen, die nicht ohne weiteres ausgeschlossen werden können und doch die Schlüsse, die man auf alle der Definition genügenden Functionen anzuwenden hoffen durfte, alteriren.

Ich glaubte nun, dass der einzige Weg, um über diese Unstetigkeiten in's Klare zu kommen und damit den Entscheid über die Natur der Functionen vorzubereiten, der sei, sich von allen Vorstellungen, wie sie auch dem modernsten Mathematiker noch aus dem Euler'schen Functionsbegriffe anhaften, loszusagen und zunächst einmal die Mannigfaltigkeit der in dem *reinen* Dirichlet'schen Functionsbegriffe enthaltenen, möglichen Grössenbeziehungen zweier Veränderlichen auseinanderzulegen, dabei aber besondere Aufmerksamkeit den bisher wenig oder gar nicht beachteten, den *illegitimen* Functionen zu schenken.

In der folgenden Abhandlung habe ich den Versuch gemacht, diese Paradoxieen der Functionen zu behandeln, indem ich mich zunächst auf *reelle* Variabele und *reelle endliche* Werthe der Functionen Einer Veränderlichen beschränke.

Nachdem in § 1. der Sinn, den ich in dieser Abhandlung mit dem Worte „Function" verbinden werde, festgelegt, in § 2. die verschiedenen denkbaren Arten der Stetigkeit und Unstetigkeit von Functionen in Punkten erörtert sind, so gehe ich in § 3. zu der Betrachtung stetiger Functionen im Allgemeinen über und zeige, dass ausser den gewöhnlichen analytischen Functionen mit endlichen, in endlicher

*) Grundlagen f. e. allgem. Theor. d. Funct. Göttingen.

Zahl auf einem gewissen Intervalle liegenden Oscillationen, auch Functionen mit unendlich vielen Oscillationen unendlich kleiner Amplitude denkbar sind. Ausschliesslich solche Functionen dieser Klasse, welche nur in der Nachbarschaft einzelner Punkte jene unendlich vielen Oscillationen zeigen, sind bisher, soviel mir bekannt, durch analytische Ausdrücke dargestellt worden. Mit Hilfe eines Principes, auf welches ich durch ein Beispiel Riemann's*) aufmerksam wurde und welches ich das der *Condensation* von *Singularitäten* nenne (§ 4.), ist es mir gelungen, in § 5. analytische, unbedingt convergente Reihen aufzustellen, die in ganzen Intervallen durchaus oscilliren.

Während nun alle diese Functionen stets der Integration unterzogen werden können, so bietet die Frage nach der *Existenz* eines *Differentialquotienten* eigenthümliche Schwierigkeiten dar. Es ist diese bisher nur selten einer Erörterung unterzogen worden**), weil man die Existenz einer Tangente an jedem Punkte einer Curve als aus unmittelbarer geometrischer Anschauung gewiss, und für eine selbstverständliche Folge der „lex continuitatis" ansah, die man wie eine *Naturnothwendigkeit* im Gebiete der Mathematik respectirte. Wenn aber auch dies dunkle „Gesetz der Stetigkeit" in der That alle Bewegungen in der Natur beherrschen sollte, so darf es doch das Gebiet der reinen Mathematik auf keine Weise beschränken; und jene unmittelbare intuitive Gewissheit hat man selbst in durchaus geometrischen Gebieten als so trügerisch befunden, dass sie auf den Rang eines wissenschaftlichen Beweises nicht mehr Anspruch machen darf. Nach dem Vorgange von Gauss***), Dirichlet, Jacobi†) u. a. ist denn auch die Ueberzeugung, dass die Existenz eines Differentialquotienten stetiger Functionen *keine nothwendige* Folge der Stetigkeit sei, sondern eine besondere Voraussetzung involvire, unter den neueren Mathematikern eine ziemlich allgemeine geworden, obgleich noch gar Mancher an stetige Functionen ohne Differentialquotienten „nicht zu glauben" erklärt. Ich darf hoffen, in § 5. diesen Unglauben als ein Vorurtheil dargethan zu haben, indem dort völlig bestimmte Functionen der angegebenen Art in *analytischem* Ausdrucke durch unbedingt convergente Reihen dargestellt werden.

In § 6. und 7. habe ich die *linear* unstetigen Functionen unter-

*) Ueb. d. Darst. e. Funct. art. 6.

**) Der, soviel mir bekannt, einzige Versuch Ampère's, die Existenz eines solchen a priori für alle Functionen zu erweisen (Journ. de l'éc. polyt. cah. XIII, 1806. p. 148) ist ganz verunglückt.

***) Allg. Lehrs. in Bez. auf d. im verk. Verh. etc. art. 16.

†) Mündlicher Ueberlieferung nach soll Jacobi in seinen Vorlesungen zuweilen bemerkt haben, „man könne sich stetige Curven mit unendlich vielen Spitzen denken."

sucht, d. h. solche, welche auf einem endlichen Intervalle eine unendliche Anzahl von Lösungen der Continuität zeigen, und diese nach ihrem inneren Charakter in zwei wesentlich verschiedene Klassen, die *punktirt-*, und die in Linien *total* unstetigen getheilt, die sich auch (§ 8.) insofern wesentlich verschieden verhalten, als die ersteren immer, die letzteren niemals integrabel sind. In § 9. sind beide Klassen unstetiger Functionen durch analytische Ausdrücke dargestellt.

In den Schlussbetrachtungen habe ich endlich die erhaltenen Resultate zu einer Kritik des Functionsbegriffes verwendet und zu zeigen versucht, dass diese mit Nothwendigkeit auf die Riemann'sche Definition führt, an welche sich in der III. Note einige Bemerkungen über die lineare Unstetigkeit von Functionen complexer Veränderlicher anschliessen.

Soviel zur vorläufigen Orientirung über diesen Beitrag zur Metaphysik unserer Wissenschaft, den ich in Folgendem dem Urtheile der Mathematiker unterbreite. Ich verdanke die Anregung zu diesen Studien wesentlich Riemann's Schriften, in's Besondere seiner glänzenden Arbeit über die trigonometrischen Reihen, nach deren Erscheinen es keiner Entschuldigung mehr bedarf, sich mit diesen Fragen zu beschäftigen, welche, wie ihr Verfasser in Uebereinstimmung mit Dirichlet bemerkt, „mit den Principien der Infinitesimalrechnung in der engsten Verbindung stehen und dazu dienen können, diese zu grösserer Klarheit und Bestimmtheit zu bringen". Sollte mein Versuch, auf einem so schlüpfrigen, bisher nur selten betretenen Boden festen Fuss zu fassen, theilweise misslungen sein und es den Resultaten hie und da an dem wünschenswerthen Abschluss fehlen, so glaube ich auf einige wohlwollende Nachsicht rechnen zu dürfen. Denn es war bei der gelegentlichen Veröffentlichung dieser Gedanken meine einzige Absicht, andere Gelehrte zu veranlassen, ihr Interesse auch diesen fundamentalen Problemen der Wissenschaft zuzuwenden, welche die neuere Functionenlehre nicht mehr abzuweisen gestattet.

§ 1.

Begriff der Function.

Um alle Unbestimmtheit zu beseitigen, erkläre ich hier, das im Folgenden, mit Ausnahme weniger Stellen, an denen dies besonders bemerkt werden wird, nur von *reellen* Werthen der Veränderlichen und von *reellen* Functionen die Rede sein wird, und ein *Unendlichwerden* der Function überall ausgeschlossen sein soll. Demgemäss definire ich:

> Eine *Function* von x nennt man $f(x)$, wenn zu jedem Werthe von x innerhalb eines gewissen Intervalles ein *einziger bestimmter* Werth von $f(x)$ gehört.

Es ist dabei gleichgültig, woher und wie man $f(x)$ bestimme, ob durch analytische Grössenoperationen oder auf andere Weise. Nur muss der Werth von $f(x)$ überall eindeutig und bestimmt sein. So wäre $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in einem $x = 0$ umgebenden Intervalle keine überall bestimmte Function, so lange sie nur durch ihren analytischen Ausdruck definirt wird. Denn dieser wird in $x = 0$ völlig unbestimmbar und unbestimmt, während er in jedem $x = 0$ noch so nahen Punkte allerdings bestimmt ist. Soll sie obigem Begriffe einer völlig bestimmten Function genügen, so muss der Werth $f(0)$ noch besonders, etwa $= 0$, oder $= 1$ oder anders festgestellt sein. Ebenso wenig ist $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ in $x = 0$ bestimmt, da es für positive unendlich zu Null abnehmende x unendlich zu-, für negative x unendlich abnimmt. Wohl aber ist

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots$$

trotz ihrer Sprünge eine überall bestimmte Function.

§ 2.

Begriff der Stetigkeit.

Eine Function $f(x)$, welche für $x = a$ einen bestimmten endlichen Werth $f(a)$ hat, nennt man *in diesem Punkte stetig*, wenn ε stets so klein angenommen werden kann, dass die Differenz:

$$f(a + \delta) - f(a)$$

für *alle* δ, die numerisch $< \varepsilon$ sind, numerisch kleiner, als eine beliebig kleine Grösse σ ist.

Unstetig heisst sie im Punkte $x = a$, wenn ε *nicht* so klein genommen werden kann, dass

$$f(a + \delta) - f(a)$$

für *alle* δ, die numerisch $< \varepsilon$ sind, numerisch unter jeder beliebig kleinen Grösse σ liege.

Es leuchtet ein, dass wenn die Function in $x = a$ stetig ist, das ε so klein bestimmt werden kann, dass, wie auch $\delta < \varepsilon$ angenommen werden möge, $f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$ numerisch kleiner als jede gegebene Grösse σ bleibt, nicht aber umgekehrt. Denn wenn letztere Bedingung erfüllt ist, so kann daraus nur geschlossen werden, dass sich $f(a + \varepsilon)$ mit unendlich abnehmendem ε einer Grenze*) annähere, die jedoch von $f(a)$ ganz verschieden sein kann, wie das Beispiel Fourier'scher Reihen an ihren Unstetigkeitspunkten genügend beweist.

*) S. die genaue Fassung des Begriffes der Grenze im Anhang Note I.

Ich will die Eigenschaft einer Function: Wenn das positive ε stets so klein gedacht werden kann, dass $f(a+\varepsilon) - f(a+\delta)$ für jedes *von Null verschiedene* $\delta < \varepsilon$ numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse σ ist, — dadurch bezeichnen, dass ich sage:

Die Function sei *in unmittelbarer Nähe des Punktes* $x=a$ auf der rechten Seite *stetig*.

Es kann dies also stattfinden, ohne dass die Function *im* Punkte $x = a$ selbst stetig ist, aber nicht umgekehrt. Die Stetigkeit *in* einem Punkte zieht stets die Stetigkeit in seiner unmittelbaren Nähe, und zwar rechter und linker Seite nach sich. Es kann ferner $f(x)$ in *jedem* $x = a$ *beliebig nahe kommenden* Punkte $x = a + \varepsilon$ stetig sein, ohne doch *in* dem Punkte $x = a$ oder nur in seiner *unmittelbaren Nähe* stetig zu sein. Ein Beispiel hiefür liefert die Function

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a},$$

welche in jedem $x = a$ noch so nahen Punkte stetig ist, ohne es in $x = a$ selbst zu sein, wie man auch den durch die analytische Definition nicht bestimmten Werth derselben in $x = a$ annehme. Aber auch in unmittelbarer Nähe von $x = a$ ist sie nicht stetig; denn man wird nie ε so klein machen können, dass

$$f(a+\varepsilon) - f(a+\delta) = \sin \frac{1}{\varepsilon} - \sin \frac{1}{\delta}$$

für *jedes* von Null verschiedene $\delta < \varepsilon$ unterhalb einer beliebig kleinen Grösse liegt; da diese Differenz fortwährend zwischen den Grenzen ± 1 hin- und herschwankt. Dagegen ist die Function, wie schon bemerkt, für jedes $x = a + \varepsilon$, wie klein auch ε sei, stetig; denn vorstehende Differenz lässt sich, wenn ε constant gehalten wird, durch Annäherung des δ an ε beliebig klein machen.

Ich denke, man kann diesen Fall, dass $f(x)$ in jedem $x = a$ beliebig nahen Punkte stetig ist, dadurch bezeichnen, dass man sagt:

Die Function sei *bis in unmittelbare Nähe* von $x = a$ stetig.

Es folgt daraus nicht, dass sie *in* unmittelbarer Nähe von $x = a$ stetig sein müsse. Und umgekehrt: Es kann eine Function *in* einem Punkte und *in* seiner unmittelbaren Nähe stetig sein, ohne es *bis* in seine unmittelbare Nähe zu sein, wie dies Beispiele des § 9. genügend beweisen.

Es können sich ferner $f(a+\delta)$ und $f(a-\delta)$ mit unendlich abnehmendem δ zweien Grenzen nähern, welche von einander und von $f(a)$ verschieden sind. Man sagt dann, die Function mache hier einen „Sprung", und nennt jene Grenzen die Sprungwerthe. Es kann aber $f(a)$ mit dem Grenzwerthe von $f(a+\delta)$ zusammenfallen und von dem

Grenzwerthe des $f(a - \delta)$ verschieden sein. Dann werden wir sagen, die Function sei im Punkte $x = a$ auf der rechten Seite stetig, links aber nicht.

Endlich können die Grenzwerthe $f(a + \delta)$ und $f(a - \delta)$ gleich, der Werth $f(a)$ aber von ihnen verschieden sein*).

§ 3.

Stetige Functionen.

Schlechthin stetige nennen wir solche Functionen, welche in jedem endlichen Intervalle überall, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Punkten stetig sind. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung derjenigen Intervalle, welche zwischen solchen Unstetigkeitspunkten liegen, in denen also die Functionen *durchaus stetig*, endlich und bestimmt sind.

Für die meisten analytischen Functionen, die man bisher in Untersuchung gezogen hat, lässt sich in jedem Punkte $x = a$ ein positives Intervall ε so bestimmen, dass für *alle* $\delta < \varepsilon$ die Differenz $f(a + \delta) - f(a)$ nicht allein numerisch kleiner als eine beliebig kleine Grösse σ, sondern auch *einerlei Zeichens* ist, und die Differenz mit *abnehmenden* δ immer *abnimmt*; ein eben solches Intervall aber auch auf der anderen Seite des Punktes $x = a$ vorhanden ist. Sind in diesem Falle die Zeichen der Differenzen $f(a + \delta) - f(a)$ und $f(a - \delta) - f(a)$ dieselben, so ist in $x = a$ ein Maximum oder ein Minimum; sind die Vorzeichen verschieden, so ist keins von beiden vorhanden. Auf ein Maximum folgt im Verlaufe einer solchen Function ein Minimum und umgekehrt. Man nennt ein solches Stück der Function zwischen einem Maximum und Minimum eine *Oscillation*, die Differenz des Maximal- und Minimalwerthes die Amplitude derselben**).

Die Functionen der angegebenen Art haben auf jedem endlichen Intervalle eine *endliche* Anzahl von Oscillationen.

Nach dem Bilde dieser Functionen, welche die Analysis fast allein kennt, kann man sich nun die anderen stetigen Functionen denken, in denen, wie klein man auch ε nehmen möge, doch $f(a + \delta) - f(a)$ *nicht* für alle $\delta < \varepsilon$ *desselben* Zeichens und *nicht* mit δ immer *abnehmend* ist. Ein Beispiel eines solchen Verhaltens liefert die Function

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

*) Riemann hat (Grundlagen f. e. allg. Th. p. 14) diese Unstetigkeiten als solche bezeichnet, welche „durch Abänderung des Functionswerthes in Einem Punkte hebbar" sind.

**) Ich bediene mich hier der Bezeichnung von Lipschitz (Crelle, Journ. t. 63. p. 296).

welche in $x = 0$ den Werth $f(0) = 0$ hat und gewiss stetig ist; denn man kann die Differenz:

$$f(\delta) - f(0) = \delta \sin \frac{1}{\delta}.$$

jedenfalls beliebig klein machen, obgleich sie für abnehmende δ immerfort zwischen positiven und negativen Werthen oscillirt. Wir können dies Verhalten wohl so bezeichnen, dass $f(x)$ in der unmittelbaren Nähe von $x = 0$

unendlich viele Oscillationen mit unendlich kleiner Amplitude habe.

Was hier nur in unmittelbarer Nähe eines einzelnen Punktes stattfindet, kann für gewisse Functionen in einer unendlichen Anzahl von Punkten geschehen, die unendlich dicht bei einander liegen; Beispiele solcher Functionen sind in I. und II. des § 5. gegeben. Charakteristisch bleibt aber für diese Functionen, dass, wie klein man auch das von Null verschiedene σ annehmen möge, die Anzahl der Oscillationen, deren Amplituden $> \sigma$ sind, immer eine endliche ist, jedoch unbegrenzt wächst, wenn σ unbegrenzt abnimmt.

Man hat wohl auch von *stetigen* Functionen gesprochen, welche eine *unendliche Anzahl* von *Oscillationen* mit *endlicher Amplitude* enthalten sollen, d. h. bei denen in jedem noch so kleinen Intervalle Oscillationen vorkommen sollen, deren Amplituden eine gewisse constante Grösse σ übersteigen und hat dabei etwa an $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $x = 0$ gedacht. Es ist aber leicht zu zeigen, dass diese Annahme einen inneren Widerspruch involvirt. Denn, wenn an dem Punkte $x = a$ kein Intervall ε existirt, innerhalb dessen für alle ε, $f(a + \varepsilon) - f(a)$ numerisch kleiner, als eine beliebig kleine Grösse ist, sondern, wenn die Werthe dieser Differenz innerhalb des Intervalles um jene constante Amplitude $> \sigma$ schwanken, so ist eben die Function, dem Begriffe der Stetigkeit nach, *nicht stetig;* wie denn auch schon $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ in $x = 0$ selbst nicht stetig, sondern gänzlich unbestimmt ist.

Für *alle stetigen* Functionen ist daher die *Anzahl* der *Oscillationen, welche* $> \sigma$ *sind*, in jedem Intervalle *endlich*, wie nahe auch σ der Null kommen möge. Sie zerfallen aber in folgende zwei Klassen:

I. *Functionen mit endlichen Oscillationen*, d. h. diejenigen, in denen die Anzahl der Oscillationen $> \sigma$ über eine bestimmte Grenze nicht hinausgeht, wie klein auch σ genommen werde.

Hieher gehören alle algebraischen, und die meisten der bekannten analytischen Functionen, denen, mit Ausnahme einiger kritischen Punkte, wie in

$$f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \text{oder} \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

des Punktes $x = 0$, überall ein bestimmter, endlicher Differentialquotient zuzukommen pflegt.

Es lassen sich indessen Functionen denken, welche zwar überall stetig sind, und zu der Klasse der Functionen mit endlichen Oscillationen gehören und doch in unendlich vielen Punkten eines Intervalles unendlich grosse Differentialquotienten, also gleichsam „unendlich viele Spitzen" haben*). In III. und IV. des § 5. sind solche Functionen in analytischer Reihenform dargestellt, in denen sich die Differenz $f(a + \varepsilon) - f(a)$ in unendlich vielen Punkten $x = a$ bezüglich wie $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ und $\frac{1}{\log \varepsilon}$ verhält.

Es giebt aber auch, was früher geläugnet zu werden pflegte, einfache transcendente Curven, welche stetig verlaufen, jedoch einzelne

---

*) Es liegt nicht fern, solche Curven mit unendlich vielen Spitzen sich etwa auf folgende Weise anschaulich vorzustellen: Man theile ein Quadrat von der Seitenlänge 1 durch äquidistante horizontale und vertikale Parallelen in ein Netz von μ^2 kleineren Quadraten; man gehe dann von der einen Ecke des grossen Quadrates in zusammenhängendem Zuge nach der gegenüberliegenden Ecke, indem man dabei immer in jenen Parallelen bleibt, sich also bald in horizontaler, bald in vertikaler Richtung bewegt. Die Länge des Wegs, den man hiebei durchmisst, ist immer dieselbe und zwar $= 2$, wie man auch die Maschen jenes Netzes durchlaufe. Man wähle jetzt einen solchen Weg, der sich möglichst an die Diagonale anschliesst und treppenförmig von dem einen Eckpunkte nach dem anderen aufsteigt, indem die Diagonale alle ausspringenden Ecken der Stufen trifft. Man lasse nun μ beliebig wachsen; jener treppenförmige Weg wird sich dann, wenn er immer in gleicher Weise construirt wird, der Diagonale immer mehr annähern, und sein Abstand von dieser beliebig klein werden; während aber die Tangente der Diagonale für alle ihre Punkte denselben Werth besitzt, so schwankt die jenes treppenförmigen Zuges fortwährend zwischen 0° und 90°, und die Länge des letzteren bleibt constant $= 2$, während die der Diagonale einen anderen Werth nämlich $\sqrt{2}$ besitzt. Lässt man nun μ unendlich wachsen, so scheint man durch diesen Grenzübergang zu einer Linie zu gelangen, die zwar in ihrem ganzen äusseren Verlaufe mit einer geraden Linie zusammenfällt, in ihrer inneren Natur aber wesentlich anders beschaffen ist, indem ihre Richtung in jedem Punkte gänzlich unbestimmt und ihre Länge von der der Geraden verschieden ist. Dies (der bekannten rota Aristotelica verwandte) Paradoxon beruht indess auf einer Erschleichung, indem dabei stillschweigend der Satz angenommen wird: „Wenn sich eine Schaar von Curven stetig einer Grenzcurve nähert, so gelten die Eigenschaften jener Schaar auch für die Grenzcurve." Dieser Satz, vor dessen stillschweigender Anwendung sich freilich selbst bedeutende Mathematiker nicht immer bewahrt haben, ist aber im Allgemeinen nicht nur unerweislich, sondern auch falsch; denn es sind genug Beispiele beizubringen, wo eine Schaar von Curven mit stetig veränderlicher Richtung und Krümmung sich stetig einer Grenzcurve nähert, welche plötzliche Aenderungen der Richtung und Krümmung zeigt. In unserem obigen Falle findet das umgekehrte statt: eine Reihe von Curven mit springenden Differentialquotienten nähert sich stetig einer Curve von constanter Richtung.

Punkte besitzen, in welchen die Grenzen, welchen sich die durch jene festen Punkte und benachbarte Curvenpunkte gelegte Secanten annähern, zu beiden Seiten verschieden sind, so dass also in diesen Punkten zwei Zweige der Curve unter einem endlichen Winkel zusammenstossen.

Ein Beispiel hiefür ist:

$$f(x) = \int_a^x \frac{dy}{1 + e^{\frac{1}{y}}},$$

wo die Function unter dem Integralzeichen überall endlich bleibt, wenn y reelle Werthe durchläuft, und nur für $y = 0$ unbestimmt wird. Es ist aber gleichwohl

$$f(0) = \int_a^0 \frac{dy}{1 + \varepsilon^{\frac{1}{y}}}$$

bestimmt, und

$$f(\varepsilon) - f(0) = \int_0^\varepsilon \frac{dy}{1 + e^{\frac{1}{y}}} = \varepsilon - \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\delta}}},$$

wo δ ein zwischen 0 und ε liegender Werth ist. Da nun der Grenzwerth von

$$\frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\delta}}} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ für } \begin{matrix} \text{positive} \\ \text{negative} \end{matrix} \delta,$$

so ist

$$\lim \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{\varepsilon} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

je nachdem man sich von der rechten oder linken Seite dem Nullpunkte nähert.

Aehnlich verhält sich das Integral jeder Function, die zu beiden Seiten eines Punktes verschiedene Werthe annimmt.

Am Ende des § 8. sind nun stetige Functionen in analytischer Form angegeben, welche in unendlich vielen Punkten eines endlichen Intervalles dieselbe Eigenschaft zeigen.

II. *Functionen mit unendlich vielen Oscillationen unendlich kleiner Amplitude* sind solche, bei denen die Anzahl der Oscillationen $> \sigma$ mit abnehmendem σ über alle Grenzen wächst.

Hieher gehört die Function $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, welche wenigstens in [illegible]m, $x = 0$ umschliessenden Intervalle die angegegebenen Eigen-

schaften zeigt. Andere Functionen, welche dieselbe Eigenthümlichkeit in unendlich vielen Punkten jeder Strecke besitzen, sind in I. und II. des § 5. gegeben.

Was die Differentialquotienten betrifft, so kann man allerdings Functionen dieser zweiten Classe angeben, welche in unendlich vielen Punkten keine besitzen (wie I. des § 5.); es giebt aber auch solche, bei welchen sich die Oscillationen gleichsam so abflachen, dass in jedem Punkte ein bestimmter *Differentialquotient* existirt*) (vergl. II. des § 5.) Einfacher ist die Untersuchung der Integrale und es mag hier sogleich bemerkt werden, dass in § 8. gezeigt werden wird: die stetigen Functionen beider Classen sind stets integrabel.

Was die Entwickelung stetiger Functionen in Fourier'sche Reihen betrifft, so sind die Untersuchungen Dirichlet's**), welche ausdrücklich auf die erste Classe beschränkt waren, durch die Arbeiten von Lipschitz***) und Riemann†) dahin vervollständigt worden, dass *alle* stetigen Functionen in periodische Reihen mit unendlich abnehmenden Coefficienten entwickelt werden können.

§ 4.

Condensation der Singularitäten.

Es muss der Fortgang der theoretischen Entwickelung hier unterbrochen werden, um das Princip auseinanderzusetzen, welches die im vorigen Paragraphen angeführten illegitimen Functionen analytisch darzustellen gestattet.

Es sei $\varphi(y)$ eine Function, welche für alle Werthe von y zwischen

---

*) Ob es möglich ist, *stetige* Functionen analytisch darzustellen (oder auch nur zu denken), welche in *keinem* Punkte eines endlichen Intervalles einen bestimmten endlichen Differentialquotienten besitzen, steht dahin. Denn man muss hiebei genau unterscheiden, ob in einem gegebenen Falle der Differentialquotient an sich unbestimmt ist, oder nur in einer Form erscheint, deren Werth wir nicht zu bestimmen vermögen. So lässt z. B. die Function

$$f(x) = \sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

in dieser Form ihren Differentialquotienten unbestimmt, weil die Reihe zu schlecht convergirt, um nach unseren gewöhnlichen Methoden die Differenz $f(x+\varepsilon)-f(x)$ für abnehmende ε bestimmen zu lassen; an sich aber ist $f'(x) = 1$ und keineswegs unbestimmt.

**) Crelle, Journ. t. 4. p. 169 wird vorausgesetzt, dass nur eine endliche Anzahl von Maximis und Minimis vorhanden sind.

***) Crelle, Journ. t. 63. p. 301 wird die Entwickelbarkeit nachgewiesen für Functionen, in denen $f(x+\varepsilon) - f(x)$ mit ε schneller abnimmt, als irgend eine positive Potenz von ε.

†) Ueb. d. Darstellbark. art. 10.

-1 und $+1$, mit Ausnahme von $y=0$, einen völlig bestimmten, zwischen $+1$ und -1 liegenden Werth hat und das normale Verhalten analytischer Functionen zeigt, dass $\varphi(y+\delta)$ für ein genügend kleines δ nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\varphi(y+\delta)=\varphi(y)+\delta\,\varphi'(y)+\tfrac{1}{2}\delta^2\varphi''(y)+\cdots$$

entwickelt werden kann. In $y=0$ aber habe diese Function eine Singularität, welche die Entwickelung von $\varphi(y)$ nach ganzen Potenzen von y unzulässig macht; doch sei ihr Werth auch in diesem Punkte bestimmt und zwar $\varphi(0)=0$.

Diese Singularität, welche der Function $\varphi(y)$ nur für einen einzelnen Punkt $y=0$ zukommt, kann nun einer Function $f(x)$ so imprägnirt werden, dass sie diese in unendlich vielen Punkten eines endlichen Intervalles besitzt, und zwar, indem man setzt:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(\sin n x\pi)}{n^s}.$$

Wenn $s>3$ vorausgesetzt wird, so convergirt diese Reihe, weil ihre Glieder numerisch nicht grösser sind, als die der convergenten Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

Die Function $f(x)$ ist daher immer endlich und bestimmt, wenn der Function $\varphi(y)$, wie vorausgesetzt, diese Eigenschaften zukommen.

Um nun die Singularitäten der neuen Function $f(x)$ zu untersuchen, so bemerke man zunächst, dass nach bekannten Regeln:

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^s}<\frac{1}{(s-1)m^{s-1}}$$

und daher:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi(\sin n x\pi)}{n^s}+\frac{h}{m^{s-1}},$$

wo h einen echten Bruch bezeichnet. Somit ist, wenn h' ebenfalls einen echten Bruch vorstellt:

$$f(x+\varepsilon)-f(x)=\sum_{n=1}^{m}\frac{\varphi(\sin n[x+\varepsilon]\pi)-\varphi(\sin n x\pi)}{n^s}+\frac{h'}{m^{s-1}}.$$

Hierin bedeutet m eine beliebig grosse, ε eine beliebig kleine Zahl, deren Wachsthum und Abnahme wir in beliebige Verbindung mit einander setzen können. Wir wollen voraussetzen, dass, wie gross auch m sei, immer $m\varepsilon$ unter einer beliebig kleinen Grösse liege. Da

somit um so mehr $n\varepsilon$ eine beliebig kleine Grösse darstellt, so ist die Entwickelung:

$$\varphi(\sin n[x+\varepsilon]\pi) = \varphi(\sin nx\pi) + n\varepsilon\pi \cos nx\pi \cdot \varphi'(\sin n[x+\varkappa\varepsilon]\pi)$$

(wo $\varkappa$ ein echter Bruch) gestattet, wenn nicht $\sin nx\pi = 0$.

Dieser Fall aber tritt für kein Glied der Reihe ein, wenn x eine *irrationale* Grösse ist; es ist dann:

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = \varepsilon\pi \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi'(\sin n[x+\varkappa\varepsilon]\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi + \frac{h'}{m^{s-1}}.$$

Die Reihe rechter Hand ist convergent, wenn $s > 3$, wie wir vorausgesetzt haben; und es kann somit durch Verkleinerung von ε die Differenz $f(x+\varepsilon) - f(x)$ immer beliebig klein gemacht werden.

Die Function $f(x)$ ist daher in jedem *irrationalen* Punkte stetig, und noch mehr: sie hat in jedem solchen Punkte einen völlig bestimmten, endlichen Differentialquotienten.

Denn es ist:

$$\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \pi \sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi'(\sin n[x+\varkappa\varepsilon]\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi + \frac{h'}{\varepsilon m^{s-1}}.$$

Nun nähert sich mit stetig abnehmendem ε unter der Voraussetzung $s > 3$ die Reihe jedenfalls der Grenze

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi'(\sin nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi,$$

und wenn man jene Beziehung zwischen dem Wachsthum von m und der Abnahme von ε genauer so determinirt, dass εm zwar unendlich abnehmen, $\varepsilon m^{s-1} = \varepsilon m \cdot m^{s-2}$ aber unendlich wachsen soll, was z. B. durch die Substitution

$$m = \frac{1}{\varepsilon q}, \quad 1 > q > \frac{1}{s-1}.$$

bewirkt werden kann, so sieht man, dass der Rest verschwindet, also der Differentialquotient

$$f'(x) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi'(\sin nx\pi)}{n^{s-1}} \cos nx\pi$$

in jedem irrationalen Punkte eindeutig bestimmt und von der Abnahme des ε ganz unabhängig ist.

Die Function verhält sich demnach in jedem irrationalen Punkte ganz legitim; einen wesentlich verschiedenen Charakter hat sie dagegen in den Punkten, wo x einen *rationalen* Werth, der in seiner reducirten Form $x = \frac{\nu}{\mu}$ sein möge, besitzt.

Fassen wir in der Reihe, welche $f(x+\varepsilon)-f(x)$ bestimmt:

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\varphi(\sin n[x+\varepsilon]\pi)-\varphi(\sin nx\pi)}{n^s}$$

zunächst die Glieder zusammen, für welche n kein Multiplum von μ, so bilden sie eine Reihe, welche die eben besprochenen Eigenschaften hat, und mit εQ bezeichnet werden mag; die übrigen Glieder aber, in denen für ganzzahlige r, $n=\mu r$ ist, haben eine ganz andere Natur; sie geben, da $\varphi\left(\sin n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)=\varphi(\sin r\nu\pi)=\varphi(0)$ also nach unserer Voraussetzung $=0$ wird, die Reihe:

$$\frac{1}{\mu^s}\sum\frac{\varphi(\pm\sin r\mu\varepsilon\pi)}{r^s},$$

wo r alle ganzen Zahlwerthe von 1 bis zu der unter $\frac{m}{\mu}$ liegenden ganzen Zahl durchläuft, und das Vorzeichen $\pm$ zu nehmen ist, je nachdem $r\nu$ gerade oder ungerade ist. Man kann hiefür, wenn ε abnimmt und trotz der Zunahme des m doch immer $m\varepsilon$ beliebig klein werden soll,

$$\frac{1}{\mu^s}\sum\frac{\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)}{r^s}$$

schreiben, und sieht jetzt, wie die Singularität, welche $\varphi(y)$ für $y=0$ besitzt, sich auf unsere Function überträgt. Denn es leuchtet ein, dass s immer so gross genommen werden kann, dass das erste Glied dieser Reihe, also:

$$\frac{1}{\mu^s}\varphi(\pm\mu\varepsilon\pi)$$

die Singularität wesentlich bestimmt.

Wenn die Entwickelung von $\varphi(\delta)$ nach Potenzen von δ nicht mehr gilt und die Function $\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)$ selbst für die kleinsten Werthe von ε nicht in dem Grade wie ε abnimmt, so sieht man, dass die Division der Gleichung:

$$f(x+\varepsilon)-f(x)=\varepsilon Q+\frac{1}{\mu^s}\sum\frac{\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)}{r^s}+\frac{h'}{m^{s-1}}$$

durch ε auf keinen bestimmten Grenzwerth für

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$$

führen wird, und daher

die Function $f(x)$ einen Differentialquotienten für rationale Werthe von x *nicht* besitzt.

Ist $\varphi(y)$ auch im Punkte $y=0$ stetig, so ist aus dem vorstehenden Werthe der Differenz $f(x+\varepsilon)-f(x)$ ersichtlich, dass $f(x)$ in

allen, auch in den rationalen Punkten x stetig ist, ohne doch in diesen einen Differentialquotienten zu haben.

Die Singularität $\varphi(y)$ in dem Punkte $y = 0$ wird also auf jeden *rationalen* Punkt x der Function $f(x)$ übertragen, indem sich für solche x in der Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin n x \pi)}{n^s}$$

immer Glieder finden, welche jene Eigenheiten besitzen; während für irrationale x sich alle Glieder legitim verhalten.

Die unendlich vielen Singularitäten, welche $\varphi(\sin y\pi)$ nach den vorausgesetzten Eigenschaften der Function φ in den discreten Punkten $y = 0, 1, 2, 3, \ldots$ besitzt, drängen sich in der Function $f(x)$ gewissermassen auf eine endliche Strecke zusammen und ich habe daher das Princip, von solchen Functionen φ zu den f überzugehen, als das der *Condensation der Singularitäten* bezeichnen zu können geglaubt.

Die weitere Ausführung für bestimmte Functionen wird im Folgenden in verschiedenen Beispielen gegeben werden. Im Allgemeinen kann man noch bemerken, dass die Singularität in einem rationalen Punkte um so stärker ausgeprägt erscheint, je einfacher der Werth $x = \frac{\nu}{\mu}$, d. h. je kleiner der Nenner μ ist. Die der Function φ eigene Singularität überträgt sich nämlich auf die Function f nur in dem Verhältniss von $\mu^s : 1$. Die Function nimmt daher, je näher man einem irrationalen Punkte kommt, immer mehr den in solchen vorhandenen Charakter der Stetigkeit an.

§ 5.

Stetige Functionen mit unendlich vielen Singularitäten.

I. Diese allgemeinen Bemerkungen sollen im Besonderen auf die Function

$$\varphi(y) = y \sin \frac{1}{y}$$

angewandt werden, welche überall stetig ist, aber in $y = 0$ unendlich viele, unendlich kleine Oscillationen besitzt und daher nach aufsteigenden Potenzen von y nicht entwickelbar ist.

Die Function

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sin n x \pi \cdot \sin\left(\frac{1}{\sin n x \pi}\right)$$

ist nun, wie aus vorstehenden Betrachtungen erhellt, in allen irrationalen Punkten x stetig und differentiibel.

Ist aber $x = \frac{\nu}{\mu}$ rational, so enthält $f(x + \varepsilon)$ ausser einer Reihe εQ noch die Glieder:

$$\frac{1}{\mu^s} \sum \frac{1}{r^s} \sin r\mu\varepsilon\pi \cdot \sin\left(\frac{1}{\sin r\mu\varepsilon\pi}\right),$$

die man, wenn ε genügend klein angenommen wird, bis auf Glieder höherer Ordnung, durch

$$\frac{\pi}{\mu^{s-1}} \sum \frac{1}{r^{s-1}} \sin \frac{1}{r\mu\varepsilon\pi}$$

ersetzen kann, so dass

$$f(x + \varepsilon) - f(x) = \varepsilon \frac{\pi}{\mu^{s-1}} \sum \frac{1}{r^{s-1}} \sin \frac{1}{r\mu\varepsilon\pi} + \varepsilon Q + \frac{h'}{m^{s-1}}$$

gesetzt werden darf. Da sich nun für einigermassen grosse s die Summe

$$\sum \frac{1}{r^{s-1}} \sin \frac{1}{r\mu\varepsilon\pi}$$

wesentlich auf ihr erstes Glied reducirt, so verhält sich

$$f(x + \varepsilon) - f(x) \text{ wie } \frac{\varepsilon\pi}{\mu^{s-1}} \sin \frac{1}{\mu\varepsilon\pi}.$$

Die Function $f(x)$ ist daher in den rationalen Punkten x zwar stetig, aber nicht in der Weise, dass ihrem Differentialquotienten ein bestimmter Werth zukäme. Vielmehr kann um solche Punkte herum kein Intervall von solcher Kleinheit angegeben werden, dass in ihm die Differenz $f(x + \varepsilon) - f(x)$ immer abnähme, oder nur ein und dasselbe Zeichen behielte. Wir können dies Verhalten, welches dem unserer jetzigen Function $\varphi(y)$ in $y = 0$ gleicht, dahin bezeichnen: *die Function $f(x)$ macht in jedem rationalen Punkte x unendlich viele unendlich kleine Oscillationen*, ohne jedoch jemals unstetig zu werden.

II. Setzt man

$$\varphi(y) = y^2 \sin \frac{1}{y},$$

so finden in Bezug auf das Oscilliren in jedem rationalen Punkte ganz ähnliche Verhältnisse bei der Function:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} (\sin nx\pi)^2 \sin\left(\frac{1}{\sin nx\pi}\right),$$

wie bei der in der vorigen Nr. statt. Man hat aber jetzt, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden

$$\frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = Q + \varepsilon \frac{\pi^2}{\mu^{s-2}} \sum \pm \frac{1}{r^{s-2}} \sin \frac{1}{r\mu\varepsilon\pi}$$

wo die, für abnehmende ε und zunehmende m verschwindenden Restglieder sogleich weggelassen sind. Halten wir nun die Voraussetzung

$s > 3$ fest, so verschwindet mit unendlich abnehmendem ε das Product jener convergenten Σ in ε und es nähert sich der Quotient

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \text{ der Grenze } Q.$$

Obgleich daher, wie man sieht, in jedem rationalen Punkte x auch jetzt unendlich viele, unendlich kleine Oscillationen vorhanden sind, *besitzt die Function doch in jedem Punkte einen völlig bestimmten Differentialquotienten**); der Grund hievon ist in der Kleinheit dieser Oscillationen zu suchen, die eine unendlich kleine Amplitude der zweiten Ordnung haben, ebenso wie die der Function

$$\varphi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \quad \text{in} \quad x = 0,$$

während die Amplituden in Nr. I unendlich klein von erster Ordnung sind.

III. Setzt man

$$\varphi(y) = y^{\frac{2}{3}},$$

und bildet demgemäss

$$f(x) = \sum \frac{(\sin n x \pi)^{\frac{2}{3}}}{n^s},$$

so hat man hierin eine *durchaus stetige*, reelle Function, wenn unter der Cubikwurzel stets ihr reeller Werth verstanden wird.

Für ein rationales $x = \frac{\nu}{\mu}$ ist:

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = \varepsilon Q + \frac{(\varepsilon\pi)^{\frac{2}{3}}}{\mu^{s-\frac{2}{3}}} \sum \frac{1}{r^{s-\frac{2}{3}}} + \frac{h'}{m^{s-1}},$$

---

*) Doch ist hier vielleicht die Bemerkung nicht überflüssig, dass die Derivirte $f'(x)$, als Function von x angesehen, sich keineswegs bei Annäherung des x an einen rationalen Werth jener Grenze Q annähert, sondern fortwährend oscillirt, wie der Werth von

$$f'(x) = \sum \frac{1}{n^s} \frac{\partial}{\partial x}\left[(\sin n x \pi)^2 \sin\left(\frac{1}{\sin n x \pi}\right)\right]$$

sofort zeigt. Ganz analog ist zwar für die Function $\varphi(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ der Grenzwerth von

$$\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon} = \varepsilon \sin\frac{1}{\varepsilon}$$

bestimmt, und also $\varphi'(0) = 0$. Im Allgemeinen aber ist:

$$\varphi'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

und daher $\varphi'(x)$ eine Grösse, welche bei abnehmenden x fortwährend oscillirt und sich *nicht* der Grenze $\varphi'(0) = 0$ annähert.

und man sieht, dass die Function zu der ersten Classe der in § 3. betrachteten gehört; denn die Differenz $f(x+\varepsilon)-f(x)$ nimmt mit ε fortwährend ab, ohne dabei ihr Zeichen zu wechseln; die *Function $f(x)$ besitzt demnach keine Oscillationen;* gleichwohl aber *existirt* für vorliegende Function *kein endlicher Differentialquotient;* vielmehr *wächst*

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = Q + \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\mu^{s-\frac{2}{3}}} \sum \frac{1}{r^{s-\frac{2}{3}}}$$

mit abnehmendem ε über alle Grenzen.

Wenn man will, kann man das räumliche Correlat der Function $f(x)$ eine stetige *Curve mit unendlich vielen Spitzen* nennen.

IV. An Stelle vieler ähnlicher Beispiele sei nur noch das eine erwähnt, wo

$$\varphi(y) = \frac{1}{\log \varkappa y^2}$$

und $0 < \varkappa < \frac{1}{10}$. Dann zeigt

$$f(x) = \sum \frac{1}{n^s} \frac{1}{\log \varkappa (\sin n x \pi)^2}$$

für ein rationales $x = \frac{\nu}{\mu}$ die Differenz:

$$f(x+\varepsilon) - f(x) = \varepsilon Q + \frac{1}{\mu^s} \sum \frac{1}{r^s} \frac{1}{\log \varkappa (r\mu\varepsilon\pi)^2}$$

und es wird daher

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = Q + \frac{1}{\mu^s} \sum \frac{1}{r^s} \frac{1}{\varepsilon \log \varkappa (r\mu\varepsilon\pi)^2}$$

mit abnehmendem ε immer in's negativ Unendliche wachsen.

§ 6.

Definition und Beispiele von linear unstetigen Functionen.

Unstetig im Punkte $x = a$ nennt man eine Function $f(x)$, wenn es unter den Werthen, welche die Differenz $f(a+\delta)-f(a)$ für alle positiven und negativen δ, die numerisch $< \varepsilon$ sind, annimmt, immer solche giebt, die eine gewisse endliche Grösse σ numerisch übersteigen, wie klein man auch ε annehmen möge.

Ich werde von einer solchen Function sagen: sie mache im Punkte $x = a$ *Sprünge*, die $> \sigma$ sind.

Zur bequemeren Ausdrucksweise führe ich noch bei der Behandlung der Unstetigkeiten einen neuen Begriff ein, und verstehe unter der *Schwankung**) einer Function in einem gewissen Intervalle

*) Nach Riemann, Ueb. die Darst. art. 5.

die Differenz des grössten und kleinsten Werthes, welchen die Function in jenem Intervalle annimmt.

Die Schwankung einer Function innerhalb eines Intervalles, welches einen Punkt $x = a$ umgiebt, in dem $f(x)$ Sprünge $> \sigma$ macht, ist daher jedenfalls $> \sigma$. Sind die Sprünge in dem Punkte $< \sigma$, so kann immer ein kleines Intervall um den Punkt $x = a$ herum angegeben werden, innerhalb dessen die Schwankung weniger beträgt als 2σ.

Die schlechthin stetigen Functionen machen solche Sprünge in einzelnen Punkten, welche nur in endlicher Anzahl auf einer Strecke vorhanden sein dürfen, und zwischen sich immer ein endliches Intervall enthalten, in dem die Function durchaus stetig ist. Solche *punktuelle* Unstetigkeiten können sich aber auch in unendlicher Anzahl auf einer Strecke zusammendrängen und erzeugen so *lineare* Unstetigkeiten, zu deren Betrachtung wir uns jetzt wenden, indem wir definiren:

Linear unstetige Functionen sind solche, welche in unendlich vielen Punkten einer endlichen Strecke unstetig sind.

Die Sprünge, welche die Function in diesen unendlich vielen Punkten macht, können indess insofern ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen, als entweder die Zahl der Punkte, in denen Sprünge grösser als eine bestimmte endliche Grösse σ vorkommen, unendlich ist, oder deren Zahl nur unendlich wächst, wenn σ unendlich abnimmt. Obgleich im letzteren Falle die Punkte, in denen die Sprünge grösser als eine bestimmte endliche Grösse σ sind, nur in endlicher Zahl vorkommen, so sind doch diese Functionen von den schlechthin stetigen, welche überhaupt nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig werden, wesentlich verschieden.

Die mannigfachen Eigenthümlichkeiten, welche die linear unstetigen Functionen zeigen können, mögen zunächst an einer Reihe von Beispielen vorgeführt werden, in denen wir die Veränderliche x das Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ durchlaufen lassen.

I. Für jedes rationale x sei $f(x) = 0$, für jedes irrationale $f(x) = 1$*). Dann sind in jedem noch so kleinen Intervalle unendlich viele Punkte, in denen beiderseits Sprünge von der Grösse 1 vorkommen, enthalten, und es giebt nirgends einen Punkt $x = a$, in dem $f(a + \delta) - f(a)$ für alle $\delta < \varepsilon$, wie klein man auch ε annehme, numerisch < 1 wäre.

II. Die Function habe den Werth $f(x) = 1$, für die Strecke $x = 0$ bis $x = 1$ mit Ausnahme unendlich vieler Intervalle von der Grösse ζ^n, welche in den Punkten $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (von $n = 1$ bis $n = \infty$) ihre Mittelpunkte haben; in jedem dieser Intervalle aber sei die Function in derselben Weise unstetig, als die unter I. beschriebene, d. h. sie

*) Auf solche Functionen hat Dirichlet (Crelle, Journ. t. IV. p. 169) aufmerksam gemacht.

nehme den Werth 0 für alle rationalen, den Werth 1 für alle irrationalen Werthe des Argumentes an. Die Gesammtgrösse s der Intervalle, in denen überall Schwankungen $= 1$ vorkommen, beträgt:

$$s = \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \cdots = \frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

Zwischen zwei solchen Intervallen liegt immer eine Strecke, in welcher die Function stetig ist; denn die Punkte $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ sind umgeben von Intervallen ζ^n, ζ^{n+1} mit endlichen Schwankungen; zwischen diesen bleibst ein Raum:

$$\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - \tfrac{1}{2}\zeta^n\right) - \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} + \tfrac{1}{2}\zeta^{n+1}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\left\{1 - (2\zeta)^n(1+\zeta)\right\}$$

der, wenn etwa $\zeta < \frac{1}{4}$, für alle n positiv ist und mit wachsenden n unbegrenzt abnimmt.

III. Die Function habe den Werth $f(x) = 1$ für alle Werthe des Argumentes ausser den Punkten $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (von $n = 1$ bis $n = \infty$), in denen $f(x) = 0$ sein möge. Die Unstetigkeit ist hier auf einzelne, wenn auch unendlich viele Punkte beschränkt, in denen Sprünge von der Grösse 1 vorkommen. Es giebt nirgends ein ganz mit Unstetigkeiten erfülltes Intervall. Soll ein den Punkt $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ umgebendes Intervall nur die in diesem Punkte stattfindende Unstetigkeit einschliessen, so kann es beliebig klein genommen werden. Ja noch mehr: die Gesammtgrösse s aller Intervalle dieser Art kann beliebig klein gemacht werden. Denn nimmt man ε^n als die Grösse des, einen Punkt $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ einschliessenden Intervalles, so kann jene Summe:

$$s = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

mit ε beliebig verkleinert werden.

IV. Die Function habe von $x = 1$ bis $x = \frac{1}{2}$ den Werth $f(x) = 1$, von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ den Werth $\frac{1}{2}$, allgemein von $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ bis $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ den Werth $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Diese Function, welche nur in den Punkten $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ unstetig wird, und in denselben um $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ springt, hat nicht, wie die bisher betrachteten Beispiele, eine unendliche Anzahl von Punkten, in denen ihre Sprünge eine gewisse endliche Grösse übertreffen; vielmehr ist die Anzahl der Sprünge die $> \sigma$ sind, für jedes σ endlich, nimmt aber mit abnehmendem σ fortwährend und ohne Grenze zu. Die Gesammtgrösse der Intervalle, in

denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, kann offenbar für jedes σ beliebig klein gemacht werden, da die Anzahl der Intervalle eine endliche ist, und diese nur die Unstetigkeitspunkte nothwendig umschliessen müssen.

§ 7.

Theorie und Classification der linear unstetigen Functionen.

Die vorstehenden Beispiele lassen deutlich zwei Classen von linear unstetigen Functionen unterscheiden: Solche, welche innerhalb ganzer Intervalle total, und solche, welche nur in zerstreuten, wenn auch unendlich zahlreichen Punkten unstetig sind. Doch bedürfen diese Begriffe noch einer präciseren Fassung.

Wenn auf einer Strecke eine Schaar von Punkten liegt, denen eine gewisse Eigenschaft zukommt, so sage ich, dass diese Punkte

die Strecke erfüllen, wenn in der Strecke kein noch so kleines Intervall angegeben werden kann, in dem nicht wenigstens Ein Punkt jener Schaar läge;

dass dagegen diese Schaar von Punkten die Strecke *nicht* erfüllt, sondern die Punkte *zerstreut* auf ihr liegen, wenn zwischen je zwei beliebig nahen Punkten der Strecke immer ein Intervall angegeben werden kann, in dem kein Punkt jener Schaar liegt.

Wir betrachten nun diese beiden Fälle einzeln:

I. Wenn eine Strecke *nicht* von solchen Punkten erfüllt ist, in denen Sprünge $> \sigma$ stattfinden, sondern diese zerstreut, immerhin in unendlicher oder in einer mit unbegrenzt abnehmendem σ unendlich zunehmenden Anzahl in ihr liegen, so giebt es der Definition nach, zwischen zwei solchen Punkten immer ein Intervall, in dem kein solcher Punkt mit Sprüngen $> \sigma$ liegt, in dem also auch die Schwankungen der Function $< 2\sigma$ sind und es gilt nun der Lehrsatz:

Wenn eine Strecke *nicht von Punkten erfüllt* ist, in denen Sprünge $> \sigma$ stattfinden, so kann die *Gesammtgrösse s der Intervalle*, in denen die Schwankungen $> 2\sigma$ sind, beliebig klein angenommen werden.

Beweis. Die Intervalle, welche s zusammensetzen, liegen herum um jene zerstreuten Unstetigkeitspunkte, in denen die Function Sprünge von der Grösse σ zeigt. Ist daher die Anzahl jener Punkte endlich, so kann die Gesammtgrösse der Intervalle, da man jedes derselben beliebig klein machen kann, auch beliebig verkleinert werden. Im Falle, dass die Anzahl jener Punkte unendlich gross ist, zwischen ihnen aber nach obiger Bemerkung noch Zwischenräume liegen, in denen die Schwankung $< 2\sigma$ ist, kann man so verfahren: Man theile die ganze Strecke, die man betrachtet, in Intervalle, von denen jedes

einen dieser Unstetigkeitspunkte mit Sprüngen $> \sigma$ umgiebt, und wähle diese Intervalle so gross, dass sie zusammengenommen die ganze Strecke erfüllen. Denkt man sich dann jedes dieser Intervalle zusammengezogen auf den $n$ten Theil, jedoch so, dass es auch jetzt noch den betreffenden Unstetigkeitspunkt umgiebt, so ist der übrige Theil der Strecke von Sprüngen $> \sigma$ frei; die Summe jener Intervalle aber, in denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, ist der $n$te Theil der gesammten Strecke und kann daher durch Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden. *q. e. d.*

Es gilt aber auch die Umkehrung, nämlich das Theorem:

Kann die *Gesammtgrösse* der Intervalle, in denen Schwankungen $> \sigma$ vorkommen, *beliebig klein* gemacht werden, so kommen Punkte, in denen die Function um mehr als σ springt, nur *zerstreut* vor.

Beweis. Erfüllten nämlich diese Punkte mit Sprüngen $> \sigma$ auch nur ein kleines Intervall h, so würde in diesem die Schwankung immer $> \sigma$ sein, und daher die Gesammtsumme der Intervalle, in denen Schwankungen $> \sigma$ vorkommen, jedenfalls nicht $< h$ werden können, was der Voraussetzung widerspricht. *q. e. d.*

II. Wir betrachten analog den Fall der eine Strecke erfüllenden Unstetigkeiten und beweisen den folgenden Lehrsatz:

Wenn Punkte, in denen Sprünge $> \sigma$ stattfinden, eine *Strecke erfüllen*, so kann aus dieser *nirgends ein Intervall herausgenommen werden*, in dem die Schwankung $< \sigma$ wäre.

Beweis. Denn gäbe es ein solches Intervall, in dem die Schwankung $< \sigma$ wäre, und reichte dasselbe von $x = a$ bis $x = a + \varepsilon$, so wäre $f(a + \delta) - f(a + \delta')$ immer numerisch $< \sigma$, wenn δ, δ' in dem Intervall ε liegen. Nun giebt es aber, da die Punkte mit Sprüngen $> \sigma$ die ganze Strecke erfüllen, zufolge der Definition dieses Begriffes, in jedem Intervall, also auch in dem ε, wenigstens einen Punkt $x = a + \gamma$, in dem Sprünge $> \sigma$ stattfinden; d. h. es giebt jedenfalls ein ζ, so dass $f(a + \gamma + \zeta) - f(a + \gamma)$ numerisch $> \sigma$ ist, wo γ und $\gamma + \zeta$ in jenem Intervalle ε liegen. Setzt man daher $\gamma + \zeta = \delta$, $\gamma = \delta'$, so wäre $f(a + \delta) - f(a + \delta')$ numerisch $> \sigma$, was dem Vorigen widerspricht. *q. e. d.*

Es gilt aber auch die Umkehrung, nämlich der Satz:

Wenn in jedem Intervalle einer Strecke die Schwankung $> \sigma$ ist, so ist *die Strecke erfüllt* mit Punkten, in denen Sprünge $> \frac{1}{2}\sigma$ stattfinden.

Beweis. Denn wäre die Strecke nicht erfüllt mit solchen Punkten, so gäbe es in ihr ein Intervall von $x = a$ bis $x = a + \varepsilon$, so dass die Differenzen $f(a + \delta) - f(a)$ und $f(a + \delta') - f(a)$ numerisch $< \frac{1}{2}\sigma$ wären, wenn δ und $\delta' < \varepsilon$ sind. Dann müsste aber $f(a+\delta) - f(a+\delta')$

numerisch $< \sigma$, also die Schwankung in diesem Intervalle $< \sigma$ sein, was der Voraussetzung widerspricht. *q. e. d.*

Die vorstehenden Erläuterungen werden genügend dargethan haben, dass die linear unstetigen Functionen in zwei principiell verschiedene Classen zerfallen:

I. Classe. Die *punktirt unstetigen* Functionen oder solche, welche nur in zerstreuten Punkten linear unstetig sind; genauer gefasst wird ihre Definition so lauten:

> *Punktirt* unstetig heissen solche linear unstetigen Functionen, bei welchen die Punkte mit Sprüngen $> \sigma$ nur *zerstreut* vorkommen und *keine Strecke* erfüllen, wie klein auch die, von Null verschiedene, Grösse σ sei.

Die beiden unter I. entwickelten Sätze lassen sofort erkennen:

> Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine linear unstetige Function zu den punktirt unstetigen gehört, ist die, dass die Gesammtgrösse aller Intervalle, in denen Schwankungen $> \sigma$ vorkommen, für jedes kleine, aber von Null verschiedene σ, beliebig klein gemacht werden kann.

Insofern diese punktirt unstetigen Functionen sich von denjenigen stetigen Functionen, die eine endliche Anzahl von Unterbrechungen der Continuität besitzen, unterscheiden sollen, müssen sie eine unendliche Anzahl solcher enthalten. Dies kann aber entweder so geschehen, dass die Anzahl der Punkte, in denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, schon für ein endliches σ eine unendliche ist, oder erst mit unendlich abnehmendem σ über alle Grenzen wächst.

Zu der ersten Art gehört die in III. des vor. §. beschriebene Function, sowie überhaupt alle *Functionen, die aus stetigen* dadurch entstanden sind, dass eine *unendliche Anzahl zerstreuter Punkte aus dem Zusammenhange gerissen* und um endliche Grössen verschoben sind.

Zu der zweiten Art gehört die Function IV. des vor. §., sowie überhaupt *alle* linear unstetigen *Functionen, welche auf einem endlichen Intervalle nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima haben.* Denn betrachten wir z. B. ein Intervall zwischen einem Minimum und einem folgenden Maximum, so werden in diesem entweder nur eine endliche Anzahl von Sprüngen vorkommen — und dann hat man keine linear unstetige Function; oder es ist eine unendliche Menge von Sprüngen vorhanden: da aber durch alle diese nur ein Wachsen um eine endliche Grösse erzielt wird, so können unter den Sprüngen, die sich successive zu den Functionswerthen addiren, nur eine endliche Anzahl solcher vorhanden sein, welche eine beliebig kleine Grösse übertreffen.

Zu dieser Art gehören ferner die in I., II. und III. des § 9. *analytisch* dargestellten Functionen.

Gemeinsam allen Functionen dieser Classe ist folgende sehr bemerkenswerthe Eigenschaft:

Die punktirt unstetigen Functionen sind 1) in *unendlich vielen* Punkten *stetig* und 2) in *unmittelbarer Nähe* jedes Unstetigkeitspunktes *stetig*.

Beweis. 1) Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten, in denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, giebt es nach dem Begriffe der punktirt unstetigen Functionen jedenfalls ein Intervall, in dem die Sprünge $< \sigma$ sind. Aus diesem Intervall scheide man die Punkte aus, in denen Sprünge $> \frac{1}{2}\sigma$ vorkommen und fasse zwischen ihnen ein Intervall in's Auge, in dem die Sprünge daher $< \frac{1}{2}\sigma$ sind. So fahre man fort, indem man die Grösse der Sprünge immer halbirt, und aus dem Intervall zwischen Punkten mit Sprüngen $> \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma$ eines in's Auge fasst, in dem die Sprünge $< \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma$ sind. Macht man diese Operation unendlich oft, so wird das übrig bleibende Intervall entweder von endlicher Grösse sein und dann ist das Behauptete erwiesen, oder das Intervall nimmt unendlich ab. In diesem Falle jedoch wird es sich allmählich auf einen Punkt a concentriren, der allen jenen Intervallen gemeinschaftlich ist; um diesen lagern sich, allmählich sich erweiternd, die Intervalle, die von Sprüngen $> \left(\frac{1}{2}\right)^n \sigma$, $> \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sigma, \cdots$ frei sind, und es wird daher immer ein Intervall ε angegeben werden können, so dass für alle $\delta < \varepsilon$, $f(a+\delta) - f(a)$ numerisch $< \sigma'$ sei, wie klein auch σ' sei; d. h. aber: die Function ist in a stetig. Ueberdem zeigt diese Constructionsweise des Punktes a, dass es auf jeder endlichen Strecke unendlich viele solcher Punkte giebt.

2) Man fixire einen Punkt $x = a$, in dem Sprünge $> \sigma$ stattfinden; dann suche man den nächsten Punkt $x = a + h$, in dem Sprünge $> \sigma$ vorkommen; in dem dazwischen liegenden Intervalle werden die Schwankungen $< 2\sigma$ und daher die Differenz $f(a+\varepsilon) - f(a+\delta)$ numerisch $< 2\sigma$ sein, wenn $\delta, \varepsilon < h$ sind. Wird nun σ beliebig verkleinert, so wird sich zwar das Intervall h, das den Abstand von a bis zu dem nächsten Punkte mit Sprüngen $> \sigma$ angiebt, verkleinern können, immer aber wird in diesem Intervalle $f(a+\varepsilon) - f(a+\delta)$ numerisch $< 2\sigma$ sein, wie klein man auch die von Null verschiedenen ε und δ annehme. Es nähert sich daher $f(a+\varepsilon)$ einer bestimmten, und zwar nach Voraussetzung von $f(a)$ verschiedenen Grenze und dies giebt nach der in § 2. eingeführten Terminologie obigen Satz. *q. e. d.*

Die punktirt unstetigen Functionen *können*, wie I. des § 9. zeigt, in den Punkten, in welchen sie stetig sind, *Differentialquotienten* besitzen. Im folgenden Paragraphen wird gezeigt werden, dass ihnen

ein *Integral* unbedingt zukommt, und sie immer in Fourier'sche Reihen entwickelt werden können.

Die Functionen dieser Classe stehen, wie man sieht, in ihrem Verhalten den stetigen nahe, und es könnte bei solchen Functionen, wie I., II., III. des § 9. selbst unpassend erscheinen, sie unendlich oft auf einer endlichen Strecke unstetig zu nennen, da in jeder Strecke nur eine endliche Anzahl von Sprüngen vorhanden ist, die eine beliebige endliche Grösse σ übersteigen.

Die punk*tirt* unstetigen Functionen bilden den Uebergang von den nur punk*tuell* (in einzelnen Punkten endlicher Anzahl) unstetigen, im Allgemeinen aber stetigen Functionen zu der folgenden Classe, welche alle anderen linear unstetigen Functionen umfasst:

II. Classe. Total unstetige Functionen sind solche, welche in ganzen Intervallen durchaus unstetig sind, oder in strenger Definition:

> *Total linear unstetig* heissen solche Functionen, in denen Punkte mit Sprüngen, die eine gewisse endliche Grösse übertreffen, *ganze Intervalle erfüllen.*

Es versteht sich, dass solche Functionen auch in Intervallen nur punktirt unstetig, oder gar stetig sein können; die Sätze, die oben unter II. erwiesen sind, zeigen aber:

> Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine linear unstetige Function zu den total unstetigen gehört, ist die, dass die Gesammtgrösse aller Intervalle, in denen Schwankungen grösser als eine beliebig kleine Grösse vorkommen, nicht beliebig klein gemacht werden kann, sondern eine bestimmte untere Grenze hat.

Die in I. des vor. § beschriebene Function ist in allen Theilen der betrachteten Strecke total unstetig; die in unendlich vielen Intervallen total unstetige Function II des vor. § ist dagegen in unendlich vielen Strecken sogar stetig.

Ueberall da, wo eine Function total unstetig ist, besitzt sie, wie unmittelbar einleuchtet, *keinen* Differentialquotienten, und, wie im folgenden Paragraphen nachgewiesen werden wird, auch *kein* Integral. Die in Linien total unstetigen Functionen können also den eigentlich analytischen Operationen nicht unterworfen werden: gleichwohl giebt es unter ihnen solche, welche durch einen analytischen Ausdruck dargestellt werden können, wie in IV. des § 9. gezeigt werden wird.

§ 8.

Die Integrale linear unstetiger Functionen.

Während man sich bisher darauf beschränkte, die Existenz von Integralen schlechthin stetiger Functionen mit einer endlichen Anzahl

von Oscillationen allgemein nachzuweisen, so hat Riemann den Begriff des Integrales auch auf linear unstetige erweitert und den feinen Satz bewiesen*):

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ist die, dass die Gesammtgrösse der Intervalle, in denen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser als eine beliebige Grösse σ sind, stets beliebig klein gemacht werden kann.

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass hienach die stetigen Functionen mit unendlich vielen, unendlich kleinen Oscillationen stets ein Integral besitzen.

Es ist jedoch wichtig zu bemerken, dass nach den charakteristischen Eigenschaften der beiden von uns unterschiedenen Classen linear unstetiger Functionen behauptet werden kann:

Die in Linien total unstetigen Functionen sind *niemals*, die punktirt unstetigen *immer* integrabel.

So ist das Integral der in IV. des § 6. beschriebenen Function $f(x)$ aus den Gleichungen:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}, \quad \cdots \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} f(x)\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$$

leicht zu finden. Es ist nämlich z. B.

$$\int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right].$$

Bei punktirt unstetigen Functionen kann stets die Summe der Intervalle, in denen Schwankungen grösser als eine beliebig kleine Grösse σ vorkommen, und daher auch der Beitrag, den diese Intervalle zum Integrale leisten, beliebig verkleinert werden. Findet also in $x=a$ ein Sprung $> \sigma$ statt, so fällt dieser Punkt in eines jener Intervalle, deren Beitrag zu dem Integrale verschwindend klein ist, und es ist daher der Functionswerth $f(a)$ selbst auf das Integral ohne Einfluss, wie denn z. B. das Integral der in III. des § 6. beschriebenen Function $f(x)$

$$\int_0^x f(x)\,dx = x$$

*) Ueb. d. Darstellb. art. 5.

ist, was auch x sei, trotz der unendlich vielen aus dem Zusammenhange gelösten Punkte. Das Integral ist unabhängig von den Unstetigkeiten, welche durch Abänderung des Functionswerthes in einzelnen Punkten hebbar sind. Dagegen ist das Integral wesentlich bestimmt durch die Grenzwerthe, denen sich nach pag. 90, $f(a \pm \delta)$ mit abnehmendem δ annähern; also:

Das Integral einer punktirt unstetigen Function ist unabhängig von den Werthen *in* den Unstetigkeitspunkten selbst, dagegen *nicht* unabhängig von den Werthen in *unmittelbarer Nähe* derselben.

Durch das Integral $f_1(x)$ einer punktirt unstetigen Function

$$f_1(x) = \int_0^x f(x)\,dx$$

ist eine Function $f_1(x)$ vollkommen eindeutig bestimmt. Um ihre Stetigkeit zu untersuchen, betrachte man:

$$f_1(a+\varepsilon) - f_1(a) = \int_a^{a+\varepsilon} f(x)\,dx = \varepsilon M,$$

wo M einen Mittelwerth bezeichnet zwischen dem grössten und kleinsten Werthe, den $f(x)$ in dem Intervalle von $x = a$ bis $x = a + \varepsilon$ annimmt, von den particulären Werthen der $f(x)$ in den Unstetigkeitsstellen selbst abgesehen. Sind $\varkappa$ und h echte Brücke und bezeichnet σ die Schwankung in diesem Intervalle, so kann man $M = f(a + \varkappa\varepsilon) + h\sigma$ setzen, und es ist:

$$\frac{f_1(a+\varepsilon) - f_1(a)}{\varepsilon} = f(a + \varkappa\varepsilon) + h\sigma.$$

Nimmt nun ε unendlich ab, so verkleinern sich die Sprünge σ in dem Intervall unendlich; denn ist a einer jener Punkte, in denen $f(x)$ stetig ist, so leuchtet dies von selbst ein; ist aber $x = a$ ein Unstetigkeitspunkt, so ist doch (s. pag. 90) die Function in seiner unmittelbaren Nähe stetig, und es nähert sich die Schwankung σ im Intervalle ε, aus dem der Punkt $x = a$ selbst ausgeschlossen ist, mit abnehmendem ε ebenfalls der Null.

Somit ist in beiden Fällen die Function $f(x)$ stetig und

$$\lim \frac{f_1(a+\varepsilon) - f_1(a)}{\varepsilon} = \lim f(a + \varepsilon);$$

d. h. der Differentialquotient dieser stetigen Function $f_1(x)$ ist im Punkte $x = a$ gleich dem Grenzwerthe, dem sich $f(a+\varepsilon)$ oder $f(a-\varepsilon)$ nähert, je nachdem er nach rechts oder links hin genommen wird.

Ist die Unstetigkeit in einem Punkte $x = a$ nicht durch Abänderung des Functionswerthes $f(a)$ zu heben und nähern sich also

$f(a+\varepsilon)$ und $f(a-\varepsilon)$ verschiedenen Grenzen, so ist $f_1(x)$ eine stetige Punktfolge von der Eigenthümlichkeit, dass in unendlich vielen Punkten, die sich von links und rechts her treffenden *Zweige einen Winkel* mit einander *einschliessen*. (Vergl. p. 76.) Doch bleibt bei den Integralen aller in § 6. und 9. gegebenen punktirt unstetigen Functionen, die Anzahl der Punkte, in denen die Zweige einen Winkel $> \sigma$ mit einander machen, endlich, wie klein auch σ sei.

Aus der Integrabilität der punktirt unstetigen Functionen folgt nach Riemann's*) Kriterien der Satz:

Jede punktirt unstetige Function, welche in ihren Unstetigkeitspunkten das arithmetische Mittel der beiden Grenzwerthe in unmittelbarer Nähe darstellt, ist in eine Fourier'sche Reihe mit unendlich abnehmenden Coefficienten entwickelbar.

Dieser Satz ist für unseren Zweck besonders deshalb wichtig, weil er die *analytische* Darstellbarkeit aller *möglichen* punktirt unstetigen Functionen beweist, die den angegebenen Charakter in den Unstetigkeitspunkten haben.

Als Beispiel mag nur die Function IV. des § 6. dienen, die in die Reihe:

$$f(x) = \sum A_p \sin p\pi x$$

entwickelt, die Coefficienten:

$$A_p = -\frac{2}{p\pi}\left\{(-1)^p - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos\frac{p\pi}{2^n}\right\}$$

besitzt, wenn für $x = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $f(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ genommen wird.

§ 9.

Analytische Darstellung linear unstetiger Functionen.

Das Princip der Condensation von Singularitäten liefert uns die mannigfachsten linear unstetigen Functionen; zunächst *punktirt* unstetige:

I. Es sei $\varphi(y)$ eine, von $y = -1$ bis $y = +1$ für alle Argumente, mit Ausnahme des Punktes $y = 0$, stetige und nach dem Taylor'schen Satze entwickelbare Function, die, wenn y sich dem Punkte $y = 0$ von der rechten Seite her nähert, die Grenze $+1$ erreicht, während sie für negative, zu Null werdende y den Grenzwerth -1 hat.

Analytisch kann, wie bekannt, jede solche Function in eine nach

*) A. a. O. art. 10.

dem Modul 2π periodische Sinusreihe entwickelt, oder durch ein Fourier'sches Integral dargestellt werden.

Die aus $\varphi(y)$ abgeleitete Reihe:

$$f(x) = \sum \frac{\varphi(\sin n x \pi)}{n^s}$$

ist dann für alle *irrationalen* x stetig und besitzt in diesen Punkten sogar einen *Differentialquotienten.*

Für *rationale* $x = \frac{\nu}{\mu}$ in ihrer reducirten Form ist von solchen Gliedern, welche sich mit abnehmendem ε der Null nähern, abgesehen:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} + \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s},$$

wenn wir statt $\varphi(\pm r\mu\varepsilon\pi)$ sogleich den Werth ± 1, je nachdem $r\nu$ gerade oder ungerade ist, einsetzen. Ferner ist:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} - \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = -\frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s}.$$

Die Function ist also in diesen Punkten so unstetig, dass sie, je nachdem man von $x = \frac{\nu}{\mu}$ nach der positiven oder negativen Seite fortschreitet, um dieselbe Grösse steigt oder fällt; ihr Werth in jedem solchen Unstetigkeitspunkte ist also das arithmetische Mittel der beiden Werthe, denen sie sich beiderseits annähert. Die Sprünge sind an den Punkten $x = \frac{\nu}{\mu}$ mit geradem Zähler andere als an denen mit ungeradem. Denn sie sind an jenen $= \frac{1}{\mu^s} L$, an diesen $= \frac{1}{\mu^s} L'$, wo

$$L = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^s}, \quad L' = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r^s} = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) L.$$

Der Verlauf der Function $f(x)$ kann nun, wenn s beträchtlich gross genommen wird, etwa so beschrieben werden: Die Werthe der Function $f(x)$ sind von denen der stetigen Function $\varphi(\sin x\pi)$ nicht beträchtlich verschieden, und es bestimmt also $\varphi(\sin x\pi)$ den ungefähren Verlauf der Punktreihe, welche $f(x)$ darstellt. In allen irrationalen Punkten x gleicht $f(x)$ einer stetigen Curve und besitzt einen Differentialquotienten. Nähert man sich aber von links her einem rationalen Werthe $x = \frac{\nu}{\mu}$ mit geradem Zähler ν, so springt, wenn man zu diesem Werthe selbst gelangt, die Function plötzlich um $\frac{1}{\mu^s} L$ in die Höhe; und lässt man sich x weiter nach der positiven Seite

bewegen, so tritt nochmals ein Sprung von derselben Grösse ein. Nähert man sich dagegen einem $x = \frac{\nu}{\mu}$ mit ungeradem Zähler, so stürzt $f(x)$ plötzlich um $\frac{1}{\mu^2} L'$ abwärts, und zeigt denselben Abfall nochmals, wenn man weiter vorwärts geht.

Die grössten Sprünge finden statt in $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ u. s. f.; je mehr μ wächst, d. h. in je weniger einfachen Zahlen der rationale Werth x ausgedrückt werden kann, um so kleiner sind die Sprünge. Wenn man sich von dem Verlaufe von $f(x)$ durch eine Zeichnung eine Vorstellung verschaffen will, so wird man bald an die Grenze kommen, von wo an die Sprünge nicht mehr sichtbar sind. Denn es giebt nur eine endliche, bestimmte Anzahl von Punkten, in denen Sprünge $> \sigma$ vorkommen, wie klein auch σ sei; man kann dieselben aus $\frac{1}{\mu^2} L > \sigma$ bestimmen; sie entsprechen den $\mu < \left(\frac{L}{\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$, welcher Bedingung stets, so lange σ von Null verschieden, nur eine endliche Anzahl von ganzen Zahlen μ genügen.

Je näher das rationale $x = \frac{\nu}{\mu}$ einer irrationalen Zahl kommt, um so grösser werden ν, μ, also um so kleiner die Sprünge, und es ist hieraus begreiflich, wie $f(x)$ in irrationalen Punkten den Charakter einer stetigen Function annehmen kann: Die Werthe von $f(x)$ bilden keinen eigentlichen Curvenzug, sondern eine aufgelöste Reihe von Punkten, welche sich jedoch um die irrationalen x so zusammendrängen, dass sie für ein unendlich kleines Intervall in deren Umgebung als eine stetige Punktfolge angesehen werden können.

II. Man verstehe unter $\varphi(y)$ eine Function, welche sich ebenso verhält, wie die unter I., nur dass sie auch in $y = +1$ und $y = -1$ verschwindet und in unmittelbarer Nähe jener Punkte die Grenzwerthe $+1$ und -1 hat. Beispiele solcher Functionen geben die periodischen Reihen, z. B.

$$\varphi(y) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)y\pi}{2n+1}.$$

In diesem Falle hat die abgeleitete Function:

$$f(x) = \sum \frac{\varphi(\sin nx\pi)}{n^2}$$

etwas complicirtere Unstetigkeiten. In irrationalen und solchen rationalen $x = \frac{\nu}{\mu}$ in denen μ ungerade ist, verhält sie sich, wie die vorhin betrachtete; in den Punkten $x = \frac{\nu}{2\mu}$ aber ist:

$$f\left(\frac{\nu}{2\mu}\pm\varepsilon\right)-f\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)=\pm\frac{1}{\mu^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2r)^2}+\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)}}{\mu^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(2r+1)^2},$$

wie man bei näherer Betrachtung leicht finden wird; und es ist nicht, wie bisher, $f\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)$ das arithmetische Mittel der beiden benachbarten Sprungwerthe.

III. Das Quadrat einer Function, wie sie in I. angenommen wurde, also etwa von:

$$\varphi(y)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)y}{2n+1}$$

ist eine zwischen $-\pi$ und $+\pi$ den Werth $+1$ repräsentirende Function, welche *nur* in dem Punkte $y=0$ eine plötzliche *Unstetigkeit* zeigt, die durch Abänderung eines einzigen Functionswerthes hebbar wäre*).

Bildet man nun:

$$f(x)=\sum\frac{[\varphi(\sin n!x\pi)]^2}{n^2},$$

so unterscheidet sich $f(x)$ in allen irrationalen Punkten x nicht von der Constanten:

$$L=\sum\frac{1}{n^2};$$

nur in den rationalen Punkten $x=\frac{\nu}{\mu}$ stürzt sie plötzlich um $\frac{1}{\mu^2}L$ herab. Die stetige Punktfolge ist also nur in diesen unendlich vielen Punkten unterbrochen und könnte durch Abänderung der Functionswerthe in diesen Punkten zu einer stetigen gemacht werden.

IV. Was nun die in Strecken *total* unstetigen Functionen betrifft, so lässt der Umstand, dass sie den analytischen Operationen des Differentiirens und Integrirens niemals unterworfen werden können, die Vermuthung aufsteigen, dass sie sich der Darstellung durch analytische Formen entziehen möchten und hier die Grenze sei, welche die den Analytiker interessirenden Functionen von den transcendentalen, d. h. als möglich nur denkbaren trenne. Diese Ansicht bestätigt sich jedoch nicht, denn ich hoffe ein einwurfsfreies Beispiel**) einer total unstetigen

---

*) Wir haben, wie ausdrücklich bemerkt werden mag, in $[\varphi(y)]^2$ ein Beispiel einer *analytisch* darstellbaren Function, welche jene Singularität zeigt.

**) Zwar sind schon von Riemann (Ueb. d. Darst. art. 13) in den Formeln:

$$\sum\frac{(nx)}{n},\quad\sum\frac{1}{n}\cos(n^2x),\quad\sum\frac{1}{n}\sin(n^2x)$$

Beispiele von Functionen gegeben, welche zwischen zwei noch so nahen Werthen

Function durch eine Modification des Princips der Condensation gefunden zu haben:

Bedeutet nämlich φ dieselbe Function, als zuvor (unter Nr. III.), so ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \left[\frac{1}{\varphi(\sin nx\pi)}\right]^2 .$$

eine Function, welche für alle irrationalen x den Werth

$$L = \sum \frac{1}{n^s}$$

besitzt; für alle rationalen Werthe von x aber unendliche Glieder in sich befasst, welche, da sie sämmtlich positiv sind, sich nicht gegenseitig zerstören können; die Function ist also für alle rationalen x unendlich gross. Wenn wir jedoch unendliche Werthe der Function auch hier ausschliessen wollen, so haben wir in dem Quotienten

$$f(x) = \frac{\sum \frac{1}{n^s}}{\sum \frac{1}{n^s}\left[\frac{1}{\varphi(\sin nx\pi)}\right]^2}$$

eine für alle Werthe des Argumentes x völlig *bestimmte total unstetige* Function, welche für alle *irrationalen* x den Werth 1, für alle *rationalen* x den Werth 0 besitzt.

Ein anderes weniger einfaches Beispiel einer solchen total unstetigen Function ist in der II. Note im Anhang behandelt worden.

§ 10.

Schlussbetrachtungen zur Feststellung des Functionsbegriffes.

Blicken wir nun auf das durchwanderte Gebiet zurück, und fragen wir, welchen Nutzen unsere Untersuchungen für die Aufklärung des Functionsbegriffes gebracht haben.

Es war von vornherein gewiss, dass wenn wir den Dirichlet'schen Begriff der Function zu Grunde legen, es allgemeine Eigenschaften aller Functionen, die unter denselben fallen, nicht geben kann.

---

des Argumentes unendlich oft aus dem Endlichen in's Unendliche überspringen. Da aber dort nur von rationalen Werthen von x die Rede ist, so bleibt es zweifelhaft, ob nicht die Reihen für irrationale in einer Weise divergiren, dass sie keinen bestimmten Werth mehr repräsentiren. Indem ich aber Unbestimmtheiten der Functionen von meinen Untersuchungen vorläufig ganz ausschliessen zu sollen glaubte, lege ich einiges Gewicht darauf, dass in der im Texte gegebenen Reihe jede Unbestimmtheit beseitigt ist, indem sie aus einer Reihe lauter positiver Glieder besteht, deren Summe entweder endlich und bestimmt, oder unendlich gross ist.

Aber man ist geneigt, zu vermuthen, dass wenn der ältere Euler'sche Begriff zu Grunde gelegt, und unter einer Function nur eine in Rechnungsoperationen gesetzmässig dargestellte Grössenbeziehung verstanden wird, die so definirten Functionen einen engeren, in sich organisch abgeschlossenen Kreis bilden möchten, dem eine Anzahl gemeinsamer Eigenschaften allerdings zukäme, in's Besondere: die Stetigkeit, die Differentiirbarkeit, die Integrabilität, Bestimmtheit und Entwickelungsfähigkeit nach dem Taylor'schen Lehrsatze — bei allen diesen Eigenschaften einzelne singuläre Punkte angenommen. Diese Vermuthung hat sich *nicht* bestätigt. Wir haben gezeigt, dass es durch convergente Reihen von Grössenoperationen möglich ist, Functionen darzustellen, welche in unendlich vielen Punkten eines endlichen Linienstückes unstetig oder unendlich in der verschiedensten Weise, oder unbestimmt*) werden, welche nirgends integrirt und in Potenzreihen entwickelt werden können, und welche selbst, wo sie stetig sind, einen bestimmten Differentialquotienten nicht besitzen. Kurz: Jene beiden Begriffe der Functionen, so verschieden sie auf den ersten Blick zu sein scheinen, haben sich insofern wesentlich verschieden nicht erwiesen, als wir Functionen aller möglichen Arten**) durch analytische Formeln darzustellen im Stande waren.

Beide Begriffe sind somit unzureichend, um die Grundlage einer allgemeinen Theorie der Functionen bilden zu können. Denn die Aufgabe aller Mathematik ist die, aus gegebenen Relationen, die sich auf ein Gebiet von Objecten beziehen, neue abzuleiten, indem man dabei die allgemeinen Eigenschaften des Begriffes, dem alle jene Objecte unterstehen, zur Anwendung bringt. Sind aber solche allgemeinen Eigenschaften nicht vorhanden, so bleibt jede Transformation der gegebenen Relationen eine leere Tautologie.

---

*) Die Functionen, welche in einzelnen Punkten oder gar Linien *unbestimmt* werden, haben wir aus unseren obigen Betrachtungen ausgeschlossen, und es mag daher hier bemerkt werden, dass solche in analytischer Darstellung mittelst des Principes der Condensation

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(\sin n x \pi)}{n^s}$$

leicht gegeben werden können, wenn $\varphi(y)$ eine für $y = 0$ nicht unbestimmt scheinende, sondern *wirklich* und *nothwendig unbestimmte* Grösse ist. Setzt man z. B.

$$\varphi(y) = \sin \frac{1}{y}, \quad \text{oder} \quad \varphi(y) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{y}}},$$

so ist $f(x)$ für alle irrationalen x bestimmt und endlich, für rationale x aber durchaus unbestimmt.

**) Dies ist cum grano salis zu verstehen; denn es ist noch nicht ausgemacht, ob sich einzelne *denkbare* Fälle nicht doch der Analysis entziehen.

So, wenn es sich z. B. darum handelte, eine Function $f(x)$ aus der Functionalgleichung:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

abzuleiten, so ergiebt sich sofort für alle rationalen μ:

$$f(\mu) = \mu f(1);$$

ebenso können alle Functionswerthe für Argumente $\mu\xi$, welche rational von einer und derselben irrationalen Grösse ξ abhängen, durch den Functionswerth $f(\xi)$ dargestellt werden, indem $f(\mu\xi) = \mu f(\xi)$. Auch stehen die Functionswerthe für rationale und irrationale Werthe des Argumentes, und letztere unter einander vielfach in Zusammenhang, durch Gleichungen wie z. B.

$$f(2+\sqrt{3}) + f(2-\sqrt{3}) = f(4)$$

u. s. w. Trotzdem ist, soviel ich sehe, es nicht möglich, direct anzugeben, wie $f(\xi)$ von seinem Argumente abhängt; denn die verschiedenen Werthreihen für die wesentlich verschiedenen Irrationalitäten, z. B. $f(\mu\sqrt{2})$, $f(\mu\sqrt{5})$, $f(\mu\sqrt[3]{2})$ u. s. w. stehen ausser Zusammenhang mit einander; und, wie es auch sei, es liegt jedenfalls nicht in der Absicht eines Analytikers, der auf jene Functionalgleichung bei seinen Untersuchungen stösst, in diese intricaten Verhältnisse der Irrationalitäten einzugehen. Man wird vielmehr die Bestimmung $f(\mu) = \mu f(1)$ sofort auch für irrationale μ in Anspruch nehmen, d. h.:

Macht man die Voraussetzung, die Function solle überall stetig sein (oder die engere, $f(y)$ solle sich in unendlicher Nähe von $y = 0$ stetig der Null nähern, von der dann die allgemeine Stetigkeit die Folge ist), so ist das Problem mit einem Schlage gelöst, indem die Functionswerthe für irrationale x sich zwischen die $f(x) = xf(1)$ für rationale x stetig einordnen.

Oder ein anderes Beispiel: Es sei eine Function für alle Werthe von x zwischen 0 und 1 durch die unendliche Reihe

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

gegeben; welche Werthe hat $f(x)$ für andere x? Diese Frage ist schlechterdings nicht zu beantworten, so lange wir den Dirichlet'schen Functionsbegriff zu Grunde legen, weil eben gar kein Zusammenhang zwischen den benachbarten Functionswerthen besteht, mit anderen Worten: weil eine Function bisher nicht ein *Gesetz* repräsentirt, sondern ihre Werthe ganz willkürlich aufeinanderfolgen.

Ein *Gesetz* ist überall da vorhanden, wo aus einer Reihe von Merkmalen auf das Vorhandensein anderer, nicht gegebener oder beobachteter geschlossen wird. Die Function unter unserem bisherigen Begriffe, der rein nominell und ohne realen Inhalt ist, sind daher

gesetzlos, *illegitim* zu nennen; sie können aber zu *legitimen* werden, indem sie sich einem Gesetze unterordnen.

Welches soll nun das Gesetz sein, dem diese Functionen unterworfen werden? Es hält nicht schwer, sich zu überzeugen, dass, soll anders der Functionsbegriff angemessen sein und den Bedürfnissen des Analytikers entsprechen, wir uns des allgemeinen hodegetischen Principes bedienen müssen, das ich bereits in meiner Theorie der complexen Zahlen als das jedes systematischen Fortschrittes für jenes Gebiet nachgewiesen, und das *Princip der Permanenz formaler Gesetze* genannt habe*).

Ich bin dort von den ganzen Zahlen und den auf sie bezüglichen elementaren Rechnungsoperationen ausgegangen, und zeigte, wie man von diesen aus das Zahlengebiet allmählich erweitert, indem man zur Auflösung von Aufgaben, die in dem bekannten Gebiete unrealisirbar sind, neue Zeichen, Zahlen einführt, welche denselben formalen Operationsgesetzen, als die 4 Species sie enthalten, unterliegen. Nachdem so das Gebiet bis auf das der gemeinen complexen Zahlen erweitert war, wurde nachgewiesen, dass jede Aufgabe, welche nur eine endliche Anzahl jener Operationen zu ihrer Aufstellung voraussetzt, in dem Gebiete der gemeinen complexen Zahlen ihre Lösung findet, und so ein organischer Abschluss in diesem Zahlengebiete gefunden wird. Gleichwohl waren noch andere complexe Zahlensysteme *möglich*, welche theilweise anderen formalen Gesetzen folgten, und es war nöthig, dies festzustellen, weil nur dadurch die Eigenthümlichkeit der gemeinen complexen Zahlen in helles Licht gesetzt wurde.

In ähnlicher Weise nun, als für das System der Zahlen (oder Grössen) die ganzen Zahlen und Operationsgesetze typisch waren, und weiterhin für permanent erklärt wurden, so müssen nun für das System der Functionen die algebraischen Ausdrücke, als die aus den vier Species direct abgeleiteten, die permanenten Gesetze an die Hand geben. Denn wie dort die ganzen Zahlen gewissermassen das Gerüst bilden, auf das mehr oder weniger direct alle anderen Zahlen gestützt werden, so sind die algebraischen Functionen, als die, deren Werthe *eigentlich* berechnet werden können, die typischen Formen für Functionen im Allgemeinen, die, insofern sie eben Grössenbeziehungen darstellen, und sich daher *berechnen* lassen sollen, ebenfalls durch die vier Elementaroperationen ausgedrückt werden müssen; nur werden diese transcendenten Functionen durch eine endliche Reihe von Operationen nicht erschöpft, sondern bedürfen eines unendlichen Processes.

Die so nach dem Typus algebraischer ganzer und gebrochener

---

*) Vorles. üb. d. complexen Zahlen und ihre Functionen. Leipzig 1867. Th. I. p. 10—13.

Ausdrücke gebildeten transcendenten Functionen entsprechen nun in gewisser Weise den irrationalen und gemeinen complexen Zahlen, die nach dem Typus der ganzen und rational gebrochenen Zahlen gebildet sind; und ebenso, wie es unendlich viele Classen z. B. von irrationalen Grössen giebt, so auch unendlich viele Classen transcendenter Functionen.

Wie ferner höhere complexe Zahlen gedacht und construirt werden können, die sich den formalen Gesetzen der Arithmetik nicht unterordnen*), so auch *illegitime* Functionen, welche sich nicht an den Typus algebraischer Formen anlehnen. Ganz ebenso aber, wie die Betrachtung dieser höheren Zahlensysteme ein systematisches Bedürfniss war, um sich einerseits erfahrungsmässig von der Möglichkeit derselben, andererseits davon zu überzeugen, dass der Begriff der gemeinen complexen Zahlen den allgemeinen Begriff der Zahl keineswegs erschöpfe, so ist auch die thatsächliche Nachweisung der Existenz von Functionen der illegitimsten Arten, wie ich sie in dieser Abhandlung zu geben versucht habe, nothwendig gewesen, um unzweifelhaft darzuthun, dass die Legitimität der Functionen uns keineswegs von einer mysteriösen, eisernen Nothwendigkeit dictirt wird, die in der „Natur der Sache" liegt, wie man häufig hören kann, sondern dass sie eine conventionelle, aber weise und adäquate Beschränkung ist, die wir uns auferlegen, — und über deren Grenzen wir eben desshalb noch nicht im Reinen sind.

Wenn es sich nämlich nun darum handelt, das bestimmte System der Bedingungen aufzustellen, welches über die Legitimität der Functionen entscheidet, so werden wir dasselbe zunächst so wählen, dass es mit den Voraussetzungen, die man zuweilen bewusst, meistens unbewusst, bei analytischen Untersuchungen zu machen pflegt, übereinstimmt, und nennen

> *legitime* Functionen solche, welche für alle reellen Werthe des Argumentes, mit Ausnahme einzelner, auf jedem endlichen Intervall in niemals unendlicher Zahl vorhandener Punkte, bestimmt, endlich und stetig sind, und deren sämmtliche Differentialquotienten dieselben Eigenschaften besitzen.

Solche Functionen sind aber nach dem Taylor'schen Satze immer entwickelbar, d. h. es lässt sich stets ein Intervall für x angeben, in dem die Entwickelung von $f(a + x)$ nach aufsteigenden Potenzen von x convergirt, so lange a nicht mit einem der Punkte zusammenfällt, in dem die Function oder einer ihrer Differentiatquotienten unbestimmt, unendlich oder unstetig wird. Die Werthe einer Function sind daher zwischen zwei Unstetigkeitspunkten immer in der Weise mit einander verbunden, dass, wenn nur die Functionswerthe für das kleinste end-

*) Ibid. p. 99.

liche Intervall bekannt sind, sie für die ganze Strecke mit Nothwendigkeit bestimmt sind. Sind in einer solchen Strecke für zwei endliche Intervalle zwei Reihen von Werthen gegeben, so kann es niemals zweifelhaft sein, ob sie zu derselben Function gehören, oder nicht.

Wie steht es aber mit der Fortsetzung einer solchen Function über jene Unstetigkeitspunkte? Die Taylor'schen Reihen reichen über diese nicht hinaus, und es bleibt gänzlich unbestimmt, was wir unter einer, zwischen zwei Unstetigkeitspunkten völlig bestimmten Function ausserhalb dieser Strecke verstehen sollen. Jene Punkte trennen, wie Barrièren, die verschiedenen Strecken, und es kann nach der gegebenen Definition nicht entschieden werden, ob zwei, durch einen solchen Punkt getrennte Werthreihen zu einer und derselben Function gehören, oder nicht.

In welcher Weise man durch Einführung eines neuen Principes diese Hindernisse zu überwinden versucht hat, ist schon oben p. 66 gezeigt; eine unzweideutige und annehmbare Form ist aber diesem Principe weder jemals gegeben worden, noch dürfte sie sich überhaupt finden lassen.

Die Wissenschaft musste andere Mittel suchen, um die Functionen über jene Unstetigkeitspunkte hinaus fortzusetzen; und man entdeckte, dass man, anstatt diese Punkte gewissermassen zu *überspringen*, sie vielmehr *umgehen* könne, indem man die Variabeln nicht nur reelle, sondern auch *complexe* Werthe durchlaufen lässt.

Ist hiedurch dargethan, dass man bei der Beschränkung der Variabilität auf reelle Werthe des Argumentes zu einer, die Bedürfnisse der Analyse befriedigenden Definition der Function nicht gelangen kann, so ist damit das Ziel erreicht, das wir uns in dieser Abhandlung gesteckt haben.

Sind wir aber einmal im Gang, so wird es erlaubt sein, noch einige Schritte weiter zu thun, um eine Perspective in das neue Gebiet zu gewinnen.

Eine Function w zweier Variabelen x, y wird dann als die Einer Veränderlichen $(x + yi)$ angesehen werden können, wenn sie sich in eine Form bringen lässt, dass x und y in ihr nur in der Verbindung $(x + yi)$ erscheinen. Diese vorläufige Definition hat nur dann eine Bedeutung, wenn die Function nach dem Typus algebraischer Functionen gebaut ist, d. h. aus ihren Veränderlichen durch die vier arithmetischen Grundoperationen abgeleitet. Sie hat dann, wenn ihre Differentialquotienten überhaupt bestimmt sind, die Eigenschaft, dass

$$i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Während nun jene Definition ihre Bedeutung verliert, wenn w nicht durch arithmetische Operationen bestimmt wird, so behält diese Glei-

chung ihre Bedeutung in jedem Falle; und wir definiren nun eine Function w zweier Veränderlichen x, y als eine *monogene* Function der complexen Veränderlichen $(x + yi)$, indem wir letztere Eigenschaft für permanent erklären.

Damit ist aber zugleich gesetzt, dass jene Differentialquotienten $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ überhaupt existiren, einen bestimmten und endlichen Werth haben; denn hätten die Quotienten der Incremente von w und x, y innerhalb eines endlichen Stückes der Ebene, in welcher die complexe Veränderliche $(x + yi)$ dargestellt wird, keine bestimmten und endlichen Grenzwerthe, so liesse sich in demselben gar nicht constatiren, ob die Function als die Einer complexen Variabelen angesehen werden kann. So ergiebt sich die Voraussetzung, dass eine legitime Function im Allgemeinen bestimmte und endliche Differentialquotienten hat, als eine fundamentale, und wir definiren nun:

> Eine monogene Function von $(x + yi)$ heisst eine veränderliche complexe Grösse w, wenn sie sich mit x und y so ändert, dass im Allgemeinen, d. h. abgesehen von einzelnen Punkten und Linien, die Differentialquotienten $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ überall bestimmt und endlich sind und der Bedingung
>
> $$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$
>
> genügen.

Dies ist nun das allgemeine einfache Gesetz, dem alle legitimen, d. h. monogenen Functionen untergeordnet werden, und das wir als die Riemann'sche Definition*) zu bezeichnen haben. Da nach bekannten Sätzen mit der Endlichkeit, Stetigkeit und Bestimmtheit der Function selbst und ihrer ersten Differentialquotienten dieselben Eigenschaften auch für alle anderen Differentialquotienten gesetzt sind, so kann eine monogene Function immer nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickelt werden, und die obige Bestimmung der im reellen Gebiete stetigen Function erscheint jetzt unserer neuen Definition untergeordnet.

Nun erst gewinnt das Problem, eine für eine endliche Strecke oder innerhalb eines endlichen Flächenstückes gegebene Function fortzusetzen, d. h. für alle Punkte der ganzen Ebene zu bestimmen, eine feste Bedeutung, wenn man eben die Function obiger Bedingung unterwirft. Nun stehen die Functionswerthe für die verschiedenen Argumente in unlöslicher Verbindung mit einander und es wird nicht zweifelhaft sein, ob zwei in verschiedenen Theilen der Ebene gegebene Werthreihen zu derselben Function gehören, — *wenn* sich nicht jetzt, wo

*) Grundl. f. e. all. Th. p. 2.

wir jene, die Fortsetzung im reellen Gebiete störenden, und alle anderen Unstetigkeits*punkte*, leicht umgehen können, neue Barrièren erheben, in Gestalt von *Linien*, in denen die Function aufhört, bestimmt, endlich und stetig zu sein. Obgleich wir nämlich Unstetigkeiten, die über ganze Flächenstücke ausgedehnt sind, durch obige Definition der Monogeneität ausgeschlossen haben, so konnten wir nicht umhin, Unstetigkeiten in Punkten und Linien zuzulassen, wenn sie sich mit Nothwendigkeit aus dem Verlaufe der Function in ihren stetigen Theilen ergeben. Dass solche Linien, in denen die Function punktirt oder gar total unstetig ist, trotz der Monogeneität in der That vorkommen, ist im Anhang (Note III.) gezeigt, und zwar scheidet in den angeführten Beispielen diese Unstetigkeitslinie als Kreis den inneren Raum, in dem die Function zunächst festgestellt gedacht wird, in der Weise von dem äusseren ab, dass beide durch keinen Flächenstreifen von endlicher Breite, in dem die Function die zur legitimen Fortsetzung nothwendigen Eigenschaften hätte, mit einander zusamhängen.

Die Function ist dann auf die innere Kreisfläche beschränkt, sie verliert für Punkte ausserhalb des Kreises ihre Bedeutung, d. h. unser Functionsbegriff giebt keinerlei Aufschluss darüber, was wir uns unter Functionswerthen im äusseren Raume zu denken haben.

Es ist nun aber in der Note III. das merkwürdige Factum hervorgehoben, dass es trotzdem analytische Entwickelungen solcher Functionen geben kann, welche auch ausserhalb ihre Bedeutung nicht verlieren, sondern innerhalb und ausserhalb des Kreises in gleicher Weise gebildet, und mit Ausnahme jener Kreisperipherie überall convergent und monogen sind.

Insofern man nun solchen Entwickelungen, welche zu beiden Seiten der geschlossenen Unstetigkeitslinien dieselben bleiben, die Kraft nicht absprechen kann, die innerhalb gegebene Function auch ausserhalb des Kreises zu repräsentiren, so erhebt sich die Frage:

In welchem Sinne sind diese beiden, durch eine unübersteigliche Schranke getrennten Werthreihen als zu Einer Function gehörig anzusehen?

Note I (zu pag. 71).

Begriff der Grenze.

Gegenüber den häufig mangelhaften, theils zu viel, theils zu wenig enthaltenden Definitionen des in unsere Untersuchungen tief eingreifenden Begriffes der „Grenze", glaube ich hier seine strenge Bestimmung in aller Kürze geben zu sollen, indem ich in Bezug auf die Begründung

des Folgenden auf eine andere kleine Arbeit von mir verweise*). Der Begriff Function ist hier im Sinne von § 1. zu nehmen:

> Wenn es für eine Function $f(x)$ eine bestimmte endliche Grösse A giebt, und ein Intervall von dem festen Punkte $x = a$ aus bis $x = a + \varepsilon$ für jedes beliebig kleine σ bestimmt werden kann, so dass die Differenz $A - f(a + \delta)$ jene Grösse σ numerisch nicht übersteigt, während δ *alle* innerhalb jenes Intervalles 0 bis ε liegenden Werthe, $\delta = 0$ *ausgeschlossen*, durchläuft, so heisst A die *Grenze*, welcher sich $f(a + \delta)$ mit unendlich abnehmendem δ unendlich annähert.

Wird hierin ε positiv vorausgesetzt, so habe ich, indem ich $f(x)$ als Ordinate zu der Abscisse x construirt denke, A die Grenze genannt, welcher sich $f(x)$ nähert, wenn man von rechts her zu dem Punkte $x = a$ gelangt. Die Grenze, der sich $f(a - \delta)$ nähert, nenne ich die Grenze auf der linken Seite.

> Wenn es dagegen *keine* bestimmte endliche Grösse A giebt, so dass die Differenz $A - f(a + \delta)$ für *alle* von Null verschiedenen $\delta < \varepsilon$ *immer* numerisch kleiner, als eine beliebig kleine Grösse σ bleibt, wie klein man auch ε bestimmen möge, so sagen wir, es nähere sich $f(a + \delta)$ für unendlich abnehmende δ *keiner* Grenze.

In vielen, und zwar in den meisten uns oben interessirenden Fällen ist es nicht möglich, jene Grenzwerthe, denen sich Functionen annähern, ihrer wirklichen Grösse nach zu bestimmen; vielmehr wird man sich begnügen müssen, die *Existenz* einer Grenze überhaupt festzustellen, und es dient dazu folgender aus dem Begriffe der Grenze abgeleiteter Satz:

> Wenn sich ein Intervall ε so bestimmen lässt, dass für alle in diesem enthaltenen, von Null verschiedenen δ die Differenz:
>
> $$f(a + \varepsilon) - f(a + \delta)$$
>
> numerisch kleiner, als eine beliebig kleine Grösse σ ist, so nähert sich $f(a + \delta)$ mit unendlich abnehmenden δ einer endlichen bestimmten Grenze.

Man bemerkt übrigens, dass nach der in § 2. festgesetzten Terminologie der Begriff auch so gefasst werden könnte:

Einer Grenze nähert sich $f(a + \delta)$ für unendlich abnehmende δ, wenn $f(x)$ in unmittelbarer Nähe von $x = a$ (auf der rechten Seite) stetig ist.

---

*) Encyklopädie von Ersch u. Gruber. Art. Grenze.

Note II (zu pag. 98).

Beispiele von Functionen, welche in ganzen Linien total unstetig sind.

Ein in mancher Hinsicht interessantes Beispiel einer total unstetigen Function giebt die Reihe:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^m}{(m \sin m x \pi)^2},$$

worin ω einen positiven echten Bruch bedeuten soll.

Ist x *rational*, so erscheinen in dieser Reihe Glieder, die einen verschwindenden Nenner sin $mx\pi$ haben, und es wird daher für solche x, das aus lauter positiven Gliedern bestehende $f(x) = \infty$.

Ist x *irrational*, so bestimme man für ein Glied $m = \mu$ die ganze Zahl ν so, dass

$$\mu x - \nu = \varepsilon_\mu$$

möglichst klein werde und erhält:

$$\sin m x \pi = (-1)^\nu \sin \varepsilon_\mu \pi.$$

Es fragt sich nun, ob ε_μ so klein werden, und $\mu \varepsilon_\mu$ mit wachsendem μ in dem Grade unendlich abnehmen könne, dass die obige Reihe zu einer divergenten wird.

Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir uns die irrationale Grösse x in einen unendlichen Kettenbruch

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \text{in infin.}}}$$

entwickelt denken, in dem, was immer angenommen werden kann, die $a_0, a_1, a_2, \cdots$ ganze positive Zahlen sind.

Die Näherungsbrüche, welche sich bekanntlich von oben und unten dem Werthe x unbegrenzt annähern, seien $\frac{\nu_n}{\mu_n}$; um ihre Differenzen von x selbst zu erhalten, führen wir $x_1, x_2, \cdots$ mittelst der Relationen:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad \cdots, \quad x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

ein und erhalten, wie bekannt:

$$x - \frac{\nu_n}{\mu_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n (\mu_n x_n + \mu_{n-1})}.$$

Ist nun der Summationsbuchstabe m in obiger Reihe einem solchen Näherungsnenner μ_n gleich, so ist diejenige ganze Zahl ν, welche $(\mu_n x - \nu)$ am kleinsten macht, bekanntlich $\nu = \nu_n$ und die Differenz $\mu_n x - \nu_n = \varepsilon_n$, wo sich:

$$\varepsilon_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\mu_n x_n + \mu_{n-1}}$$

bestimmt.

Es bestehen nun für grosse μ_n die Gleichungen:

$$\pm \frac{\pi}{\mu_n \sin \mu_n x\pi} = \pm \frac{\pi}{\mu_n \sin \varepsilon_n \pi} = \frac{\pm 1}{\mu_n \varepsilon_n} = x_n + \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n},$$

und es ist daher, wie man leicht sieht:

$$\frac{\pi^2}{(\mu_n \sin \mu_n x\pi)^2} < (a_n + 2)^2.$$

Es lässt sich nun zeigen*), dass für alle Werthe des m, welche zwischen dem Näherungsnenner μ_n und dem folgenden μ_{n+1} liegen, dasselbe Grössenverhältniss besteht, und daher die Summe:

$$\pi^2 \sum_{m=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} \frac{\omega^m}{(m \sin mx\pi)^2} < (a_n+2)^2 \sum \omega^m = (a_n+2)^2 \omega^{\mu_n} \frac{1-\omega^{\mu_{n+1}-\mu_n}}{1-\omega}$$

und somit:

$$\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega^m}{(m \sin mx\pi)^2} < \frac{1}{1-\omega} \sum_n (a_n+2)^2 (\omega^{\mu_n} - \omega^{\mu_{n+1}}),$$

so dass:

$$\pi^2 f(x) < (a_0+2)^2 \omega + \sum_n [(a_n+2)^2 - (a_{n-1}+2)^2] \omega^{\mu_n}.$$

Bedenkt man nun, dass die Näherungsnenner $\mu_n = a_{n-1}\mu_{n-1} + \mu_{n-2}$, als aus den positiven a zusammengesetzt, viel schneller als die a_n selbst zunehmen, so leuchtet ein, dass diese Reihe für unendlich viele irrationale x *convergiren* wird; so z. B. für die Quadratwurzeln rationaler Zahlen, welche sich bekanntlich in periodische Kettenbrüche der verlangten Art entwickeln lassen, in denen die Nenner a_n endlich sind. Ferner convergirt unsere Reihe für die irrationalen Zahlen $x = e$, $x = \frac{1}{e}$, $x = \tan 1$ u. s. w., wie die Gauss'schen Kettenbrüche für e^y, $\tan y$ zeigen, in denen die Nenner alle positiv gemacht werden können und sehr langsam in's Unendliche wachsen.

Divergiren wird die Reihe für alle diejenigen irrationalen Werthe, für welche a_n mit n so rapid und stossweise wächst, dass $(a_n^2 - a_{n-1}^2)\,\omega^{\mu_n}$ nicht in gehöriger Weise zu Null abnimmt. Die geringe Ausbildung der Theorie numerischer Kettenbrüche wird zu speciellen Angaben, welche Irrationalitäten hiezu gehören, nicht hinreichen; indessen bedarf es solcher auch nicht für unsern Zweck.

*) Ich bedauere, dass ich aus Mangel an Raum gezwungen bin, diesen Beweis, der zu weit in die Theorie der Kettenbrüche führen würde, auf eine andere Gelegenheit zu verschieben.

Denn es genügt zu wissen, dass unsere Function $f(x)$ für unendlich viele irrationale Werthe von x, von denen immer wenigstens einer auch in dem kleinsten Intervalle angegeben werden kann, *endlich* bleibt, für gewisse irrationale und für alle rationalen x *unendlich* ist, und somit in jedem beliebig kleinen Intervalle unendlich oft vom Endlichen zum Unendlichen und umgekehrt überspringt. —

Ein ähnliches Beispiel giebt die Reihe:

$$\sum \frac{\omega^m}{(\sin m x \pi)^2},$$

welche für alle rationalen x unendlich wird. Für irrationale x wird der Nenner niemals der Null gleich; die kleinsten Werthe nimmt er an, wenn m dem Nenner eines Näherungsbruches μ_n gleich ist; und zwar ist dann das betreffende Glied:

$$\pi^2 \frac{\omega^{\mu_n}}{(\sin \mu_n x \pi)^2} = (a_n + 2)^2 \mu_n^2 \omega^{\mu_n}$$

und auch dieses wird, obgleich schwächer, als das der vorigen Reihe, für unendlich viele Irrationalitäten so stark abnehmen, dass die Reihe convergiren kann.

Note III (zu pag. 105).

Functionen complexer Veränderlicher, welche linear unstetig werden.

Functionen complexer Variabelen, deren reeller Theil in ganzen Linien unstetig wird, kann man leicht construiren:

Ist nämlich x eine complexe Veränderliche, r irgend ein bestimmter Modulus, sind ferner die $a_0, a_1, \cdots, b_0, b_1, \cdots$ Reihen gewisser endlicher oder unendlich abnehmender reeller Grössen, so ist bekanntlich die Reihe:

$$f(x) = \sum (a_n - b_n i)\left(\frac{x}{r}\right)^n$$

eine für alle x, deren Modul $< r$ ist, synektische (d. h. nebst allen ihren Differentialquotienten, bestimmte, eindeutige) Function, die für $x = r c^{\varphi i}$ den reellen Theil:

$$\sum (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

besitzt; diese Reihe aber kann die allerverschiedensten Unstetigkeiten besitzen.

Umgekehrt giebt jede in eine Fourier'sche Reihe entwickelbare Function

$$F(\varphi) = \sum (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

wie unstetig sie auch sei, zu einer innerhalb eines Kreises synektischen Function Veranlassung.

Es kann demnach eine monogene Function einer complexen Veränderlichen in einer Kreisperipherie *punktirt unstetig* werden.

Ich kann jedoch auch Beispiele monogener und im Allgemeinen synektischer Functionen geben, die in einem ganzen Kreise *total unstetig* werden: In der Reihe:

$$f(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\omega^m}{(q^m - q^{-m})^2}$$

sei ω ein positiver, reeller echter Bruch, q aber die complexe Variabele. Wenn mod. q von 1 verschieden ist, wird der Nenner nicht verschwinden und die Convergenz der Reihe hängt ab von dem Grenzwerthe des Quotienten:

$$\omega \left(\frac{m}{m+1}\right)^2 \left(\frac{q^m - q^{-m}}{q^{m+1} - q^{-(m+1)}}\right)^2$$

für unendlich wachsende m. Dieser ist aber, wenn mod. $q < 1$ ist, ωq^2 und da nach Voraussetzung $\omega < 1$ also auch mod. $\omega q^2 < 1$, so convergirt die Reihe für alle q, deren Modul < 1 ist. Wenn *mod.* $q > 1$, so ist der Grenzwerth $\frac{\omega}{q^2}$ und die Reihe convergirt daher ebenfalls für alle q, deren Modul > 1.

Die Convergenz kann nur aufhören, wenn mod. $q = 1$. Setzen wir nämlich $q = e^{x\pi i}$, so ist:

$$f(e^{x\pi i}) = -\frac{1}{4} \sum \frac{\omega^m}{(m \sin mx\pi)^2}.$$

Letzteres ist aber die uns aus vorhergehender Note bekannte Reihe.

Es wird also durch jene unendliche für alle q, ausser mod. $q = 1$, convergente Reihe eine Function der complexen Veränderlichen q dargestellt, welche *ausserhalb und innerhalb* des Kreises mit dem Radius 1 *synektisch* ist, auf der Periperie des Kreises aber *total unstetig*, indem sie für alle Punkte derselben, deren Anomalie in rationalem Verhältniss zu 2π steht und für eine gewisse Art irrationaler Anomalieen unendlich ist, für andere unendlich viele irrationale Werthe der Anomalie aber endlich bleibt.

Um dies Unendlichwerden genauer zu untersuchen, setze man

$$q = (1 - \varepsilon)\, e^{x\pi i},$$

wo ε eine kleine, positive, zu Null abnehmende Grösse bezeichnen soll; für ein rationales $x = \frac{\nu}{\mu}$ werden nur die Glieder in $f(q)$, deren $m = \mu r$ ist, mit abnehmendem ε unendlich wachsen und wir brauchen daher nur diese, deren Summe:

$$\frac{1}{\mu^2}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2}\,\frac{\omega^{\mu r}(1-\varepsilon)^{2\mu r}}{[1-(1-\varepsilon)^{2\mu r}]^2},$$

in Betracht zu ziehen, aus der man ersieht, dass sich wesentlich

$$f(\overline{1-\varepsilon}\,e^{\frac{\nu}{\mu}\pi i}) \text{ wie } \frac{\text{Const.}}{\varepsilon^2}$$

verhält, wenn ε unendlich abnimmt, indem sich

$$\varepsilon^2 f(\overline{1-\varepsilon}\,e^{\frac{\nu}{\mu}\pi i})$$

dann einer endlichen Grenze nähert.

Man kann dies Verhalten etwa so beschreiben: Geht man radial von dem Mittelpunkte der complexen Ebene nach allen Seiten aus, so ändert sich $f(q)$ stetig, bis man an den Kreis mit dem Radius 1 gelangt, in welchem die stetige Reihe von Werthen, die $f(q)$ bis dahin auf einem Kreise zeigte, zerreisst, oder, so zu sagen, explodirt und zu einer total unstetigen wird.

Aehnliche Eigenthümlichkeiten zeigt $f(q)$, wenn man sich von aussen demselben Kreise nähert.

Ganz analoge Betrachtungen sind anwendbar auf die Reihe:

$$\psi(q)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega^m}{(q^m-q^{-m})^2},$$

welche für alle q synektisch ist, deren Modul von 1 verschieden ist. Wenn mod. $q=1$, also $q=e^{x\pi i}$, so ist:

$$\psi(e^{x\pi i})=-\frac{1}{4}\sum\frac{\omega^m}{(\sin mx\pi)^2}.$$

Diese Reihe ist aber am Schlusse von Note II besprochen, und es leuchtet ein, dass $\psi(q)$ ebenfalls eine in dem Kreise mit dem Radius 1 total unstetige Function sein wird, obgleich sie ausserhalb und innerhalb des Kreises synektisch ist.

Die Function $\psi(q)$ kann man übrigens auch durch die Gleichung

$$\psi(q)=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\log\varphi(q)}{\partial\log q}$$

auf die Function $\varphi(q)$ reduciren, wo:

$$\log\varphi(q)=-\sum\frac{\omega^m}{m(1-q^{2m})}$$

eine ebenfalls überall mit Ausnahme des mod. $q=1$ convergente Entwickelung ist. Diese Function $\varphi(q)$ aber, die unter derselben Bedingung für q auch in der Form:

$$\varphi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(n-1)}\,\omega^n}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}$$

erscheint*), wird durch die unendlichen Producte

$$\varphi(q) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n}\omega) \text{ für mod. } q < 1$$

und

$$\varphi(q) = \frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{q^{2n+2}}\right)} \text{ für mod. } q > 1$$

dargestellt, deren Beziehungen zu den Jacobi'schen Functionen Θ auf der Hand liegen.

*) Vergl. Scheibner, Sitzungsber. d. math.-phys. Classe. Leipzig 1862. p. 98.

Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von

GEORG CANTOR in Halle a. d. Saale.

3.

(Fortsetzung des Artikels in Bd. XVII, pag. 355.)

In den beiden vorangegangenen Artikeln 1. und 2. haben wir uns streng an den in der Ueberschrift bezeichneten Gegenstand gehalten und uns ausschliesslich mit *linearen* Punktmengen d. h. mit gesetzmässig gegebenen Mannichfaltigkeiten von Punkten beschäftigt, welche einer unendlichen stetigen geraden Linie angehören. Mit Absicht hatte ich der Darstellung zunächst diese Grenze gezogen, weil, namentlich im Hinblick auf meine in der Abhandlung „Ein Beitrag zur Mannichfaltigkeitslehre“ (Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 242) gewonnenen Resultate, durch welche ebene, räumliche und allgemein n-fach ausgedehnte Gebilde in eindeutige Beziehung zu linearen Punktmengen gesetzt worden sind, von vornherein angenommen werden konnte, dass die meisten an linearen Punktmengen hervortretenden Eigenschaften und Beziehungen mit naheliegenden Modificationen bei Punktmengen sich nachweisen lassen, die in stetigen Flächen, Räumen oder n-dimensionalen Gebieten enthalten sind. Diese Verallgemeinerung möchte ich aber nun deutlicher hervortreten lassen, da sie nicht nur an sich und mit Rücksicht auf Anwendungen in der Functionentheorie von Interesse ist, sondern auch neue Gesichtspunkte für die Erkenntniss des Gebietes der linearen Punktmengen liefert.

Um mit Einem anzufangen, so sind die bisher vorgekommenen Begriffe der *Ableitungen* verschiedener Ordnung, wobei letztere nicht blos durch eine endliche ganze Zahl bestimmt wird, sondern unter Umständen auch durch gewisse scharf bestimmte Unendlichkeitssymbole charakterisirt werden muss, ohne Weiteres auf die in stetigen n-dimensionalen Gebieten vorkommenden Punktmengen ausdehnbar. Der Ableitungsbegriff stützt sich auch hier auf den Begriff des *Grenzpunktes*

zu einer gegebenen Punktmenge P, welcher dadurch definirt ist, dass in jeder noch so kleinen *Umgebung* desselben von ihm verschiedene Punkte der Menge P vorkommen, wobei es gleichgültig ist, ob ein solcher Grenzpunkt zur Menge P mitgehört oder nicht. Der Satz, dass jede aus unendlich vielen Punkten bestehende in einem n-fach ausgedehnten stetigen und im Endlichen liegenden Gebiete verbreitete Punktmenge *zum Wenigsten einen* Grenzpunkt besitzt, dürfte in dieser Allgemeinheit zuerst von C. Weierstrass ausgesprochen, bewiesen und aufs Umfassendste in der Functionentheorie verwerthet worden sein.

Der Inbegriff *aller* Grenzpunkte einer Menge P bildet eine im Allgemeinen von P verschiedene neue Punktmenge P', welche ich die *erste Ableitung* von P nenne. Daraus ergeben sich durch Iteration dieser Begriffsbildung in endlicher oder selbst in *unendlicher* Folge mit in gewissem Sinne nothwendiger Dialectik die Begriffe der Ableitungen höherer Ordnung. Hierbei tritt immer die leicht zu begründende Erscheinung auf, dass jede Ableitung, mit Ausnahme der ersten, als Bestandtheil in den vorangehenden mit Einschluss der ersten Ableitung P' enthalten ist, während die ursprünglich gegebene Menge P im Allgemeinen ganz andere Punkte enthält als ihre Ableitungen. Ebenso ist der Begriff des *Ueberalldichtseins*, welchen wir zunächst nur an den linearen Punktmengen in Betracht gezogen haben, ohne Weiteres auf Mengen in höheren Dimensionen zu übertragen; eine in einem stetigen n-dimensionalen Gebiete A vorkommende Punktmenge P wird nämlich, wenn a ein stetiges Theilgebiet von A ist, *in dem Gebiete a überalldicht* genannt, wenn jedes stetige Theilgebiet a' von a Punkte der Menge P in seinem Innern hat.

Die erste Ableitung P' (und ebenso alle folgenden) von einer in einem stetigen Gebiete a überalldichten Punktmenge P enthält das stetige Gebiet a selbst mit allen Punkten der Begrenzung des Letzteren und es kann auch umgekehrt diese Eigenschaft der Punktmenge P als Ausgangspunkt für die Definition des Ueberalldichtseins derselben in dem Gebiete a genommen werden.

Auch der *Mächtigkeitsbegriff*, welcher den Begriff der ganzen Zahl, dieses Fundament der Grössenlehre, als Specialfall in sich fasst und als das allgemeinste genuine Moment bei Mannichfaltigkeiten angesehen werden dürfte, ist so wenig auf die linearen Punktmengen beschränkt, dass er vielmehr als Attribut einer jeglichen *wohldefinirten* Mannichfaltigkeit betrachtet werden kann, welche begriffliche Beschaffenheit ihre Elemente auch haben mögen.

Eine Mannichfaltigkeit (ein Inbegriff, eine Menge) von Elementen, die irgend welcher Begriffssphäre angehören, nenne ich *wohldefinirt*, wenn auf Grund ihrer Definition und in Folge des logischen Princips vom ausgeschlossenen Dritten es als *intern bestimmt* angesehen

werden muss, *sowohl* ob irgend ein derselben Begriffssphäre angehöriges Object zu der gedachten Mannichfaltigkeit als Element gehört oder nicht, *wie auch* ob zwei zur Menge gehörige Objecte, trotz formaler Unterschiede in der Art des Gegebenseins einander gleich sind oder nicht.

Im Allgemeinen werden die betreffenden Entscheidungen nicht mit den zu Gebote stehenden Methoden oder Fähigkeiten in Wirklichkeit sicher und genau ausführbar sein; darauf kommt es aber hier durchaus nicht an, sondern *allein* auf die *interne Determination*, welche in concreten Fällen, wo es die Zwecke fordern, durch Vervollkommnung der Hülfsmittel zu einer *actuellen* (*externen*) *Determination* auszubilden ist.

Ich erinnere hier zur Erläuterung an die Definition der Menge aller algebraischen Zahlen, welche zweifellos so gefasst werden kann, dass mit ihr die interne Determination dafür gegeben ist, ob eine beliebig angenommene bestimmte Zahl η zu den algebraischen Zahlen gehört oder nicht; nichtsdestoweniger zählt das Problem, für eine gegebene Zahl η diese Entscheidung thatsächlich auszuführen, wie bekannt, oft zu den *schwierigsten* und es ist beispielsweise noch immer eine offene Frage von eminentem Interesse, ob die Zahl π, welche das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser ausdrückt, eine algebraische, oder, wie höchst wahrscheinlich, eine transcendente Zahl ist. Für die Grundzahl e des natürlichen Logarithmensystems ist diese Aufgabe erst vor acht Jahren von Ch. Hermite in der bewundernswerthen Abhandlung: „Sur la fonction exponentielle, Paris 1874“ gelöst worden; hier wird gezeigt, dass die Zahl e keiner algebraischen Gleichung mit ganzzahligen rationalen Coefficienten als Wurzel genügt.

Hat man es mit einer geometrischen Mannichfaltigkeit zu thun, deren *Elemente* nicht allein Punkte, sondern auch Linien, Flächen oder Körper sein können, so tritt, wenn sie *wohldefinirt* ist, auch hier sofort die Frage nach ihrer Mächtigkeit auf und es wird letztere entweder *gleich* sein einer bei Punktmengen vorkommenden Mächtigkeit oder *grösser* sein als alle solche Mächtigkeiten.

Was im Besondern die in n-dimensionalen stetigen Gebieten enthaltenen *Punktmengen* anbetrifft, so habe ich (Borchardt's Journal Bd. 84, pag. 242) strenge gezeigt, dass ihre Mächtigkeiten mit denen der *linearen* Punktmengen übereinstimmen; es kann nämlich diese Thatsache als eine einfache Folge des dort bewiesenen Satzes aufgefasst werden, wonach ein n-fach ausgedehntes stetiges Gebilde in gegenseitig-eindeutige, durchaus gesetzmässige und verhältnissmässig einfache Beziehung zu einem eindimensionalen stetigen Gebiete, also zum geraden *Linearcontinuum* gebracht werden kann; die Frage nach den verschiedenen Mächtigkeiten bei *Punktmengen* kann somit, ohne dass hierdurch ihre Allgemeinheit eingeschränkt wird, an den *linearen*

Punktmengen untersucht werden, wie ich schon am Schlusse der soeben citirten Abhandlung hervorgehoben habe.

Den Ausdruck „*Mächtigkeit*“ habe ich J. Steiner entlehnt*) der ihn in einem ganz speciellen, immerhin jedoch verwandten Sinne gebraucht, um auszusprechen, dass zwei Gebilde durch *projectivische* Zuordnung so auf einander bezogen sind, dass jedem Element des einen ein und nur ein Element des andern entspricht; bei dem hier gemeinten absoluten Mächtigkeitsbegriff wird zwar an der gegenseitig-eindeutigen Beziehbarkeit festgehalten, dagegen für das Gesetz der Zuordnung keinerlei Beschränkung, namentlich keine Beschränkung in Bezug auf Stetigkeit und Unstetigkeit gemacht, so dass zweien Mengen dann aber auch nur dann *gleiche* Mächtigkeit zugestanden wird, wenn sie nach irgend einem Gesetze einander gegenseitig-eindeutig zugeordnet werden können; sind die beiden Mengen *wohldefinirt*, so ist es als *intern determinirt* anzusehen, ob sie gleiche Mächtigkeit haben oder nicht, die *actuelle* Entscheidung darüber gehört aber in den concreten Fällen oft zu den mühsamsten Aufgaben. So ist es mir erst nach vielen fruchtlosen Versuchen vor acht Jahren mit Hülfe eines Satzes, den ich sowohl in Borchardts J. Bd. 77, pag. 260, wie auch im Artikel 1 dieser Abh. bewiesen habe, gelungen zu zeigen, dass das Linearcontinuum *nicht* gleiche Mächtigkeit mit der natürlichen Zahlenreihe hat.

Die *Mannichfaltigkeitslehre* in der ihr hier zu Theil gewordenen Auffassung, umspannt, wenn wir das Mathematische allein ins Auge fassen und die übrigen Begriffssphären vorläufig unberücksichtigt lassen, die Gebiete der Arithmetik, der Functionenlehre und der Geometrie; sie fasst sie auf Grund des Mächtigkeitsbegriffs zu einer höheren Einheit zusammen. *Unstetiges* und *Stetiges* findet sich solcherweise von demselben Gesichtspunkte aus betrachtet und mit gemeinschaftlichem Maasse gemessen.

Die *kleinste* Mächtigkeit, welche überhaupt an *unendlichen*, d. h. aus unendlich vielen Elementen bestehenden Mengen auftreten kann, ist die Mächtigkeit der positiven ganzen rationalen Zahlenreihe; ich habe die Mannichfaltigkeiten dieser Classe *ins unendliche abzählbare Mengen* oder kürzer und einfacher *abzählbare Mengen* genannt; sie sind dadurch charakterisirt, dass sie sich (auf viele Weisen) in der Form einer einfach unendlichen, gesetzmässigen Reihe:

$$E_1, E_2, \cdots, E_\nu, \cdots$$

vorstellen lassen, so dass jedes Element der Menge an einer bestimm-

*) M. s. dessen Vorlesungen über synthetische Geometrie der Kegelschnitte, herausgeg. von Schröter; § 2.

ten Stelle dieser Reihe steht und auch die Reihe keine anderen Glieder enthält als Elemente der gegebenen Menge.

Jeder unendliche Bestandtheil einer abzählbaren Menge bildet wieder eine ins unendliche abzählbare Menge.

Hat man eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Mengen (E), (E'), (E''), $\cdots$, deren jede ihrerseits abzählbar ist, so ist auch die aus der Zusammenfassung aller Elemente von (E), (E'), (E''), $\cdots$ hervorgehende Menge abzählbar.

Diese beiden einfachen, leicht zu beweisenden Sätze bilden die Grundlage für den Nachweis der Abzählbarkeit. So erkennt man aus ihnen bald, wie ich schon wiederholt bemerkt habe, dass alle Mengen, die in Form einer n-fach unendlichen Reihe mit dem allgemeinen Gliede $E_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}$ (wo $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ unabhängig von einander alle positiven ganzen Zahlenwerthe zu erhalten haben) gegeben sind, abzählbare Mengen sind, d. h. sich in Form *einfach* unendlicher Reihen vorstellen lassen; aber auch Mengen, deren allgemeines Glied die Form hat:

$$E_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu},$$

wo nun auch μ alle positiven ganzen Zahlwerthe zu erhalten hat, gehören in diese Classe; ein besonders merkwürdiger Fall der letzten Art ist der Inbegriff aller algebraischen Zahlen (S. Borchardt's J. Bd. 77, pag. 258.) Arithmetik und Algebra bieten demnach eine unerschöpfliche Fülle von Beispielen der Abzählbarkeit; doch nicht weniger ergiebig ist in dieser Rücksicht die Geometrie. Der folgende Satz, welcher manche schönen Anwendungen in der Zahlentheorie und Functionenlehre gestattet, dürfte eine Vorstellung hiervon geben.

In einem n-dimensionalen überall ins Unendliche ausgedehnten stetigen Raume A sei eine unendliche Anzahl von n-dimensionalen stetigen*), von einander getrennten und höchstens an ihren Begrenzungen zusammenstossenden Theilgebieten (a) definirt; *die Mannichfaltigkeit (a) solcher Theilgebiete ist immer abzählbar.*

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass hier keinerlei Voraussetzung über die Vertheilung und über die Grösse des Rauminhaltes der Gebiete a gemacht wird, sie können mit beliebiger Kleinheit ihrer Ausdehnung an jeden ihnen nicht zugehörigen Punkt von A unendlich nahe heranrücken, der Satz hat keinerlei Ausnahme, wenn nur jedes Theilgebiet a (alle a sind vorausgesetztermassen n-dimensional) einen bestimmten (beliebig kleinen) Rauminhalt hat und die verschiedenen a höchstens in ihren Begrenzungen zusammenfallen.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich wie folgt führen: es werde der n-dimensionale unendliche Raum A mittelst reciproker Radii vectores

*) Bei jedem stetigen Gebilde werden die Punkte seiner Begrenzung als ihm zugehörig betrachtet.

auf ein innerhalb eines $\overline{n+1}$-dimensionalen unendlichen Raumes A verlaufendes n-fach ausgedehntes Gebilde B bezogen, welches dadurch bestimmt ist, dass dessen Punkte von einem festen Punkte des Raumes A' die constante Entfernung 1 haben. (Im Falle $n = 1$ ist dies ein Einheitskreis, im Falle $n = 2$ eine Einheitskugel.) Jedem n-dimensionalen Theilgebiete a von A entspricht ein n-dimensionales Theilgebiet b von B mit bestimmtem Rauminhalt; lässt sich nun die Abzählbarkeit für die Menge (b) nachweisen, so folgt hieraus wegen der gegenseitig eindeutigen Zuordnung die Abzählbarkeit der Menge (a).

Die Menge (b) ist aber aus dem Grunde abzählbar, weil die Anzahl der Gebiete b, welche ihrem Rauminhalte nach grösser sind als eine beliebig gegebene Zahl γ nothwendig eine endliche ist; denn ihre Summe ist kleiner als die Zahl $2^n\pi$, nämlich kleiner als der Rauminhalt des Gebildes B, in welchem die b alle enthalten sind; daraus folgt, dass die Gebiete b nach der Grösse ihres Rauminhaltes in eine einfach unendliche Reihe geordnet werden können, so dass die kleineren den grösseren folgen und in dieser Folge zuletzt unendlich klein werden.

Der Fall $n = 1$ liefert folgenden Satz, welcher für die weitere Ausbildung der Theorie der linearen Punktmengen wesentlich ist: *jeder Inbegriff von getrennten, höchstens in ihren Endpunkten zusammenfallenden Intervallen* $(\alpha \cdots \beta)$, *welche in einer unendlichen geraden Linie definirt sind, ist nothwendig ein abzählbarer Inbegriff;* das Gleiche gilt folglich auch von der Menge der Endpunkte α und β, jedoch nicht immer von der Ableitung der letzteren Punktmenge.

Der Fall $n = 2$, welcher die Eigenschaft der Abzählbarkeit einem jeden Inbegriffe von getrennten höchstens in ihren Begrenzungen zusammenstossenden Flächentheilen in einer unendlichen Ebene zuweist, scheint in der Functionentheorie complexer Grössen von Bedeutung zu sein. Hierbei bemerke ich, dass es nicht schwer ist, diesen Satz auch auf Inbegriffe getrennter Flächentheile auszudehnen, die in einem Gebiete definirt sind, welches die Ebene m-fach oder selbst abzählbar unendlich oft bedeckt.

Was die abzählbaren *Punktmengen* anbetrifft, so bieten sie eine merkwürdige Erscheinung dar, welche ich im Folgenden zum Ausdruck bringen möchte. Betrachten wir irgend eine Punktmenge (M), welche innerhalb eines n-dimensionalen stetig zusammenhängenden Gebietes A *überalldicht* verbreitet ist und die Eigenschaft der Abzählbarkeit besitzt, so dass die zu (M) gehörigen Punkte sich in der Reihenform:

$$M_1, M_2, \cdots, M_\nu, \cdots$$

vorstellen lassen; als Beispiel diene die Menge aller derjenigen Punkte unseres dreidimensionalen Raumes, deren Coordinaten in Bezug auf ein orthogonales Coordinatensystem x, y, z alle drei *algebraische* Zahlenwerthe haben. Denkt man sich aus dem Gebiete A die abzählbare

Punktmenge (M) entfernt und das alsdann übrig gebliebene Gebiet mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet, so besteht der merkwürdige Satz, dass für $n \gtrless 2$ das Gebiet $\mathfrak{A}$ *nicht aufhört stetig zusammenhängend* zu sein, dass mit anderen Worten je zwei Punkte N und N' des Gebietes $\mathfrak{A}$ immer verbunden werden können durch eine *stetige Linie*, welche mit allen ihren Punkten dem Gebiete $\mathfrak{A}$ angehört, so dass auf ihr kein einziger Punkt der Menge (M) liegt.

Es genügt, diesen Satz für den Fall $n = 2$ als richtig zu erkennen; sein Beweis beruht wesentlich auf dem in Art. 1 bewiesenen Satze, dass, wenn irgend eine gesetzmässige Reihe reeller Grössen:

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu, \cdots,$$

(unter denen auch gleiche vorkommen können, was an dem Wesen des Satzes offenbar nichts ändert) vorliegt, in jedem noch so kleinen willkürlich gegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ reelle Grössen η gefunden werden können, die in jener Reihe *nicht* vorkommen.

Sei in der That A irgend ein zusammenhängendes stetiges Stück der unendlichen Ebene, in A nehme man die überalldichte abzählbare Punktmenge (M) an und es seien N und N' irgend zwei der Menge (M) nicht angehörige Punkte des Gebietes A, die wir zunächst unbekümmert um die Punkte (M) durch eine stetige innerhalb A verlaufende Linie l mit einander verbinden; es soll nun gezeigt werden, dass die Linie l durch eine andere stetige Linie l' ersetzt werden kann, welche gleichfalls die Punkte N und N' mit einander verbindet, ebenfalls im Innern von A verläuft, jedoch keinen einzigen Punkt der Menge (M) enthält. —

Auf l werden im Allgemeinen unendlich viele Punkte der Menge (M) liegen, jedenfalls bilden sie auf ihr einen Bestandtheil von (M), also gleichfalls eine *abzählbare* Menge.

Folglich giebt es, dem soeben erwähnten arithmetischen Satze zufolge, in jedem noch so kleinen Intervalle der Linie l Punkte, welche nicht zu (M) gehören. Von diesen Punkten der Linie l fassen wir eine endliche Anzahl $N_1, N_2, \cdots, N_k$ derart ins Auge, dass die geraden Strecken $NN_1, N_1N_2, \cdots, N_kN'$ ebenfalls ganz im Innern von A liegen. Diese Strecken lassen sich nun immer durch Kreisbögen mit denselben Endpunkten ersetzen, welche gleichfalls innerhalb A verlaufen, keinen einzigen Punkt der Menge (M) enthalten und in ihrer Zusammensetzung eine stetige Linie l' von der oben charakterisirten Beschaffenheit bilden. —

Es wird genügen, wenn wir diese Thatsache an einer der Strecken, wir nehmen die erste NN_1, nachweisen.

Die durch die Punkte N und N_1 hindurchgehenden Kreise bilden eine einfach unendliche Schaar, ihre Mittelpunkte liegen auf einer bestimmten Geraden g; die Lage eines solchen Mittelpunktes werde durch

den Abstand u von einem festen Punkte O der Geraden g mit Vorzeichen bestimmt; jedenfalls kann alsdann der Grösse u ein Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ als Spielraum derart zugewiesen werden, dass für jeden einem solchen u entsprechenden Kreis einer der beiden N und N_1 verbindenden Kreisbögen ganz im Gebiete A zu liegen kommt.

Die Mittelpunkte derjenigen Kreise unserer Kreischaar, welche durch die Punkte:

$$M_1, M_2, \cdots, M_\nu, \cdots$$

der Menge (M) gehen, bilden auf der geraden g eine abzählbare Punktmenge:

$$P_1, P_2, \cdots, P_\nu, \cdots,$$

die zugehörigen Werthe von u seien:

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu, \cdots$$

Nimmt man alsdann im Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ eine Zahl η an, welche keinem ω_ν gleich ist, (was nach dem angeführten Satze immer möglich ist), so erhält man durch die Annahme:

$$u = \eta$$

einen Kreis der Schaar, auf dessen Umfang kein einziger Punkt der Menge (M) liegt und der uns, wegen $\alpha < \eta < \beta$, einen die Punkte N und N_1 verbindenden Kreisbogen von der verlangten Beschaffenheit liefert. —

Auf diese Weise ist gezeigt, dass je zwei Punkte N und N' des Gebietes $\mathfrak{A}$, welches nach Abzug einer überalldichten abzählbaren Punktmenge (M) vom Gebiete A übrig bleibt, sich durch eine stetige aus einer endlichen Anzahl von Kreisbögen zusammengesetzte Linie l' verbinden lassen, welche mit allen ihren Punkten dem Gebiete $\mathfrak{A}$ angehört, d. h. keinen einzigen Punkt der Menge (M) enthält. Uebrigens würde es mit demselben Hülfsmittel auch möglich sein, die Verbindung der Punkte N und N' durch eine nach einem *einzigen analytischen Gesetze* verlaufende continuirliche Linie herzustellen, welche ganz im Gebiete $\mathfrak{A}$ enthalten ist.

An diese Sätze knüpfen sich Erwägungen über die Beschaffenheit des der realen Welt, zum Zwecke begrifflicher Beschreibung und Erklärung der in ihr vorkommenden Erscheinungen, zu Grunde zu legenden dreidimensionalen Raumes. Bekanntlich wird derselbe sowohl wegen der in ihm auftretenden Formen, wie auch namentlich mit Rücksicht auf die darin vor sich gehenden Bewegungen als *durchgängig stetig* angenommen. Diese letztere Annahme besteht nach den gleichzeitigen, von einander unabhängigen Untersuchungen Dedekind's (M. s. das Schriftchen: Stetigkeit und irrationale Zahlen von R. Dedekind, Braunschweig 1872) und des Verfassers (Mathem. Annalen Bd. V, p. 127 und 128) in nichts anderem, als dass jeder

Punkt, dessen Coordinaten x, y, z in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem durch *irgend welche* bestimmte reelle rationale oder irrationale Zahlen vorgegeben sind, als *wirklich zum Raume gehörig* gedacht wird, wozu im Allgemeinen kein innerer Zwang vorliegt und worin daher ein freier Act unserer gedanklichen Constructionsthätigkeit gesehen werden muss. Die *Hypothese der Stetigkeit des Raumes* ist also nichts Anderes, als die an sich willkürliche Voraussetzung der vollständigen, gegenseitig-eindeutigen Correspondenz zwischen dem dreidimensionalen *rein arithmetischen Continuum* (x, y, z) und dem der Erscheinungswelt zu Grunde gelegten Raume.*) —

Unser Denken kann aber mit gleicher Leichtigkeit von einzelnen Raumpunkten, sogar wenn sie überalldicht vorkommen, sehr wohl abstrahiren und sich den Begriff eines *unstetigen* dreidimensionalen Raumes $\mathfrak{A}$ von der im Vorhergehenden charakterisirten Beschaffenheit bilden. Die sich alsdann ergebende Frage, ob auch in so *unstetigen* Räumen $\mathfrak{A}$ *stetige Bewegung* gedacht werden könne, muss nach dem Vorhergehenden unbedingt *bejaht* werden, weil wir gezeigt haben, dass je zwei Punkte eines Gebildes $\mathfrak{A}$ durch unzählig viele stetige, vollkommen reguläre Linien verbunden werden können. Es stellt sich also merkwürdigerweise heraus, dass aus der blossen Thatsache der stetigen Bewegung auf die durchgängige Stetigkeit des zur Erklärung der Bewegungserscheinungen gebrauchten dreidimensionalen Raumbegriffs zunächst kein Schluss gemacht werden kann. Daher liegt es nahe, den Versuch einer modificirten, für Räume von der Beschaffenheit $\mathfrak{A}$ gültigen Mechanik zu unternehmen, um aus den Consequenzen einer derartigen Untersuchung und aus ihrem Vergleich mit Thatsachen möglicherweise wirkliche Stützpunkte für die Hypothese der durchgängigen Stetigkeit des der Erfahrung unterzulegenden Raumbegriffs zu gewinnen. —

Berlin, den 31. März 1882.

*) Ich glaube hier als bekannt voraussetzen zu können, dass eine allgemeine, rein arithmetische, d. h. von allen geometrischen Anschauungsgrundsätzen vollkommen unabhängige Grössenlehre möglich und in ihren Grundzügen auch ausgebildet ist; ich verweise in dieser Beziehung ausser auf die citirten freilich nur sehr kurz gehaltenen Aufsätze von Dedekind und mir noch auf die ausgezeichnete Schrift des Herrn Lipschitz: Grundlagen der Analysis, Bonn 1877. Die meisten principiellen Schwierigkeiten, welche in der Mathematik gefunden werden, scheinen mir ihren Ursprung darin zu haben, dass die Möglichkeit einer rein-arithmetischen Grössen- und Mannichfaltigkeitslehre verkannt wird. Namentlich sind hierauf die Irrthümer derjenigen Autoren zurückzuführen, welche das *Unendlichkleine* als *Grösse* und nicht als einen *Modus* der Veränderlichkeit von Grössen auffassen. Vom Standpunkte der reinen *arithmetischen Analysis* aus *giebt es keine* unendlich kleinen Grössen, wohl aber unendlich klein *werdende*, veränderliche Grössen.

Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen*).

Von

PAUL DU BOIS-REYMOND in Tübingen.

Ich veröffentlichte (diese Annalen Bd. XVI) ohne Beweis folgenden Lehrsatz:

Die integrirbaren Functionen

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \cdots\ \varphi_n(x)$$

seien im Intervall

$$a \leqq x \leqq b$$

eingeschlossen resp. zwischen den Grenzen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leqq \varphi_1(x) \leqq \beta_1, \\ \alpha_2 &\leqq \varphi_2(x) \leqq \beta_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n &\leqq \varphi_n(x) \leqq \beta_n, \end{aligned}$$

und die Function $F(x_1, x_2, \cdots x_n)$ *sei stetig im Gebiet:*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leqq x_1 \leqq \beta_1, \\ \alpha_2 &\leqq x_2 \leqq \beta_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n &\leqq x_n \leqq \beta_n, \end{aligned}$$

so ist $F(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x))$ *im Intervall* $a \cdots b$ *von* x *integrirbar.*

Da, wie ich höre, Zweifel an der Allgemeinheit dieses Satzes geäussert worden sind, so scheint es mir angezeigt, einen Beweis mitzutheilen.

Es genügt die Integrirbarkeit einer stetigen Function von einer und von zwei integrirbaren Functionen nachzuweisen.

---

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der math.-phys. Classe der k. b. Akadem. d. Wiss. zu München.

So sei denn zunächst $\varphi(x)$ im Intervall (a, b) integrirbar, α und β seien die untere und die obere Grenze der Werthe $\varphi(x)$ im Intervall (a, b) und $F(x)$ sei im Intervall (α, β) stetig. Alsdann wird behauptet, dass $f(x) = F(\varphi(x))$ im Intervall (a, b) integrirbar ist.

Beweis. Wir theilen das Intervall (a, b) in n der Einfachheit halber gleiche Theile, und bezeichnen mit $\delta^{(n,\varepsilon)}$ einen jeden dieser Theile, in welchem die Schwankung von $\varphi(x)$ eine beliebig zu wählende Grösse ε nicht übersteigt. Bilden wir die Summe sämmtlicher solcher Theilintervalle: $\Sigma\delta^{(n,\varepsilon)}$, so ist $b - a$ ihr Limes, wenn n ins Unbegrenzte wächst. Umgekehrt: wenn für jeden noch so kleinen Werth ε die Summe $\Sigma\delta^{(n,\varepsilon)}$ den Limes $b - a$ hat, so ist die Function $\varphi(x)$ integrirbar. Dies ist eine von der gebräuchlichen etwas abweichende Form der Bedingung der Integrirbarkeit, die nicht selten gute Dienste leistet.

Betrachten wir jetzt die Function $f(x) = F(\varphi(x))$. Einer Schwankung $\sigma^{(n,\varepsilon)}$ von $\varphi(x)$ in einer Strecke $\delta^{(n,\varepsilon)}$ entspricht eine Schwankung $\varsigma^{(n,\varepsilon)}$ von $f(x)$. Diese Schwankungen von $f(x)$ können aber durch Verkleinerung von ε sämmtlich unter einen gewählten Kleinheitsgrad gebracht werden. Denn da $F(\varphi)$ im Intervall (α, β) von φ stetig ist, so werden sämmtliche Schwankungen von $F(\varphi)$, welche Werthunterschieden von φ entsprechen, wegen der sogenannten gleichmässigen Stetigkeit mit dem grössten Werthunterschiede der φ zugleich beliebig verkleinert werden können.

Wir können folglich ε so klein annehmen, dass keine der Grössen $\varsigma^{(n,\varepsilon)}$ eine beliebig niedrige Grenze η übersteigt. So können wir aber auch umgekehrt η beliebig klein annehmen, und die Summe $\Sigma\delta^{(n,\varepsilon)} = \Sigma\delta^{(n,\eta)}$ wird bei beliebig kleinen Schwankungen η von $f(x)$ in den Theilstrecken $\delta^{(n,\eta)}$ die Grenze $b - a$ haben, $f(x)$ daher integrirbar sein. Q. E. D.

Weiter handele es sich um eine Function $F(\varphi(x), \psi(x))$ von zwei integrirbaren Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$. Im Intervall (a, b) von x möge $\varphi(x)$ dem Intervall (α, β), $\psi(x)$ dem Intervall (α_1, β_1) angehören. Und es sei $F(\varphi, \psi)$ eine im Gebiet $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$, $\alpha_1 \leqq \psi \leqq \beta_1$ stetige Function von φ und ψ. Bezeichnen wir ferner mit $\delta_\varphi^{(n,\varepsilon)}$, $\delta_\psi^{(n,\varepsilon)}$ die ähnlich wie oben definirten Theile von $b - a$, in denen die Schwankung von φ resp. ψ die Grenze ε nicht übersteigt und mit $\delta_{\varphi,\psi}^{(n,\varepsilon)}$ die Theile von $b - a$, in denen die Schwankung weder von φ noch von ψ die Grenze ε übersteigt: so muss, da sowohl $\Sigma\delta_\varphi^{(n,\varepsilon)}$ als $\Sigma\delta_\psi^{(n,\varepsilon)}$ die Grenze $b - a$ haben, $\Sigma\delta_{\varphi,\psi}^{(n,\varepsilon)}$ die nämliche Grenze besitzen. Wegen der sogenannten gleichmässigen Stetigkeit der Function zweier Variabeln $F(\varphi, \psi)$ folgt das Weitere wie oben.

Die Ausdehnung dieses Beweises auf eine stetige Function einer beliebigen Anzahl integrirbarer Functionen liegt auf der Hand.

Auch eine Ausdehnung auf nur integrirbar vorausgesetzte Functionen von integrirbaren Functionen ist möglich, worauf ich an geeignetem Orte zurückkomme.

Jener allgemeine Satz gestattet u. A., die Behandlung, welcher ich in meinen „Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung“ das Problem der kürzesten Linie unterwarf, *mutatis mutandis* auf das allgemeine Variationsproblem der einfachen Integrale auszudehnen.

Tübingen, 26. December 1881.

Ueber eine Reihe neuer Functionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen bilden.

Von

Adolf Hurwitz in Göttingen.

Die nachfolgenden Untersuchungen habe ich im Februar des Jahres 1881 angestellt, angeregt durch die Arbeiten der Herren Schwarz und Klein*). Bei dem grossen Interesse, welches die Functionen einer Variabeln mit linearen Transformationen in sich durch die neuerdings veröffentlichten, wichtigen Resultate der Herren Poincaré und Klein**) erlangt haben, nehme ich keinen Anstand meine damaligen Aufzeichnungen heute noch zu veröffentlichen, zumal Herr Rausenberger — wie ich durch gütige Mittheilung des Herrn Klein erfahre — neuerdings Untersuchungen abgeschlossen hat, die mit den meinigen mannichfaltige Berührungspunkte darbieten***).

Nach Riemann kann man jedes einfach zusammenhängende Gebiet auf jedes andere, oder — was die Allgemeinheit dieses Satzes nicht beschränkt — auf die positive Halbebene conform abbilden. Diese Abbildung ist unzweideutig bestimmt, sofern man zwei beliebige Punkte im Innern der Gebiete einander entsprechen lässt und einem beliebigen Punkte der Begrenzung des einen Gebietes einen beliebigen Begrenzungspunkt des anderen Gebietes zuweist†).

---

*) Schwarz: „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes ist." Crelle-Borchardt, Bd. 75, pag. 292 ff.

Klein: Diese Annalen, Bd. XIV—XVII.

**) Klein: „Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich." Diese Annalen Bd. XIX, p. 565 ff., sowie p. 49 ff. des gegenwärtigen Bandes.

Poincaré: „Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires." Ibid. Bd. XIX, p. 553 ff sowie in dem Comptes Rendus vom Februar 1881 an.

***) Die Untersuchungen des Herrn Rausenberger, in denen es sich im Wesentlichen um arithmetische Charakterisirung zulässiger Gruppen linearer Substitutionen handelt, sollen im nächsten Annalenhefte erscheinen. — Hr. Hurwitz hat seine hier im Texte abgedruckten Betrachtungen in wesentlich derselben Form bereits am 21. Februar 1881 in meinem Seminare vorgetragen, worüber ein ausführliches Referat im Protocollbuch des Seminar's Rechenschaft giebt. F. Klein.

†) Riemann, Gesammelte Werke p. 40. Wegen des Beweises vergleiche man insbesondere Schwarz in den Monatsberichten der Berliner Akademie vom Jahre 1870 p. 767 ff.

Bezeichnen wir nun mit „Spiegelung" an einem Kreise diejenige Transformation nach reciproken Radien, bei welcher jener Kreis Inversionskreis ist, so können wir sagen:

„Ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet A der complexen Zahlenebene von lauter Kreisstücken begrenzt, und spiegelt man dasselbe an diesen begrenzenden Kreisen, so werden die erhaltenen Spiegelbilder von A durch dieselbe Function conform auf die negative Halbebene abgebildet, durch welche A selbst auf die positive abgebildet wurde."

Hiernach kann man durch fortgesetztes Spiegeln die Fortsetzung der abbildenden Function in alle ihr überhaupt zugänglichen Gebiete erhalten.*)

Da zwei Spiegelungen hintereinander angewandt einer linearen Transformation gleichkommen, so folgt:

„Mit jeder Function die in obiger Weise definirt ist, hängt eine Gruppe von linearen Transformationen zusammen. Alle Zweige der Function entstehen, indem man auf einen willkürlich gewählten alle Transformationen der Gruppe anwendet."

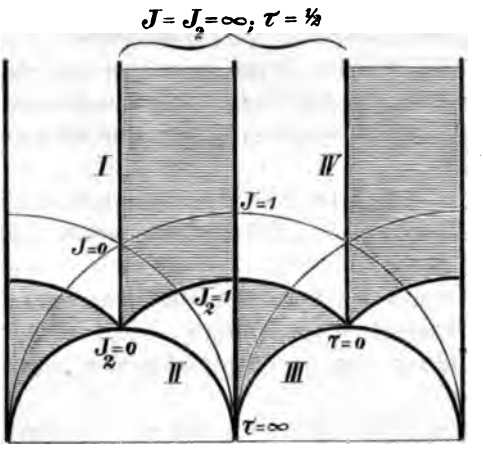
Diese Gruppe besitzt eine kleinste Zahl von „erzeugenden" Substitutionen, indem sie durch wiederholte Anwendung der Spiegelungen an den Begrenzungen des Ausgangsraumes entsteht.

Unter der grossen Zahl von Functionen, die durch die vorhergehenden Erörterungen bestimmt sind, scheiden sich die eindeutigen als diejenigen aus, die zu einer einfachen Bedeckung der Ebene, oder von Stücken der Ebene, durch Kreispolygone führen. Eine nothwendige Bedingung hierfür ist, dass das Ausgangspolygon nur Winkel besitzt, die, wenn sie nicht Null sind, aliquote Theile von π sind.

Beschränken wir uns nun weiterhin auf solche Ausgangspolygone, deren Begrenzung aus nur drei Kreisstücken besteht, so besitzen wir in der ausgedehnten Litteratur über die elliptischen Modulfunctionen ein nach vielen Richtungen hin ausgeführtes Beispiel einer solchen Function: es ist das Periodenverhältniss des elliptischen Integrals erster Gattung als Function der absoluten Invariante J. Der hierbei zu Grunde gelegte Ausgangsraum wird begrenzt durch die Axe der rein imaginären Zahlen, einer im Punkte $-\frac{1}{2}$ sich parallel zu derselben erhebenden Geraden und einem mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Die Ecken dieses Raumes sind in Fig. 1 mit $J = 0$, $J = 1$ und $J = \infty$ bezeichnet. Die Winkel sind $\frac{\pi}{3}$ bei $J = 0$, $\frac{\pi}{2}$ bei $J = 1$ und 0 bei $J = \infty$.

*) Vgl. Schwarz: Crelle, Bd. 70, p. 105 ff. Alle bei diesen Untersuchungen in Betracht kommenden Kreise können sowohl endlich als unendlich grossen Radius besitzen, also entweder Kreise im eigentlichen Sinne des Wortes oder gerade Linien sein.

Unter der Gesammtheit der eben charakterisirten Functionen stehen nun wohl diejenigen der absoluten Invariante J am nächsten, deren



Figur 1.

Ausgangsraum die Winkel 0, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{n}$ aufweist, wo n eine beliebige ganze Zahl > 2 bedeutet.

Betrachten wir diese Functionen näher! Da man je zwei Kreisbogendreiecke, welche dieselben Winkel besitzen, durch eine lineare Transformation in einander überführen kann, so reicht es aus, diejenige Function zu betrachten, welche aus einem Ausgangsraume entspringt, der durch die Axe der rein imaginären Zahlen, einer in der Entfernung $\frac{1}{2}$ zu dieser Axe parallel laufenden Geraden und einen um den Nullpunkt mit dem Radius

$$r = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{n}}$$

beschriebenen Kreise, gebildet wird.

Die erzeugenden Substitutionen der zu diesem Ausgangsraume gehörigen Function haben die Gestalt.

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \omega + 1 \\ \omega' &= -\frac{-r^2}{\omega} = -\frac{1}{(\varepsilon + \varepsilon^{-1})^2 \omega} \end{aligned}\right\},$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{n}}$ ist, und $\omega = x + iy$ die Variable der complexen Ebene bedeutet, in welcher unsere Figur verzeichnet ist. Man sieht, dass die arithmetische Beherrschung dieses Substitutionssystems die Theorie der aus zweigliedrigen Perioden zusammengesetzten complexen Zahlen als Hilfsmittel verlangt.

Es ergiebt sich nun leicht, dass ausser $n = 3$, wo die Figur der absoluten Invariante J eintritt, noch drei Fälle existiren, in welchen das betreffende Substitutionssystem aus *ganzzahligen* Transformationen besteht, nämlich für $n = 4, 6, \infty$. Wir werden in diesen Fällen, die wir der Reihe nach behandeln, zur vollständigen arithmetischen Charakterisirung der betreffenden Transformationsgruppen und zur Aufstellung des analytischen Ausdrucks der zugehörigen Functionen gelangen.

1) Der Fall $n = 4$. Der Ausgangsraum hat in Figur 1 die Ecken $J_2 = 0$, $J_2 = 1$ und $J_2 = \infty$. Durch fortgesetzte Spiegelung entsteht eine Eintheilung der positiven Halbebene in Kreisbogendreiecke, von denen einige in Figur 1 mit scharfen Begrenzungen gezeichnet sind. Dieselben sind abwechselnd schraffirt und nicht schraffirt, je nachdem sie in der Abbildung der positiven oder der negativen Halbebene entsprechen.

Die erzeugenden Substitutionen sind hier

$$\left.\begin{aligned} (T) \quad \cdots \quad \omega' &= \omega + 1 \\ (S) \quad \cdots \quad \omega' &= -\frac{1}{2\omega} \end{aligned}\right\};$$

T ist eine parabolische Substitution, S eine elliptische von der Periode 2.*)

Daher haben alle Substitutionen unserer Gruppe, welche wir mit G_2 bezeichnen wollen, eine der folgenden beiden Formen:

$$(1) \qquad \omega' = T^{k_{2n+1}} S T^{k_{2n}} S \cdots T^{k_2} S T^{k_1}(\omega),$$

d. i.

$$\omega' = k_{2n+1} - \frac{1}{2k_{2n}} - \frac{1}{k_{2n-1}} \cdot \cdots - \frac{1}{k_3} - \frac{1}{2k_2} - \frac{1}{k_1 + \omega},$$

also

$$\omega' = \frac{A\omega + B}{C\omega + D}, \quad AD - BC = 1,$$

oder:

$$(2) \qquad \omega' = T^{k_{2n}} S T^{k_{2n-1}} \cdots T^{k_2} S T^{k_1}(\omega) = T^{k_{2n}} S \left(\frac{A\omega + B}{C\omega + D}\right)$$

$$= \frac{A'\omega + B'}{2C'\omega + 2D'}, \quad A'D' - B'C' = 1.$$

Hierbei bedeuten die Zahlen k_i und $A, B, C, D, A', B', C', D'$ irgend welche Zahlen aus der Reihe

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$$

Hieraus ersehen wir, dass in unserer Gruppe eine Untergruppe von

*) Siehe wegen dieser Ausdrucksweise: Klein, diese Annalen Bd. XIV, p. 122–124.

linearen, ganzzahligen Transformationen der Determinante 1 enthalten ist. Wir werden daher unsere Figur mit der Klein-Dedekind'schen Figur*) vergleichen, indem wir beide Figuren in derselben Ebene verzeichnen. Bei dieser Gelegenheit zeigt sich, dass schon in dem Raume, welcher durch die in Fig. 1 mit I, II, III, IV bezeichneten Ränder begrenzt wird, eine *ganze* Zahl von Dreiecksgebieten unserer Figur mit einer *ganzen* Zahl von Gebieten der Klein-Dedekind'schen Figur sich deckt.

Nun bezeichnen wir mit $J_2(\omega)$ die absolute Invariante der neuen Figur, so, dass J_2 eine Function von ω ist, welche die Eigenschaft hat, dass

$$J_2(\omega) = J(\omega')$$

dann und nur dann, wenn ω' durch eine Transformation der Gruppe G_2 aus ω hervorgeht, eine Beziehung zwischen ω und ω', die offenbar gegenseitig ist.

Ferner verfügen wir über die drei reellen willkürlichen Constanten, welche die so definirte Function noch enthält, derart, dass J_2 an den in Figur 1 so bezeichneten Ecken des Ausgangsraumes die Werthe

$$0,\ 1,\ \infty$$

respective annimmt. Biegen wir jetzt die Ränder I und IV und die Ränder II und III unserer Figur zusammen, so haben wir eine Fläche vom Geschlechte Null, auf welcher sowohl J_2 als auch J (die absolute Invariante des elliptischen Integrals 1. Gattung) eindeutig ist, und zwar ist J_2 zweiwerthig und J dreiwerthig auf dieser Fläche. Bedeutet nun τ diejenige auf unserer Fläche einwerthige Function, welche an den in der Figur bezeichneten Stellen die Werthe 0, ∞ und $\frac{1}{2}$ annimmt, so wird J_2 eine rationale Function zweiten Grades, J eine rationale Function dritten Grades dieses τ werden, welche sich nach der Methode des Herrn Klein**) berechnen lassen.

Man findet:

$$J : J - 1 : 1 = (8\tau - 3)^3 : 2\tau\,(16\tau - 9)^2 : 27\,(2\tau - 1),$$
$$J_2 : J_2 - 1 : 1 = \qquad \tau^2 : \qquad (\tau - 1)^2 : \quad (2\tau - 1).$$

Durch diese Gleichungen ist nun die Function J_2 auf die Function J zurückgeführt.***)

---

*) So bezeichne ich die zu der absoluten Invariante J des elliptischen Integrals erster Gattung gehörige Figur.

**) Diese Annalen, Bd. XIV, p. 141.

***) Noch einfacher gestaltet sich der Zusammenhang der Function J_2 mit dem Legendre'schen Modul $k^2(\omega)$. Es ist nämlich:

$$J_2 = \frac{(k^2 - 2)^4}{16\,k^2\,(1 - k^2)}.$$

Nebenbei ergiebt sich, da an der Stelle $J_2 = 1$,

$$\tau = 1, \quad \omega = i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

ist:

$$J\left(\sqrt{-\tfrac{1}{2}}\right) = J\left(\sqrt{-2}\right) = \left(\tfrac{5}{3}\right)^3.$$

Ferner, da an den Stellen

$$\omega = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \text{resp.} \quad \omega = \sqrt{-1},$$

$$J = 0, \quad \tau = \tfrac{3}{8}, \quad \text{resp.} \quad J = 1, \quad \tau = \tfrac{9}{16}$$

ist, so folgt:

$$J_2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right) = -\tfrac{9}{16},$$

$$J_2\left(\sqrt{-1}\right) = \tfrac{81}{32}.$$

Nunmehr ist es leicht die Gruppe G_2 der Function J_2 arithmetisch zu definiren. Jede Substitution dieser Gruppe ist nämlich entweder eine Substitution T' der in ihr enthaltenen Untergruppe von Substitutionen der Determinante 1 oder von der Gestalt ST', wo S die Substitution

$$\omega' = -\frac{1}{2\omega}$$

bedeutet. Nun folgt nach Herrn Klein's Theorie der in der Gesammtheit der ganzzahligen linearen Substitutionen der Determinante 1 enthaltenen Untergruppen*), dass alle Substitutionen T' sich aus den beiden zusammensetzen, von denen die eine die Ränder I und IV, die andere die beiden Ränder II und III der Figur 1 vereinigt, und dass weiterhin alle Substitutionen T' diejenigen $\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$ aus der Gesammtheit der ganzzahligen linearen Substitutionen der Determinante 1 sind, deren Zahlenschema

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

einem der Schemata

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2$$

congruent ist.

Daraus folgt:

„Die Gruppe G_2 der Function J_2 besteht aus Substitutionen der

*) Siehe die ausführliche Darstellung derselben auf p. 537 ff. von des Verfassers „Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe." Diese Annalen Bd. XVIII.

Determinante 1 und aus solchen der Determinante 2. Die ersteren sind alle diejenigen ganzzahligen linearen Transformationen der Determinante 1, welche congruent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (mod. 2)}$$

sind. Die Substitutionen der Determinante 2 dagegen gehen, nachdem man die im Nenner auftretenden Zahlen γ, δ von ihrem gemeinsamen Factor 2 befreit hat, in alle diejenigen ganzzahligen linearen Transformationen der Determinante 1 über, welche congruent

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (mod. 2)}$$

sind."

Ferner:

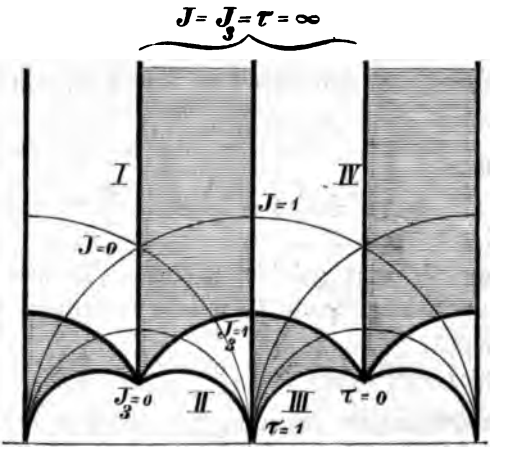
„Alle ganzzahligen linearen Substitutionen der Determinante 1, welche congruent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (mod. 2)}$$

sind, lassen sich in der auf pag. 128 unter 1) angegebenen Weise in Form eines Kettenbruches schreiben, ein Umstand, der bei mancherlei Untersuchungen von Vortheil sein kann."

2) Der Fall $n = 6$.

Hier verhält sich Alles ganz analog, weshalb ich mich mit kurzen Angaben begnügen kann.



Figur 2.

Der Ausgangsraum hat die Winkel 0, $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{6}$; seine Ecken sind in Figur 2. mit $J_3 = 0$, $J_3 = 1$, $J_3 = \infty$, den Werthen, welche die absolute Invariante $J_3(\omega)$ unserer Gebietseintheilung an diesen Stellen annehmen soll, bezeichnet.

Die zugehörige Gruppe G_3 hat die erzeugenden Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \omega + 1 \\ \omega' &= -\frac{1}{3\omega} \end{aligned}\right\},$$

und also haben die Substitutionen von G_3 eine der beiden Formen:

$$\omega' = k_{2n+1} - \cfrac{1}{3k_{2n}} - \cfrac{1}{k_{2n-1}} - \cdots - \cfrac{1}{k_3} - \cfrac{1}{3k_2} - \cfrac{1}{k_1+\omega}$$

$$= \frac{A\omega + B}{C\omega + D}; \quad AD - BC = 1.$$

Oder:

$$\omega' = k_{2n} - \cfrac{1}{3k_{2n-1}} - \cdots - \cfrac{1}{k_2} - \cfrac{1}{3k_1 + 3\omega}$$

$$= \frac{A'\omega + B'}{3C'\omega + 3D'}; \quad A'D' - B'C' = 1.$$

In dem von den Rändern I, II, III, IV umrahmten Raume in Figur 2. decken sich gerade zwei Dreiecke der neuen Eintheilung mit vieren der Klein-Dedekind'schen. Dem entsprechend erhält man den algebraischen Zusammenhang der Invariante J mit der neuen Function J_3 durch Elimination von τ aus den Gleichungen:

$$J_3 : J_3 - 1 : 1 = \tau^2 : (\tau - 2)^2 : 4(\tau - 1),$$
$$J : J - 1 : 1 = \tau(\tau + 8)^3 : (\tau^2 - 20\tau - 8)^2 : 64(\tau - 1)^3.$$

An der Stelle $J_3 = 1$ ist demnach $\tau = 2$ und folglich:

$$J(\sqrt{-3}) = \frac{5^3}{2^2}.$$

Ebenso findet man

$$J_3\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right) = -\frac{4^2}{3^2}.$$

Ferner:

„Die Gruppe G_3 wird gebildet aus allen linearen, ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1, welche congruent

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (mod. 3)}$$

sind, und allen denjenigen linearen, ganzzahligen Substitutionen der Determinante 3, welche sich nach Unterdrückung des den Zahlen γ, δ des Nenners gemeinsamen Factors 3 auf eine lineare Transformation der Determinante 1 reduciren, die congruent ist einem der drei Schemata

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (mod. 3)}.$$

3) Der Fall $n = \infty$ bietet nur ein untergerordnetes Interesse dar, da er leicht auf bekannte Untersuchungen zurückgeführt werden kann.

Die hier auftretende Gruppe wird nämlich erzeugt durch die Transformationen

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \omega + 1 \\ \omega' &= -\frac{1}{4\omega} \end{aligned}\right\},$$

und diese gehen durch die Substitutionen

$$\Omega' = 2\omega', \quad \Omega = 2\omega$$

über in

$$\left.\begin{aligned} \Omega' &= \Omega + 2 \\ \Omega' &= -\frac{1}{\Omega} \end{aligned}\right\}.$$

Die zu untersuchende Gruppe ist also nicht wesentlich verschieden von einer bekannten Gruppe linearer ganzzahliger Substitutionen der Determinante 1.

Ueberblickt man die bei $n = 3, 4, 6, \infty$ auftretenden Gruppen, so wird man naturgemäss auf die Betrachtung derjenigen Gruppe geführt, welche durch Combination der beiden folgenden Substitionen erzeugt wird:

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \omega + 1 \\ \omega' &= -\frac{1}{m\omega} \end{aligned}\right\},$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet.

Die letztere Substitution besteht in einer Inversion verbunden mit einer Spiegelung an der Axe der rein imaginären Zahlen. Der Inversionskreis hat den Radius $\sqrt{\frac{1}{m}}$ und seinen Mittelpunkt im Nullpunkte. Sobald daher $m > 4$ ist, trifft dieser Kreis nicht mehr die zur Axe der rein imaginären Zahlen in den Entfernungen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ parallel laufenden Geraden. Bei der analytischen Fortsetzung der zu der Gruppe gehörigen Invariante wird man also auch in die negative Halbebene ω geführt.

Diese Functionen sind an und für sich wegen der Einfachheit ihrer zugehörigen Gruppe von Interesse. Will man jedoch einen *algebraischen* Zusammenhang der neuen Function mit $J(\omega)$ im Auge behalten, so muss man zu den erzeugenden Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \omega + 1 \\ \omega' &= -\frac{1}{m\omega} \end{aligned}\right\}$$

eine gewisse Zahl anderer Substitutionen hinzufügen, welche dann mit

jenen eine Gruppe erzeugen, deren zugehörige Eintheilung sozusagen in einem rationalen Verhältniss zu der Eintheilung der absoluten Invariante J steht. So genügt es z. B. für $m = 5$, als erzeugende Substitutionen die folgenden zu nehmen:

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \omega + 1 \\ \omega' &= -\frac{1}{5\omega} \\ \omega' &= \frac{9\omega + 4}{20\omega + 9} \end{aligned}\right\}.$$

Und es besteht dann zwischen J und der neuen Invariante eine Gleichung, die in letzterer vom 12^{ten}, in J vom zweiten Grade ist.

In allen Fällen sind

$$J(\omega) \cdot J(m\omega) \quad \text{und} \quad J(\omega) + J(m\omega)$$

Functionen, welche die Gruppe der Substitutionen

$$\left.\begin{aligned} \omega' &= \omega + 1 \\ \omega' &= -\frac{1}{m\omega} \end{aligned}\right\}$$

zulassen.

Hildesheim, den 16. April 1882.
(Leipzig, den 21. Februar 1881.)

Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven III. Ordnung.

Von

Adolf Hurwitz in Göttingen.

In meiner Note: „Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schliessungsprobleme“ (diese Annalen Bd. XV, pag. 8ff.), habe ich folgenden Satz mitgetheilt:

„Liegen die acht Ecken zweier Tetraeder auf einer Raumcurve 3. Ordnung, so sind die acht Seitenflächen dieser Tetraeder Schmiegungs-Ebenen einer zweiten Raumcurve 3. Ordnung; es giebt dann, ausser jenen zwei, noch unzählig viele andere Tetraeder, welche der ersten Raumcurve ein-, der zweiten umbeschrieben sind, und zwar ist jeder Punkt der ersten Raumcurve Eckpunkt eines dieser unzählig vielen Tetraeder.“

Ich befand mich schon ihm Jahre 1875 in Besitz dieses Satzes und theilte denselben damals Herrn Dr. Schubert mit. Da der Beweis, welchen ich zu jener Zeit für diesen Satz fand, nicht ohne Eleganz ist und sich in ungezwungener Weise der synthetischen Behandlung der Raumcurven 3. Ordnung einreiht, so erlaube ich mir, denselben in aller Kürze in Folgendem darzulegen.*)

Es seien A, B, C, D die Ecken, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die diesen Ecken resp. gegenüberliegenden Seitenflächen des ersten Tetraeders; A', B', C', D'; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ mögen die analoge Bedeutung für das zweite Tetraeder besitzen; endlich bezeichne E_3 die Raumcurve 3. Ordnung, welcher beide Tetraeder einbeschrieben sind.

Betrachten wir nun die Punkte A und A' als Mittelpunkte zweier Ebenenbündel, so werden diese collinear auf einander bezogen, wenn wir je zwei Ebenen durch A und A' einander entsprechen lassen, welche durch dieselbe Secante der Raumcurve E_3 hindurchgehen. Diese beiden Ebenenbüschel schneiden wir jetzt durch die Ebenen α und α': das Bündel A durch die Ebene α', das Bündel A' durch die Ebene α. Dann werden diese beiden Ebenen α und α' collinear auf einander

*) Siehe (auch wegen der gebrauchten Terminologie): Reye, Geometrie der Lage, II. Abtheilung, pag. 68ff.

bezogen sein und also eine zweite Raumcurve 3. Ordnung U_3 erzeugen in dem Sinne, dass die Verbindungsebenen sich treffender und einander entsprechender Geraden der Ebenen α und α' Schmiegungsebenen dieser neuen Raumcurve U_3 sind. Zu diesen Schmiegungsebenen gehören nun zunächst, wie bekannt, die Ebenen α und α' selbst. Man erkennt aber sofort, dass auch die Ebenen $\beta, \gamma, \delta, \beta', \gamma' \delta'$ Schmiegungsebenen von U_3 sind. Denn der Geraden CD der Ebene α entspricht diejenige Gerade von α', welche die Schnittgerade von α' mit der Ebene ACD ist. Letztere, d. h. die Ebene β, ist also in der That Verbindungsebene entsprechender Geraden. Dasselbe folgt in analoger Weise für die Ebenen $\gamma, \delta, \beta', \gamma', \delta'$. Hiermit ist der *erste* Theil unseres Satzes erwiesen, dass nämlich die acht Seitenflächen zweier Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$, deren Ecken auf einer Raumcurve 3. Ordnung E_3 liegen, Schmiegungsebenen einer zweiten Raumcurve 3. Ordnung U_3 sind.

Um die Richtigkeit des *zweiten* Theiles unseres Satzes darzuthun, beweisen wir folgenden Hilfssatz:

„Jede Axe der Raumcurve U_3, welche die Curve E_3 ein Mal trifft, schneidet dieselbe noch ein zweites Mal, ist also eine Secante von E_3."

Eine Axe von U_3 treffe die Ebenen α und α' in den Punkten P resp. P' und habe mit der Curve E_3 den Punkt S gemein. Dann sind P und P' einander entsprechende Punkte der Ebenen α und α'; folglich AP' und $A'P$ entsprechende Strahlen der Bündel A und A' Desgleichen correspondiren aber auch die Strahlen AS und $A'S$; daher entsprechen sich die Ebenen $AP'S$ und $A'PS$, und ihre Schnittgerade, d. h. die betrachtete Axe von U_3 ist also eine Secante der Curve E_3, wie behauptet wurde.

Es ist nur ein anderer Ausspruch dieses Hilfssatzes, wenn wir sagen:

„Zwei Schmiegungsebenen der Raumcurve U_3, welche durch einen Punkt der Raumcurve E_3 gehen, schneiden sich längs einer Secante der letzteren Curve."

Legen wir nun von irgend einem Punkte A'' der Curve E_3 aus die drei Schmiegungsebenen $\beta'', \gamma'', \delta''$ von U_3, so schneiden diese sich, nach dem soeben Erwiesenen, in drei Secanten $A''B''$, $A''C''$, $A''D''$ von E_3, wo B'', C'', D'' Punkte der Curve E_3 bezeichnen. Aus demselben Grunde schneidet die dritte Schmiegungsebene α'', welche, ausser γ'' und δ'', von B'' aus an U_3 geht, die letzteren Ebenen in Secanten der Curve E_3, d. h. in den Geraden $B''C''$ und $B''D''$. Diese dritte Schmiegungsebene fällt also zusammen mit der Ebene $B''C''D''$. Somit ist auch der letzte Theil unseres Satzes erhärtet: Jeder beliebige Punkt A'' von E_3 ist Eckpunkt eines dieser Curve einbeschriebenen Tetraeders, dessen Seitenflächen gleichzeitig Schmiegungsebenen von U_3 sind.

Es sei schliesslich gestattet, auf einen speciellen Fall unseres Satzes einzugehen, der zu einem interessanten Resultate führt. Fallen nämlich zwei Ecken, z. B. D und D', der Tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$ zusammen, so ist die collineare Beziehung der Ebenen α und α' in der Art speciell, dass der Punkt D ihrer Schnittgeraden den Ebenen entsprechend gemein ist.

Sie erzeugen daher in diesem Falle einen Ebenenbüschel 2. Ordnung und eine diesen berührende Gerade.*) Wenn wir dieses berücksichtigen, so erhalten wir folgenden Satz:

„Zwei beliebige, einer Raumcurve 3. Ordnung einbeschriebene Dreiecke werden von jedem Punkte der Raumcurve durch zwei Dreikante projicirt, welche einem Kegel 2. Ordnung umgeschrieben sind. Die Schnittgerade der Ebenen jener beiden Dreiecke ist eine Tangente dieses Kegels.“

Wie man sofort sieht, ist übrigens der erste Theil dieses Theorems eine unmittelbare Folge eines bekannten Satzes aus der Theorie der Kegelschnitte.

Hildesheim, den 31. März 1882.

*) Siehe Reye, l. c. pag. 236, Nr. 136 der Aufgaben.

Beweis des Satzes, dass eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlich singulären Stelle jedem Werth beliebig nahe kommt*).

Von

O. Hölder in Tübingen.

I. Gegeben sei ein Gebiet F, darin Punkt a, ferner $f(x)$ als Function einer complexen Variabeln, eindeutig bestimmt in jedem Punkt von F, ausser dem Punkt a selbst. Ferner soll f im ganzen Gebiet, abgesehen vom Punkt a, nicht blos stetig, sondern auch als Function einer complexen Variabeln differenzirbar sein mit stetigem Differentialquotienten $f'(x)$. Im Punkt a sei über $f(x)$ nichts bestimmt; die Function mag in a als nicht definirt gelten. Bei unendlicher Annäherung an a können f und f' möglicherweise über jede Grenze wachsen.

II. *Es soll nun bewiesen werden, dass, wenn $f(x)$ den in* I. *gegebenen Bedingungen genügt, nur drei Fälle eintreten können:*

1) *Es existirt eine Potenzreihe von $x - a$, so dass in der Umgebung von a*

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots.$$

2) *f kann in der Umgebung von a nach positiven und negativen Potenzen von $x - a$ entwickelt werden, wobei die negativen in endlicher Anzahl auftreten:*

$$f(x) = (x-a)^{-n}\{b_0' + b_1'(x-a) + \cdots\}, \quad n \text{ ganz.}$$

3) *$f(x)$ wird in unendlicher Nähe von a sowohl beliebig gross, als auch beliebig klein.*

III. Zum Beweis dient folgender Hilfssatz:

Wenn $f(x)$ unter einer festen Grenze bleibt in beliebiger Nähe von a, so tritt der erste Fall ein:

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots$$

für alle x in der Umgebung von a, ausser a selbst.

*) Cf. Weierstrass: „Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen" (Abhandlungen der Berliner Akademie 1876), sowie wegen der in Nr. V ff. berührten Verhältnisse E. Picard in den Comptes Rendus von 1879, p. 1024.

Beweis des Hilfssatzes:

Wir definiren zwei neue Functionen $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$, die erste durch Integration von $f(x)$, die zweite durch Integration von $\varphi(x)$.

Das bestimmte Integral $\int f(x)dx$ über eine bestimmte Curve hat einen vollständig bestimmten Werth, auch wenn a auf der Curve liegt, oder ein Endpunkt derselben ist, da f in der Nähe von a unter einer festen Grenze bleibt. Das Integral über einen geschlossenen Weg, der den Punkt a nicht umschliesst und nicht durch a geht, ist 0 nach dem Satz von Cauchy. Das Integral um den Punkt a herum muss vom Weg unabhängig sein, also 0, da es über einen unendlich kleinen Kreis um a herum erstreckt ∞ klein ist. Also ist das Integral erstreckt über eine beliebige geschlossene, den Punkt a nicht enthaltende Linie 0. Also jedes Integral über eine ganz beliebige geschlossene Curve, wie man leicht sieht durch eine ∞ kleine Aenderung des Integrationswegs, ist 0. $\int_c^b f(x)\,dx$ ist also vollständig unabhängig vom Integrationsweg. Wir bleiben natürlich immer im Gebiet F. c sei ein Punkt im Gebiet F. Wir setzen:

$$\varphi(x) = \int_c^x f(x)\,dx.$$

Nun ist $\varphi(x)$ eindeutig bestimmt im ganzen Gebiet, auch in a selbst. Ferner ist φ stetig im ganzen Gebiet, auch in a, denn es ist

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \int_a^{a+h} f(x)\,dx,$$

das Integral ist unabhängig vom Weg; nehmen wir die gerade Linie, so ist die absolute Länge des Weges $|h|$, also wird, da f endlich ist,

$$\text{mod. } [\varphi(a+h) - \varphi(a)]$$

∞ klein mit mod. h.

$\varphi(x)$ hat in jedem Punkt des Gebietes F einen stetigen Differentialquotienten, abgesehen vom Punkt a selbst. Dass in ihm φ einen Differentialquotienten habe, kann nicht behauptet werden.

Nun definiren wir in derselben Weise eine Function $\Phi(x)$ durch die Gleichung

$$\Phi(x) = \int_c^x \varphi(x)\,dx.$$

Es gilt dasselbe wie oben bei φ. Φ ist eindeutig bestimmt. $\Phi(x)$ hat aber auch in a einen Differentialquotienten als Function einer complexen Variabeln, denn:

$$\text{mod.}\left[\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h} - \varphi(a)\right]$$

wird ∞ klein mit mod. h.

Φ hat also in jedem Punkt des Gebiets einen Differentialquotienten, und dieser ist im ganzen Gebiet stetig. Also:

$$\Phi(x) = e_0 + e_1(x-a) + e_2(x-a)^2 + \cdots$$

und:

$$\frac{d^2}{dx}\Phi(x) = 2e_2 + 3\cdot 2e_3(x-a) + 4\cdot 3e_4(x-a)^2 \cdots .$$

$\frac{d^2}{dx^2}\Phi(x)$ und $f(x)$ stimmen aber überall mit einander überein in der Umgebung von a, ausser in a selbst, wo f nicht definirt ist. Da $\Phi''(x)$ auch in a stetig ist, so folgt, dass f bei der unendlichen Annäherung an a einer bestimmten Grenze $2e_2$ sich nähert. f kann also bei der Annäherung an a nicht unbestimmt werden, ohne beliebig grosse Werthe zu erhalten in unendlicher Nähe von a. Ist $f(x)$ unter einer Grenze, so ist:

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots$$

für alle x in der Umgebung von a, ausser a selbst.

IV. Man hat also zunächst zwei Fälle:

Erstens $f(x)$ bleibt unter einer festen Grenze, dann tritt der Fall ein, den wir in II. mit 1) bezeichneten.

Zweitens $f(x)$ erhält beliebig grosse Werthe in unendlicher Nähe von a.

Diesen Fall theilt man in zwei Unterfälle:

α) $f(x)$ hat Nullstellen in unendlicher Nähe von a.

β) Man kann um a herum ein Gebiet abgrenzen, in dem $f(x)$ nicht 0 wird.

In dem mit α) bezeichneten Fall wird also $f(x)$ in unendlicher Nähe von a sowohl beliebig gross, als auch beliebig klein. Es tritt also der Fall ein, den wir in II. mit 3) bezeichneten.

In dem mit β) bezeichneten Fall hat $\frac{1}{f(x)}$ in einer gewissen Umgebung von a die in I. angegebenen Eigenschaften. Wenn also $\frac{1}{f(x)}$ endlich bleibt, so ist es durch eine Potenzreihe darstellbar, die nothwendig von der Form ist:

$$\frac{1}{f(x)} = a_0(x-a)^\mu + a_1(x-a)^{\mu+1} + \cdots,$$

$$a_0 \text{ nicht } 0, \quad \mu > 0 \text{ ganz};$$

also ist:

$$f(x) = (x-a)^{-\mu}\left\{\frac{1}{a_0} + b_1(x-a) + \cdots\right\}.$$

Man hat also den Fall 2) in II.

Wenn aber $\frac{1}{f(x)}$ nicht unter einer festen Grenze bleibt, so wird $f(x)$ auch ∞ klein in unendlicher Nähe von a, da aber der Voraussetzung nach $f(x)$ auch beliebig gross wird, so tritt der Fall 3) ein.

Es ist also in der That nichts anderes möglich, als dass einer unserer Fälle 1), 2), 3) eintritt.

V. Der Hilfssatz giebt auch den Beweis an die Hand dafür, dass im 3. Fall die Function in unendlicher Nähe von a jedem Werth beliebig nahe kommt. Die Betrachtung ist ganz dieselbe, wie die von Herrn Weierstrass für einen Quotienten beständig convergirender Reihen. $f(x) - b$ genügt den in I. aufgestellten Bedingungen. $f(x) - b$ wird beliebig grosse Werthe erhalten können, da vorausgesetzt ist, dass für $f(x)$ der Fall 3) stattfinde. Entweder hat nun $f(x) - b$ Nullstellen in beliebiger Nähe von $x = a$, so kommt also $f(x)$ dem Werth b beliebig nahe in unendlicher Nähe von a, (die Function nimmt ihn sogar ∞ oft an in einer beliebig kleinen Umgebung von a); oder es giebt eine Umgebung von a, in der $f(x) - b$ nicht 0 wird. In dieser Umgebung genügt also $\frac{1}{f(x) - b}$ den Bedingungen in I.

Würde $\frac{1}{f(x) - b}$ unter einer Grenze bleiben, so wäre $f(x) - b$ entwickelbar, mit einer endlichen Zahl negativer Potenzen, was gegen die Voraussetzung ist; die Function $\frac{1}{f(x) - b}$ nimmt also auch ∞ grosse, $f(x) - b$ ∞ kleine Werthe an. Einfacher: Für $f(x) - b$ können auch nur die 3 Fälle eintreten 1), 2) oder 3); träte der Fall 1) ein, oder 2), so würde auch für $f(x)$ der Fall 1), beziehungsweise 2) stattfinden, also tritt der Fall 3) ein.

$f(x)$ kommt in unendlicher Nähe von a dem Werth b, also jedem beliebigen Werth, beliebig nahe.

VI. Beispiele:

1) $e^{\frac{1}{x}}$. Sei

$$x = \frac{1}{\alpha + i\beta}, \quad e^{\frac{1}{x}} = e^{\alpha} \cos b + i e^{\alpha} \sin b = \alpha + i\beta,$$

so muss sein:

$$e^{\alpha} = + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\cos b = \frac{\alpha}{e^{\alpha}},$$

$$\sin b = \frac{\beta}{e^{\alpha}}.$$

Vorausgesetzt dass $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ nicht 0 ist, d. h. dass α und β nicht beide 0 sind, kann man die Gleichungen erfüllen; a bestimmt sich

dabei eindeutig, b bleibt in der Weise unbestimmt, dass ein Vielfaches von 2π addirt werden kann. Dieses kann also beliebig gross, also $\frac{1}{a+ib}$, oder x beliebig klein angenommen werden. Die Function $e^{\frac{1}{x}}$ nimmt also in jedem noch so kleinen, den Nullpunkt enthaltenden Gebiet jeden endlichen, von 0 verschiedenen Werth ∞ oft an. Dem Werth 0 kommt die Function unendlich nahe in unendlicher Nähe des Nullwerthes des Arguments; ebenso steigt sie über jede Grenze in unendlicher Nähe des Nullpunktes.

Es lässt sich also noch unterscheiden, ob die Function einem bestimmten Werth b in unendlicher Nähe jener Stelle a blos ∞ nahe kommt, oder ob in jedem, den Punkt a enthaltenden, Flächengebiet Punkte vorhanden sind, in denen die Function den Werth b wirklich hat. Im letzteren Fall sind diese Punkte in unendlicher Anzahl vorhanden.

Die erste Eigenschaft hat nach dem soeben bewiesenen die Function in Beziehung auf jeden Werth b; die zweite nicht nothwendig in Beziehung auf alle Werthe; $e^{\frac{1}{x}}$ z. B. nicht in Beziehung auf 0 und ∞, dies sind die wesentlich singulären Werthe der inversen Function $\frac{1}{\log x}$.

2) $\sin\frac{1}{x}$ und $\cos\frac{1}{x}$ nehmen in jedem den Nullpunkt enthaltenden Gebiet jeden endlichen Werth unendlich oft an, nur haben sie keine Pole, wie auch $e^{\frac{1}{x}}$. Aber sie wachsen über jede Grenze. Der Unendlichkeitspunkt ist auch hier der einzige wesentlich singuläre Punkt der inversen Functionen, in dem man auch nicht nach gebrochenen Potenzen entwickeln kann, was möglich ist in den singulären Punkten $+1$ und -1 von arc. sin x und arc. cos x.

3) $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ und $\operatorname{cotg}\frac{1}{x}$ haben auch unendlich viele Pole in jedem den Nullpunkt enthaltenden Gebiet; hier werden aber die Werthe $+i$ und $-i$ nicht angenommen. Denn sollte

$$\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{i(e^{iy}+e^{-iy})} = \pm i$$

sein,

$$y = \frac{1}{x},$$

so müsste entweder e^{iy}, oder e^{-iy} gleich null sein.

$+i$ und $-i$ sind wieder die wesentlich singulären Stellen der inversen Function.

4) Ist $\varphi(y)$ eine eindeutige analytische Function mit einer wesentlich singulären Stelle im Unendlichen und doppelt periodisch,

so nimmt $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ in jedem den Nullpunkt enthaltenden Gebiet jeden Werth ∞ oft an.

VII. Die Eindeutigkeit ist eine wesentliche Voraussetzung. Z. B. $\log x$ hat im Nullpunkt einen wesentlich singulären Punkt und kommt in unendlicher Nähe desselben doch nicht jedem Werth beliebig nahe; denn es ist

$$\log(\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)) = \lg\varrho + i\varphi + 2n\pi i,$$

$\lg\varrho$ soll den reellen log der reellen positiven Grösse ϱ bedeuten; n ist eine beliebige positive oder negative ganze Zahl. Wenn

$$x = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

∞ klein sein soll, ist also ϱ ∞ klein, φ beliebig. Die imaginäre Coordinate von $\log x$ für ∞ kleine x ist also ganz beliebig; aber der reelle Theil wird stets negativ ∞ gross und ist $\lg(\mathrm{mod.}\ x)$.

Ganz ebenso verhält sich $\log x$ für ∞ grosse x, nur dass der reelle Theil pos. ∞ gross wird.

Tübingen, im März 1882.

Zur Construction des Polarsystems einer Fläche 3. Ordnung.

Von

H. Thieme in Posen.

Herr Sturm hat am Schlusse seiner Abhandlung: „Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften"*) das Vorhandensein einer Lücke in meiner Arbeit: „Die Definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme"**) behauptet und sich bemüht, diese Lücke, die sich bei der Construction des Polarsystems der Fläche 3. O. finden soll, auszufüllen. Diese Lücke ist thatsächlich nicht vorhanden.

Da ich meine Erledigung der Frage für die vollständigere halte, so möge es mir gestattet sein, meinen Gedankengang hier kurz zu skizziren.

Herr Sturm beweist a. a. O., dass die 3 Punkte A_1, A_2, A_3 und ihre Polarebenen α_{41}, α_{42}, α_{43} die gegenseitige Lage haben, dass ihnen eine eigentliche Fläche 2. O. genügt, ich beweise dasselbe für das ganze durch A_1, A_2, A_3 bestimmte Punktfeld und für das zugehörige durch α_{41}, α_{42}, α_{43} bestimmte Ebenenbündel; Herr Sturm benutzt die etwas modificirte secundäre Eigenschaft, dass das Dreieck A_1, A_2, A_3 und das Trieder α_{41}, α_{42}, α_{43} perspective Lage besitzen; ich benutze die fundamentale Eigenschaft des Polarsystems einer Fläche 2. O., dass das Punktfeld (A_1, A_2, A_3) und das Ebenenbündel $(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43})$ in einer solchen reciproken Beziehung stehen, dass jede Punktreihe des Punktfeldes mit dem zugehörigen Ebenenbüschel des Bündels involutorische Lage hat. Aus dieser fundamentalen Eigenschaft ergiebt sich auch leicht und in bekannter Weise die von Herrn Sturm benutzte Eigenschaft, wofür ich auf das bekannte Werk von Schröter über Kegelschnitte (§ 56) verweise.

Im Einzelnen beweise ich (S. 222, 223 meiner Arbeit) zunächst, wie dies ja auch Herr Sturm angegeben hat, folgenden Satz: Sind

*) Math. Ann. Bd. XIX, S. 484. Vergl. Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. XI, S. 444.

**) Zeitschr. f. Math. u. Physik Bd. XXIV, S. 221, 276.

eine Punktreihe (A_1, A_2) und ein Flächenbüschel (α_1^2, α_2^2) polar auf einander bezogen (d. h. projectiv und so, dass der Bedingung der gemischten Polaren genügt ist), so liegt die Punktreihe (A_1, A_2) mit dem Büschel der Polaren von (α_1^2, α_2^2) für irgend einen Punkt des Raumes involutorisch. Sodann ordne ich (S. 224), was Herr Sturm nicht mehr angiebt, ein Punktfeld (A_1, A_2, A_3) einem Flächenbündel $(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$ projectiv so zu, dass irgend ein Paar Flächen mit ihren Polen, also auch irgend ein Flächenbüschel mit der Punktreihe der Pole der Bedingung der gemischten Polaren genügt. Daher darf ich (S. 225) wohl, wenn ich nun zu einem 4. Punkte A_4 für das Flächenbündel $(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$ das Polarenbündel $(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43})$ construirt denke, aus dem Vorhergehenden in aller Strenge schliesen, dass das Punktfeld (A_1, A_2, A_3) und das Ebenenbündel $(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43})$ in einer solchen Beziehung stehen, wie sie für Pole und Polaren von Flächen 2. O. nothwendig ist, dass nämlich irgend eine Punktreihe aus (A_1, A_2, A_3) mit dem zugehörigen Ebenenbüschel aus $(\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{43})$ involutorisch liegt.

Die Eigenschaft, dass alle Flächen 2. O., welche zu den Punkten einer Ebene dieselben Polaren haben, eine einfache Mannichfaltigkeit bilden, habe ich geglaubt, als bekannt oder doch als ohne weiteres ersichtlich nicht besonders hervorheben zu müssen, selbst wenn sie noch nicht vorher als besonderer Satz von einem Synthetiker ausgesprochen sein sollte; ich wollte den Leser nicht von dem Hauptgedankengang ablenken. Daher habe ich auch nicht geglaubt, den Summand $-(-1)$ geometrisch aufhellen zu müssen; nicht die Formel

$$f(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1$$

habe ich für $n = 0$ und $n = -1$ benutzen wollen, sondern die voraufgehenden geometrischen Betrachtungen.

Posen, den 3. April 1882.

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

(Bekannt gemacht im Jahresbericht der Gesellschaft, Leipzig im März 1882.)

Für das Jahr 1885.

Die Theorie der Flächen dritter Ordnung hat durch die neueren Untersuchungen von Schläfli, Klein, Zeuthen und Rodenberg einen gewissen Abschluss erhalten, insofern es jetzt möglich ist, die Gesammtheit der bei diesen Flächen auftretenden Gestalten mit Leichtigkeit zu überblicken. Hieran anknüpfend wünscht die Gesellschaft

eine in gleichem Sinne durchzuführende Untersuchung der allgemeinen Flächen vierter Ordnung.

Die mannichfachen Betrachtungen über die Gestalten der Complexfläche, welche Plücker in seiner „Neuen Geometrie des Raumes" gegeben hat, sowie die allgemeinen Untersuchungen von Rohn über Kummer'sche Flächen werden dabei ebenso als Vorarbeiten zu betrachten sein, wie die Angaben von Zeuthen und Crone über die Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt. Preis 700 Mark.

Die anonym einzureichenden Bewerbungsschriften sind, wo nicht die Gesellschaft im besonderen Falle ausdrücklich den Gebrauch einer anderen Sprache gestattet, in *deutscher*, *lateinischer* oder *französischer* Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und *paginirt*, ferner mit einem *Motto* versehen und von einem versiegelten Couvert begleitet sein, dass auf der Aussenseite das Motto der Arbeit trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die Zeit der Einsendung endet mit dem *30. November des angegebenen Jahres*, und die Zusendung ist an den Secretär der Gesellschaft zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden durch die Leipziger Zeitung im März oder April des folgenden Jahres bekannt gemacht.

Die gekrönten Bewerbungsschriften werden Eigenthum der Gesellschaft, welche sich vorbehält, im gegebenen Falle den ausgesetzten Preis nach ihrem Ermessen von 700 Mark auf 1000 Mark zu erhöhen.

Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides*).

Von

Otto Staude in Leipzig.

(Mit einer lithograph. Tafel.)

Einleitung.

Die Auffindung von Focaleigenschaften der Flächen 2. Grades, welche den Focaleigenschaften der Kegelschnitte analog sind, ist der Zielpunkt zahlreicher Untersuchungen gewesen. Aus dieser Quelle ist einerseits Jacobi's**) auf das *Ivory'sche Theorem* gegründete Theorie der Flächen 2. Grades geflossen, welche von Joachimsthal***) in einem Punkte ergänzt und von Darboux†) weiter ausgeführt wurde, und ist anderseits die *modulare Erzeugungsweise* der Flächen 2. Grades hervorgegangen, welche sich an die Namen Mac Cullagh††), Chasles†††) und Amiot*†) knüpft. Neben diese ausgeführten Theorien stellen

*) Die Resultate dieser Abhandlung wurden am 6. März 1882 durch Herrn Scheibner der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig vorgelegt (vgl. die Berichte der Gesellschaft, Jahrg. 1882, S. 5).

**) Vgl. den Auszug aus einem Schreiben von Jacobi an Steiner im Crelle'schen Journale, Band XII, S. 137; ferner die geometrischen Theoreme aus dem Nachlasse Jacobi's, mitgetheilt von Hermes in Crelle's Journal, Bd. LXXIII, S. 179; auch Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, Th. I, Art. 191.

***) Vgl. die Mittheilung von Hermes aus Joachimsthal's hinterlassenen Papieren in Crelle's Journal, Bd. LXXIII, S. 207.

†) Darboux, Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux surfaces homofocales du second degré, Paris 1872.

††) Mac Cullagh, Proceedings of the R. Irish Academy, Bd. II, S. 446 und The collected Works of James Mac Cullagh, Dublin 1880, S. 260.

†††) Chasles, Noten des Aperçu historique.

*†) Amiot, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. VIII, S. 161; Bd. X, S. 109. Vgl. überdies Salmon-Fiedler a. a. O., Capitel VIII und Literaturnachweisungen dazu.

sich eine grosse Anzahl von Sätzen mit ähnlicher Tendenz von Mac Cullagh, Chasles*), Plücker**) und andern, welche die Analogie der Focalcurven der Flächen 2. Grades mit den Brennpunkten der Kegelschnitte hervorheben, darunter ein Satz von Mac Cullagh***), der die 4 Schnittlinien der beiden Focalkegel†) eines Punktes auf einer Fläche 2. Grades in Parallele stellt mit den beiden Brennstrahlen eines Punktes auf einem Kegelschnitt.

Die analytischen Hülfsmittel der namhaft gemachten Untersuchungen sind wesentlich *algebraischer* Natur, wie die entsprechenden Betrachtungen der ebenen Geometrie. Man wird aber in erweiterter Auffassung der Theorie der Focaleigenschaften der Kegelschnitte unter diese Theorie auch Constructionen, wie die Graves'sche Construction††) der Ellipse aus einer confocalen Ellipse mittels eines geschlossenen Fadens unterstellen dürfen, insofern aus ihr durch Specialisirung der Satz von der constanten Summe der Brennstrahlen hervorgeht. Die Graves'sche Construction, welche als eine *transscendente* zu bezeichnen ist, indem sie ihrer Natur nach mit der Längenbestimmung des Ellipsenbogens operirt, hat ihrerseits zu ähnlichen Sätzen für die Geometrie der Flächen 2. Grades Anlass gegeben. Bekannt ist die Construction der Krümmungscurve auf dem Ellipsoid aus einer andern Krümmungscurve derselben Art durch einen geschlossenen Faden†††), aus welcher die Brennpunktseigenschaft*†) der Kreispunkte des Ellipsoides für die Krümmungscurven desselben hervorgeht. Ausserdem giebt Chasles eine Construction der Krümmungscurve auf einer von 2 gegebenen confocalen Flächen 2. Grades mittels eines Fadens, dessen Enden auf der andern befestigt sind**†).

An diese transscendenten Constructionen schliesst sich der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung an: *Die Fadenconstruction des Ellipsoides aus zwei gegebenen confocalen Flächen.* Die bei der analytischen Behandlung dieses Thema's zu verwendenden Transscendenten sind hyperelliptische Integrale vom Geschlecht $p = 2$. Als Specialfälle 1. Stufe reihen sich Fadenconstructionen des Ellipsoides aus einer

*) Vgl. besonders Note XXXI des Aperçu historique.

**) Vgl. Plücker, Crelle's Journal, Bd. XXXV, S. 100.

***) Salmon-Fiedler a. a. O., Art. 181. Vgl. auch Mac Cullagh, Proceedings of the R. Irish Acad., Bd. II, S. 501; Liouville in Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XII, S. 423; W. Roberts, Annali di Matematica pura ed applicata, Bd. IV, S. 142 ff.

†) Salmon-Fiedler a. a. O., Art. 170.

††) Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie der Kegelschnitte, Art. 266. Hesse, Anal. Geometrie des Raumes, Vorlesung XXI.

†††) Vgl. Chasles, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XI, S. 15.

*†) Vgl. M. Roberts, ibid., S. 2.

**†) Vgl. die unter †††) citirte Stelle bei Chasles, S. 16.

gegebenen confocalen Fläche und einem gleichzeitig gegebenen Focalkegelschnitt derselben an, welche auf elliptische Integrale führen. Als Specialfall 2. Stufe geht eine Fadenconstruction des Ellipsoides aus seinen beiden Focalkegelschnitten hervor, welche den transscendenten Charakter der allgemeineren Fälle verloren hat, übrigens aber zu denselben in dem analogen Verhältnisse steht, wie die Fadenconstruction der Ellipse aus den Brennpunkten zu der Fadenconstruction aus einer confocalen Ellipse.

Was die nachfolgende Behandlung des Gegenstandes angeht, so ist die Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem gegebenen confocalen Ellipsoid und einschaligen Hyperboloid in § 8 abgeleitet. Die §§ 1 bis 5 sind dazu bestimmt, die zu dieser Ableitung nöthigen Hülfsmittel, die elliptischen Coordinaten (§ 1) und verschiedene im Wesentlichen bekannte Sätze über die Krümmungscurven (§ 2) und geodätischen Linien (§ 4) auf den Flächen 2. Grades, sowie über die gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen (§ 3) einzuführen.

In § 5 sind die über die Bestimmung der Bogenlängen der 3 genannten Liniengattungen in den §§ 2 bis 4 gewonnenen Resultate als Hauptgrundlage für die Beweisführung des § 8 nochmals zusammengestellt. Die §§ 6 und 7 sind aus einem Bedürfniss entsprungen, welches die Theorie der Fadenconstruction des Ellipsoides aus 2 confocalen Flächen im Vergleich zu der entsprechenden Construction der Ellipse wesentlich complicirt. Während nämlich die Lage, welche ein geschlossener, um eine Ellipse geschlungener Faden, der in der Ebene durch einen Stift gespannt wird, annimmt, sich unmittelbar selbst unzweideutig bestimmt, muss die Lage eines um die Combination zweier confocaler Flächen geschlungenen geschlossenen Fadens, der etwa durch ein Häkchen gespannt wird, noch gewissen Bedingungen genügen, damit der Punkt, wo der Faden über das Häkchen gleitet, bei der Bewegung des letzteren ein Ellipsoid beschreibt. Dass aber diese Bedingungen erfüllbar sind, ist nicht unmittelbar evident; es zu beweisen, ist die Aufgabe der §§ 6 und 7.

In § 9 wird aus dem Resultate des § 8 die oben erwähnte Chasles'sche Fadenconstruction der Krümmungscurve auf einer von zwei gegebenen confocalen Flächen, allerdings nicht in ihrer allgemeinen Fassung, abgeleitet, ferner abgeleitet ein Satz über die Länge eines aus Stücken einer Krümmungscurve und geodätischer Tangenten derselben zusammengesetzten geschlossenen Curvenzuges auf dem Ellipsoid, endlich das Graves'sche Theorem. Die §§ 10 und 11 behandeln die Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem confocalen Ellipsoid und seiner Focalhyperbel (§ 10) und die Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem confocalen einschaligen Hyperboloid und seiner Focalellipse (§ 11) und zwar deshalb in ausführ-

licherer Weise, weil diese Specialfälle des allgemeineren Resultates des § 8 ihrerseits besondere Eigenthümlichkeiten darbieten. Im Anschluss sodann an den § 12, welcher die Fadenconstruction des Ellipsoides aus seinen Focalcurven in Kürze ableitet, giebt § 13 eine Uebersicht über diejenigen Focaleigenschaften der 3 centrischen Flächen 2. Grades, auf welche die Construction des § 12 unmittelbar überleitet.

---

§ 1.

Bezeichnung der elliptischen Coordinaten und andere Festsetzungen.

Unter Anwendung der gewöhnlichen elliptischen Coordinaten wird ein Punkt des Raumes, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, bestimmt durch die Parameter $t = \lambda, \mu, \nu$ der 3 Flächen des confocalen Systems:

$$\frac{x^2}{\alpha - t} + \frac{y^2}{\beta - t} + \frac{z^2}{\gamma - t} = 1,$$

welche durch ihn hindurchgehen. Von diesen 3 Flächen ist eine (λ) ein Ellipsoid, eine andere (μ) ein einschaliges und eine dritte (ν) ein zweischaliges Hyperboloid. Nimmt man die Constanten α, β, γ als positiv und der Grösse nach geordnet an, so bewegen sich λ, μ, ν innerhalb gewisser, durch das folgende System von Ungleichungen bestimmter Grenzen:

$$\alpha > \nu > \beta > \mu > \gamma > \lambda > -\infty.$$

Den Grenzwerthen $\nu = \alpha$, $\left.\begin{matrix}\nu\\ \mu\end{matrix}\right\} = \beta$, $\left.\begin{matrix}\mu\\ \lambda\end{matrix}\right\} = \gamma$, $\lambda = -\infty$ entsprechen in bekannter*) Weise die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und die unendlich ferne Ebene.

Für die vorliegenden Betrachtungen wird die Combination zweier Flächen des confocalen Systems, eines Ellipsoides λ_0 und eines einschaligen Hyperboloides μ_0, als gegeben gedacht. In dem Raume ausserhalb dieser Flächen, d. h. in dem Raume, welcher die Focalellipse und die Focalhyperbel des Systems nicht enthält, kommen nur solche Werthe der Variabeln λ und μ in Betracht, die den Ungleichungen entsprechen:

$$\lambda_0 \geqq \lambda \geqq -\infty, \quad \mu_0 \geqq \mu \geqq \gamma.$$

Dieser Raum (R) wird durch die Ebenen $\nu = \beta$ und $\nu = \alpha$ in

---

*) Vgl. z. B. Chasles, Résumé d'une Théorie des coniques sphériques homofocales et des surfaces du second ordre homofocales vom Jahre 1860 in Liouville's Journal, II. Serie, Bd. V, S. 439.

4 Fächer getheilt, die den Quadranten des Ebenenstückes $\mu = \gamma$ entsprechend (Fig. 1) mit den Nummern 1 bis 4 bezeichnet werden sollen.

Für gewisse Functionen der elliptischen Coordinaten, die bei der folgenden Untersuchung beständig gebraucht werden, seien von vorn herein folgende Abkürzungen eingeführt: Es sollen Λ, M, N die *positiven* Werthe der in dem Raume R überall reellen Quadratwurzeln:

$$\Lambda = \sqrt{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)(\mu_0 - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)},$$
$$\mathsf{M} = \sqrt{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\mu - \gamma)(\mu_0 - \mu)(\mu - \lambda_0)},$$
$$\mathsf{N} = \sqrt{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \gamma)(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0)}$$

bedeuten und soll weiter zur Abkürzung gesetzt werden:

$$\frac{2\Lambda}{(\lambda_0 - \lambda)(\mu_0 - \lambda)} = L,$$
$$\frac{2\mathsf{M}}{(\mu - \lambda_0)(\mu_0 - \mu)} = M,$$
$$\frac{2\mathsf{N}}{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)} = N,$$

wo L, M, N, wie Λ, M, N, positiv sind.

§ 2.

Das Längenelement der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$.

Aus der bekannten Formel für das Linienelement des Raumes in elliptischen Coordinaten*):

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{1}{4}\frac{(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)\,d\lambda^2}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\gamma - \lambda)} + \frac{1}{4}\frac{(\nu - \mu)(\lambda - \mu)\,d\mu^2}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\gamma - \mu)} + \frac{1}{4}\frac{(\lambda - \nu)(\mu - \nu)\,d\nu^2}{(\alpha - \nu)(\beta - \nu)(\gamma - \nu)}$$

folgt für das Element ds der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0:

$$ds = \pm \frac{d\nu}{N}.$$

Durch die Nummerirung der Fächer des Raumes R ist den beiden Zweigen K_1 und K_2 der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$ eine bestimmte „positive" Durchlaufungsrichtung aufgeprägt (Fig. 3); in Bezug auf diese bezeichne K_1 den rechten und K_2 den linken Zweig der Durchdringungscurve. Im Sinne der positiven Richtung der beiden Zweige

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch, S. 205; 210.

gemessen ist $d\nu$ längs beider Zweige positiv im 1. und 3., negativ im 2. und 4. Fache. Um durch Ausführung der Integration $\int \pm \frac{d\nu}{N}$ längs irgend eines Stückes der Durchdringungscurve in der positiven Richtung derselben den positiven Werth der betreffenden Länge zu erhalten, muss man daher der in $\pm N$ enthaltenen Quadratwurzel $\pm N$ das positive Vorzeichen im 1. und 3., das negative im 2. und 4. Fache ertheilen, sodass $\pm \frac{d\nu}{N}$ immer positiv bleibt. Es ist wegen des Folgenden zweckmässig, jedem Punkte λ, μ, ν des Raumes R einen Index beigelegt zu denken, der durch $\widetilde{\mathrm{N}}$ bezeichnet sei und den Werth der Quadratwurzel $\pm \mathrm{N}$ in dem Punkte einschliesslich des bei der erwähnten Integration anzuwendenden Vorzeichens angiebt; es ist also $\widetilde{\mathrm{N}} = +\mathrm{N}$ im 1. und 3., $\widetilde{\mathrm{N}} = -\mathrm{N}$ im 2. und 4. Fache. In entsprechendem Sinne soll für die Function $\pm N$, die sich von $\pm \mathrm{N}$ nur um einen positiven Factor unterscheidet, das Symbol $\widetilde{N}$ gebraucht werden.

Diesen Festsetzungen nach ist der positive Werth des Linienelementes der Curvenzweige K_1 und K_2 in positiver Richtung gemessen immer:

$$d\tilde{s} = \frac{d\nu}{\widetilde{N}}.$$

§ 3.

Differentialgleichungen und Längenelement der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0.

Indem man in der Gleichung des Berührungskegels vom Punkte $x'y'z'$ an die Fläche λ_0:

$$(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)(x-x')^2+(\gamma-\lambda_0)(\alpha-\lambda_0)(y-y')^2+(\alpha-\lambda_0)(\beta-\lambda_0)(z-z')^2$$
$$-(\alpha-\lambda_0)(yz'-zy')^2-(\beta-\lambda_0)(zx'-xz')^2-(\gamma-\lambda_0)(xy'-yx')^2=0$$

und der analogen Gleichung für die Fläche μ_0

$$x'=x+dx, \quad y'=y+dy, \quad z'=z+dz$$

setzt, erhält man als Differentialgleichungen, denen die Projectionen dx, dy, dz des Elementes einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 gleichzeitig genügen müssen:

$$(\beta-\lambda_0)(\gamma-\lambda_0)\,dx^2+\cdots \quad -(\gamma-\lambda_0)(xdy-ydx)^2=0,$$
$$(\beta-\mu_0)(\gamma-\mu_0)\,dx^2+\cdots \quad -(\gamma-\mu_0)(xdy-ydx)^2=0.$$

Diese Differentialgleichungen lauten, in elliptische Coordinaten übertragen:

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(\mu-\lambda_0)(\nu-\lambda_0)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}d\lambda^2+\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)(\nu-\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}d\mu^2 \\ \qquad+\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(\lambda-\lambda_0)(\mu-\lambda_0)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}d\nu^2=0, \\ \frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(\mu-\mu_0)(\nu-\mu_0)}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)}d\lambda^2+\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)(\nu-\mu_0)(\lambda-\mu_0)}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\gamma-\mu)}d\mu^2 \\ \qquad+\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)(\lambda-\mu_0)(\mu-\mu_0)}{(\alpha-\nu)(\beta-\nu)(\gamma-\nu)}d\nu^2=0 \end{cases}$$

und können, indem einmal $d\mu^2$ und einmal $d\lambda^2$ eliminirt, sodann die Abkürzungen M^2 und $\widetilde{\mathsf{N}}^2=\mathsf{N}^2$ eingeführt und schliesslich die Wurzeln ausgezogen werden, auf die Form:

$$(2)\quad \begin{cases} \mp(\mu-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+(\nu-\mu)\frac{d\nu}{\widetilde{\mathsf{N}}}=0, \\ \pm(\mu-\lambda)\frac{d\mu}{\mathsf{M}}+(\nu-\lambda)\frac{d\nu}{\widetilde{\mathsf{N}}}=0 \end{cases}$$

gebracht werden. Aus dieser geht durch einfache Combination die weitere Form:

$$(3)^*)\quad \begin{cases} \pm\frac{d\lambda}{\Lambda}\pm\frac{d\mu}{\mathsf{M}}+\frac{d\nu}{\widetilde{\mathsf{N}}}=0, \\ \pm\frac{\lambda d\lambda}{\Lambda}\pm\frac{\mu d\mu}{\mathsf{M}}+\frac{\nu d\nu}{\widetilde{\mathsf{N}}}=0, \end{cases}$$

hervor, wobei die obern und untern Vorzeichen von $\frac{d\lambda}{\Lambda}$ und $\frac{d\mu}{\mathsf{M}}$ in (2) und (3) beziehungsweise zusammengehören.

Da es nicht möglich ist, dass eine gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 noch eine dritte Fläche des confocalen Systems berührt, weil die Complexgleichung des letzteren in dem Parameter t (§ 1) quadratisch ist**), so schliesst man leicht, dass sich das Vorzeichen von $d\nu$ längs einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 innerhalb eines und desselben Faches des Raumes R nicht umkehren kann. Eine solche Umkehr findet nur beim Uebergange aus einem Fache in das andere statt. Es verhält sich daher das Differential $\frac{d\nu}{\widetilde{\mathsf{N}}}$ auf einer solchen Tangente analog, wie auf einem Zweige der Durchdringungscurve $(\lambda_0\mu_0)$ (vgl. § 2), und man ist berechtigt, *die*

*) Es ist dies die Form der Differentialgleichungen des Abel'schen Theorems für den Fall der hyperelliptischen Differentiale $p=2$, wie sie Jacobi giebt (Vorlesungen über Dynamik, S. 234). Auf die hier benutzte geometrische Bedeutung dieser Differentialgleichungen bin ich durch Herrn Klein aufmerksam gemacht worden.

**) Vgl. auch Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. R., Th. I, Art. 176.

positive Richtung einer solchen Tangente als diejenige zu definiren, in der $\frac{dv}{\widetilde{N}}$ *positiv ist.*

Zugleich sei bemerkt, dass fernerhin die Differentiale $d\lambda, d\mu, dv$ längs der Tangente überall im positiven Sinne derselben gemessen werden sollen. Da alsdann in den Differentialgleichungen (2) der 2. Term immer positiv ist, so hängt die Auswahl des + oder − Zeichens für den 1. Term allein davon ab, ob $d\lambda$ und $d\mu$ für das betreffende Element der Tangente positiv oder negativ ist. Wie nun wieder aus dem eben benutzten Satze, dass eine gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 keine dritte Fläche des confocalen Systems berührt, gefolgert wird, findet ein Wechsel des Vorzeichens von $d\mu$ nur an 2 Stellen statt, nämlich wo die Tangente die Ebene $\mu = \gamma$ schneidet und wo sie die Fläche $\mu = \mu_0$ berührt, und findet ein Wechsel des Vorzeichens von $d\lambda$ nur an 2 Stellen statt, nämlich wo die Tangente die Ebene $\lambda = -\infty$ schneidet und wo sie die Fläche $\lambda = \lambda_0$ berührt. Diesen Erwägungen zu Folge können an jeder gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0, wenn man dieselbe als im Unendlichen in sich zurücklaufend ansieht, 4 Abschnitte unterschieden werden, für welche in den Differentialgleichungen (2) und (3) verschiedene Vorzeichencombinationen gelten und zwar:

(4)

in (1) u. folglich in (2)		
a) $\left.\begin{matrix}-+\\++\end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix}+++\\+++\end{matrix}\right\}$	so lange die Tangente von $\lambda = -\infty$ fort nach $\lambda = \lambda_0$ hin und von $\mu = \mu_0$ fort nach $\mu = \gamma$ hinläuft;
b) $\left.\begin{matrix}++\\++\end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix}-++\\-++\end{matrix}\right\}$	so lange sie von $\lambda = \lambda_0$ fort nach $\lambda = -\infty$ hin und von $\mu = \mu_0$ fort nach $\mu = \gamma$ hinläuft;
c) $\left.\begin{matrix}-+\\-+\end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix}+-+\\+-+\end{matrix}\right\}$	so lange sie von $\lambda = -\infty$ fort nach $\lambda = \lambda_0$ hin und von $\mu = \gamma$ fort nach $\mu = \mu_0$ hinläuft;
d) $\left.\begin{matrix}++\\-+\end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix}--+\\--+\end{matrix}\right\}$	so lange sie von $\lambda = \lambda_0$ fort nach $\lambda = -\infty$ hin und von $\mu = \gamma$ fort nach $\mu = \mu_0$ hinläuft.

Indem man die Gleichungen (2) benutzt, um in dem Ausdrucke für das Linienelement (§ 2) die Variabeln zu separiren*), ergiebt sich für den positiven Werth des in positiver Richtung gemessenen Längenelementes ds einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0,

*) Vgl. über die Methode z. B. Hesse, Anal. Geom. d. Raumes, Vorl. 23, zu Formel 19.

jenachdem demselben die Vorzeichencombinationen (4) a), b), c) oder d) zukommen:

$$(5)\quad \begin{cases} ds = +\frac{d\lambda}{L} - \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{N}, \\ ds = -\frac{d\lambda}{L} - \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{N}, \\ ds = +\frac{d\lambda}{L} + \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{N}, \\ ds = -\frac{d\lambda}{L} + \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{N}. \end{cases}$$

Die Vorzeichen in diesen Ausdrücken (5) bestimmen sich also durch die Bedingung, dass alle 3 Differentiale rechter Hand für sich einen positiven Werth erhalten müssen.

Die 4 verschiedenen Vorzeichencombinationen in den Differentialgleichungen (2) und (3), welche einerseits 4 verschiedenen Abschnitten einer gemeinsamen Tangente der beiden Flächen λ_0 und μ_0 zukommen, entsprechen anderseits den Richtungen der 4 gemeinsamen Tangenten, die von jedem Punkte λ, μ, ν des Raumes R an die beiden Flächen gelegt werden können. Diese 4 Tangenten ordnen sich bekanntlich*) mit Bezug auf die 3 Normalen N_λ, N_μ, N_ν der durch den Punkt gehenden Flächen λ, μ, ν auf 3 verschiedene Weisen in 2 Paare, so dass bei jeder der 3 Anordnungen eine der 3 Normalen gleichzeitig die beiden von je zwei Tangenten desselben Paares gebildeten Winkel halbirt. So giebt es beispielsweise eine Anordnung der 4 Tangenten in 2 Paare *„in Bezug auf λ conjugirter Tangenten“*, bei der die Normale N_λ des Ellipsoides λ die Winkel der beiden Paare halbirt. In der Gleichungsform (3) entspricht, wie man sich leicht überzeugt, den Vorzeichencombinationen

$$\left.\begin{matrix} + + + \\ + + + \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} - + + \\ - + + \end{matrix}\right\} \quad \text{oder} \quad \left.\begin{matrix} + - + \\ + - + \end{matrix}\right\} \text{ und } \left.\begin{matrix} - - + \\ - - + \end{matrix}\right\}$$

*) Die Gleichungen der 4 Tangenten in Bezug auf die Normalen als Axen giebt Mac Cullagh in den Proceedings of the R. Irish Academy, Bd. II, S. 501. Die Cosinus der Winkel ∂_λ, ∂_μ, ∂_ν, welche die Tangenten mit den Normalen N_λ, N_μ, N_ν bilden, finden sich bei Liouville, in Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XII, S. 423. Die betreffenden Formeln lauten in der hier eingeführten Bezeichnung:

$$\cos^2\partial_\lambda = \frac{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\mu_0)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}, \quad \cos^2\partial_\mu = \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu-\mu_0)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)},$$

$$\cos^2\partial_\nu = \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}.$$

ein Paar in Bezug auf λ conjugirter Tangenten. Es kehrt sich daher, wenn man an der Stelle λ, μ, ν von einer gemeinsamen Tangente der Flächen λ_0 und μ_0 auf die in Bezug auf λ conjugirte Tangente übergeht und nach wie vor die positive Durchlaufungsrichtung einhält, bei diesem Uebergange in den gleichzeitig geltenden Differentialgleichungen (2) oder (3) allein das Vorzeichen von $\frac{d\lambda}{\Lambda}$ um. Die analoge Anordnung der 4 Tangenten in andere Paare mit Bezug auf die Normalen der Hyperboloide μ und ν im Punkte $\lambda\mu\nu$ findet in den Vorzeichencombinationen der Differentialgleichungen (2) und (3) einen entsprechenden Ausdruck.

§ 4.

Differentialgleichung und Längenelement der geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve der Flächen λ_0 und μ_0 auf diesen Flächen.

Die Differentialgleichung der geodätischen Tangente der Durchdringungscurve $(\lambda_0\mu_0)$ ist in den eingeführten Bezeichnungen auf dem Ellipsoid λ_0*):

$$(6)\quad \frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu^2}{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu_0-\mu)} - \frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu^2}{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\mu_0)} = 0$$

und auf dem Hyperboloid μ_0:

$$(7)\quad \frac{(\mu_0-\lambda)\,d\lambda^2}{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\lambda_0-\lambda)} - \frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu^2}{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)} = 0.$$

Man erkennt unmittelbar, wie diese Gleichungen aus den Gleichungen (1) des § 3 hervorgehen. Setzt man nämlich dort $\lambda = \lambda_0$, so giebt die erste Gleichung (1) $d\lambda = 0$ und geht folglich die zweite in die Gleichung (6) über; ebenso leitet sich (7) mit $\mu = \mu_0$ aus (1) ab. Es folgt daraus der von Chasles**) auf anderem Wege bewiesene Satz:

I. *Die gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0 sind in ihren Berührungspunkten mit diesen Flächen zugleich Tangenten von geodätischen Linien, welche auf den Flächen durch jene Berührungspunkte gehen und ihrerseits geodätische Tangenten der Durchdringungscurve $(\lambda_0\mu_0)$ sind.*

Da hiernach jedes Element einer geodätischen Tangente von $(\lambda_0\mu_0)$ auf λ_0 oder μ_0 zugleich ein Element einer gemeinsamen Tangente der beiden Flächen λ_0 und μ_0 ist, so kann man, wie auf diesen Tangenten, so auch auf den geodätischen Linien der Flächen λ_0 und μ_0, welche die

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 214. — Hesse, Anal. Geom. des Raumes, Vorl. XXIII, Formel 16.

**) Chasles, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XI, S. 11.

Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$ berühren, *eine positive Richtung dadurch definiren*, dass in derselben $\frac{dv}{\widetilde{N}}$ immer positiv bleibt. Mit den in § 1 eingeführten Abkürzungen können unter gleichzeitiger Ausziehung der Quadratwurzeln die Gleichungen (6) und (7) geschrieben werden:

$$(6) \qquad \pm (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{M} + (\nu - \lambda_0) \frac{dv}{\widetilde{N}} = 0,$$

$$(7) \qquad \pm (\mu_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + (\nu - \mu_0) \frac{dv}{\widetilde{N}} = 0.$$

Ueber die Vorzeichen von $d\lambda$ und $d\mu$ gilt nach Satz I bei den geodätischen Linien dasselbe, wie bei den gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 und man erhält ähnlich, wie dort, die Regeln: Es gelten für die geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$

$$(8) \quad \begin{cases} \text{auf dem Ellipsoid } \lambda_0 \text{ in der Differentialgleichung (6) die Vorzeichen:} \\ -+, \text{ so lange die Tangente von } \mu = \gamma \text{ weg auf } \mu = \mu_0, \\ ++, \text{ so lange sie von } \mu = \mu_0 \text{ weg auf } \mu = \gamma \text{ zuläuft;} \\ \text{auf dem Hyperboloid } \mu_0 \text{ in (7) die Vorzeichen:} \\ -+, \text{ so lange die Tangente von } \lambda = -\infty \text{ weg auf } \lambda = \lambda_0, \\ ++, \text{ so lange sie von } \lambda = \lambda_0 \text{ auf } \lambda = -\infty \text{ zuläuft.} \end{cases}$$

Indem man die Gleichungen (6) und (7) benutzt, um in dem Ausdrucke für das Linienelement auf den Flächen λ_0 und μ_0 (§ 2) die Variabeln zu separiren, so erhält man für den positiven Werth des in positiver Richtung gemessenen Längenelements der geodätischen Linie bezüglich den Vorzeichencombinationen (8) der Differentialgleichungen entsprechend:

$$(9) \quad \begin{cases} d\sigma = \pm \frac{d\mu}{M} + \frac{dv}{\widetilde{N}}, \\ d\sigma = \pm \frac{d\lambda}{L} + \frac{dv}{\widetilde{N}}. \end{cases}$$

Es müssen also auch hier, wie bei den Ausdrücken (5) in § 3, die einzelnen Terme rechter Hand je für sich positiv ausfallen.

Die geodätischen Tangenten der Krümmungscurve $\mu = \mu_0$ auf λ_0 winden sich bekanntlich ohne Ende auf der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ zwischen den beiden Zweigen K_1 und K_2 der Krümmungscurve in der Weise herum, dass sie immer abwechselnd K_1 und K_2 berühren. Ein zwischen zwei aufeinanderfolgenden Berührungspunkten mit dem einen und dem andern Zweige gelegenes Stück einer geodätischen Tangente sei als *ein geodätischer Halbbogen der Zone* $(\mu_0 \mu_0)$ bezeichnet. Mit Bezug auf die festgesetzte positive Durchlaufungsrichtung der geodätischen

Linien zerfallen die geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ in 2 Classen, solche die von K_1 nach K_2, und solche die von K_2 nach K_1 laufen; jene sollen *geodätische Halbbogen* 1. *Art*, diese 2. *Art* heissen.

Die beiden Vorzeichencombinationen der Differentialgleichungen (6) und (7), welche sich nach (8) auf verschiedene Strecken der geodätischen Linien vertheilen, entsprechen ausserdem den Richtungen der beiden geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve, welche durch jeden Punkt der Fläche hindurchgehen und, was das Ellipsoid betrifft, immer von verschiedener Art sind.

§ 5.

Das Längenelement der kürzesten Linien.

Das für die Folge wichtigste Resultat der §§ 2 bis 4 ist das folgende:

II. *Das Längenelement dreier verschiedener Liniengattungen: der geradlinigen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und μ_0, der geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve auf den Flächen und der Durchdringungscurve selbst, kann durch ein und dieselbe Formel:*

$$dS = \pm \frac{d\lambda}{L} \pm \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{N}$$

gegeben werden.

Für die Durchdringungscurve ist nämlich $\frac{d\lambda}{L} = 0$ und $\frac{d\mu}{M} = 0$, sodass $dS = d\mathfrak{s}$ wird (§ 2); für die geodätischen Linien ist $\frac{d\lambda}{L} = 0$ oder $\frac{d\mu}{M} = 0$, sodass $dS = d\sigma$ wird (§ 4, 9); im Uebrigen umfasst der Ausdruck für dS die Formeln (5) des § 3. *Die Vorzeichen sind so zu bestimmen, dass die beiden ersten Differentiale, soweit sie nicht verschwinden, positiv ausfallen, wie das dritte.*

Die Integrale, durch welche sich die Bogenlänge S nach Satz II ausdrückt, sind hyperelliptische Integrale 2. Gattung*) vom Geschlecht $p = 2$. Dieselben würden beiläufig Integrale 3. Gattung werden bei Anwendung der allgemeinen projectivischen Maassbestimmung mit einer eigentlichen Fläche des confocalen Systems als Fundamentalfläche. Bedient man sich der projectivischen Verallgemeinerung und der homogenen Schreibweise der elliptischen Coordinaten in der Bezeichnungsweise meiner Inauguraldissertation**), so sind die betreffenden Integrale 3. Gattung von der Form:

*) Vgl. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, I. Abth., Art. 4.
**) Leipziger Dissertationen 1881.

$$C\int \frac{(\tau_1\lambda_2 - \tau_2\lambda_1)(\tau_1'\lambda_2 - \tau_2'\lambda_1)(\lambda_1 d\lambda_2 - \lambda_2 d\lambda_1)}{(\omega_1\lambda_2 - \omega_2\lambda_1)\Lambda};$$

darin ist:

$$\Lambda = \sqrt{(\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1)(\beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1)(\gamma_1\lambda_2 - \gamma_2\lambda_1)(\delta_1\lambda_2 - \delta_2\lambda_1)(\tau_1\lambda_2 - \tau_2\lambda_1)(\tau_1'\lambda_2 - \tau_2'\lambda_1)},$$

$\tau_1 : \tau_2$ und $\tau_1' : \tau_2'$ die dem obigen λ_0 und μ_0 entsprechenden Parameter und $\omega_1 : \omega_2$ der Parameter der Fundamentalfläche der Maassbestimmung, endlich C eine von diesen Parametern abhängige Constante.

Man mag bemerken, dass die 3 Liniengattungen, von denen in Satz II die Rede ist, sämmtlich als kürzeste Linien im Raume von 3 Dimensionen betrachtet werden können. Die gemeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen sind absolut kürzeste Linien dieses Raumes und zwar die allgemeinsten, weil jede gerade Linie 2 Flächen des confocalen Systems berührt. Die geodätischen Tangenten einer Krümmungscurve sind kürzeste Linien, die auf *einer* Fläche 2. Grades liegen, und zwar die allgemeinsten, weil jede geodätische Linie auf einer Fläche 2. Grades eine Krümmungscurve berührt. Die Durchdringungscurven endlich sind die einzigen und also auch die kürzesten Linien, die gleichzeitig auf *zwei* Flächen 2. Grades liegen.

In diesem Sinne können im Raume von n Dimensionen kürzeste Linien*) von n verschiedenen Arten mit Bezug auf ein System confocaler Flächen 2. Grades untersucht und für dieselben ein ähnlicher Satz, wie der Satz II, bewiesen werden.

§ 6.

Ueber den Verlauf der geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0\mu_0)$ des Ellipsoides.

Integrirt man die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid λ_0, welche die Krümmungscurve μ_0 berühren:

$$(6) \qquad \pm(\mu - \lambda_0)\frac{d\mu}{M} + (\nu - \lambda_0)\frac{d\nu}{N} = 0$$

längs eines beliebigen geodätischen Halbbogens etwa 1. Art der Zone $(\mu_0\mu_0)$ von dem Berührungspunkte $B_1 = \lambda_0\mu_0\nu_1$ desselben mit dem rechten Zweige K_1 der Durchdringungscurve bis zu dem nächsten Berührungspunkt $B_2 = \lambda_0\mu_0\nu_2$ mit dem linken Zweige K_2 in positiver Richtung unter Bezugnahme auf die Vorzeichenbestimmung (8) in § 4, so erhält man zwischen ν_1 und ν_2 die Relation:

*) Vgl. hierzu Schläffli, Crelle's Journal, Bd. XLIII, S. 23; ferner Lüroth, Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 13, S. 156.

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\widetilde{N}}=2\int_{\gamma}^{\mu_0}(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{M}.$$

Der Werth des Integrals linker Hand bleibt in Folge der Eigenschaften des Differentials $\frac{d\nu}{\widetilde{N}}$ der nämliche, wenn das Integral, anstatt längs der geodätischen Linie von B_1 bis B_2, längs des Zweiges K_1 von B_1 bis B_2' hin erstreckt wird, wofern B_2' derjenige der 4 Punkte $\lambda_0\mu_0\nu_2$ auf K_1 ist, der mit B_2 in demselben Fache des Raumes R liegt (vgl. Fig. 2, welche die Zone $(\mu_0\mu_0)$ in schematischer Ausbreitung auf die Ebene darstellt). Nun erhält ν bei einer Durchlaufung des Zweiges K_1 in positiver Richtung von B_1 aus den Werth ν_1 in 4 Punkten B_1, B_1' B_1'', B_1''' (Fig. 2) und das Integral $\int_{\nu_1}^{\nu}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\widetilde{N}}$, welches bei positiver Bewegung von ν beständig wächst, hat, falls es im Punkte B_1 mit dem Werthe 0 ausging, im Punkte B_1'' den Werth $2\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{N}$; die Punkte B_1 und B_1'' theilen den Umfang des Zweiges K_1, und entsprechend die Stücke von Curven $\nu=\nu_1$, welche die Punkte B_1 und B_1'' bezüglich mit den gegenüberliegenden Punkten des Zweiges K_2 verbinden, die Zone $(\mu_0\mu_0)$ in 2 gleiche Theile. Nach diesen Bemerkungen ist offenbar:

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\widetilde{N}}=2\int_{\gamma}^{\mu_0}(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{M}<\text{ oder }>2\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{N},$$

jenachdem der geodätische Halbbogen B_1B_2 weniger oder mehr als eine Hälfte der Zone $(\mu_0\mu_0)$ spannt, und folgt umgekehrt aus der Ausdehnung des Halbbogens die Richtigkeit der einen oder andern Ungleichung:

$$2\int_{\gamma}^{\mu_0}(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{M}\lesseqgtr 2\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{N}.$$

Da diese Bedingung von der Lage des beliebig gewählten geodätischen Halbbogens B_1B_2 ganz unabhängig ist, so folgt:

Sobald man von irgend einem geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0\mu_0)$ weiss, dass er weniger oder mehr als die halbe Zone spannt, so gilt das Gleiche von allen Halbbogen der Zone.

Wenn daher durch die folgende*) Betrachtung für einen geodätischen Halbbogen von ausgezeichneter Lage bewiesen wird, dass er weniger als eine Halbzone spannt, so gilt dies allgemein.

*) Diesen Beweis verdanke ich Herrn Klein.

Durch die x-Axe des Coordinatensystems, welche das Ellipsoid λ_0 im Punkte $P = \lambda_0, \gamma, \beta$ trifft, seien 2 Ebenen E und E' gelegt, welche die 4 Schnittpunkte $S_1 S_2$, $S_1' S_2' = \lambda_0 \mu_0 \alpha$ der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$ mit der Ebene $x = 0\,(\nu = \alpha)$ enthalten. Die Ebene E schneidet das Flächenpaar λ_0, μ_0 in 2 sich in S_1 und S_2 berührenden Ellipsen, von denen die eine die andre einschliesst, die also ausser in den Punkten S_1 und S_2 gemeinsame Tangenten nicht besitzen. Demnach kann, von den Tangenten in S_1 und S_2 abgesehen, keine Tangente der Schnittcurve $S_1 S_2$ der Ebene E und des Ellipsoides λ_0 gemeinsame Tangente der Flächen λ_0 und μ_0, und daher in Folge von Satz I (§ 4) kein Element der Schnittcurve $S_1 S_2$, von den Endelementen abgesehen, zugleich Element einer geodätischen Tangente der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$ sein. Da überdies jede Ebene durch die x-Axe, die mit der Ebene $\nu = \beta$ einen grösseren Winkel bildet als E, die Flächen λ_0 und μ_0 in 2 Ellipsen schneidet, die sich umschliessen, ohne nur einen Punkt gemein zu haben, so bilden diejenigen 2 unter den Tangenten des Ellipsoides λ_0 im Punkte P, welche zugleich μ_0 berühren, mit der Ebene $\nu = \beta$ nothwendig einen kleineren Winkel als die Ebene E. Diese Tangenten bezeichnen aber die Richtungen der beiden geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0 \mu_0)$, die durch den Punkt P laufen. Diese Bogen, ein Bogen 1. Art G_1 und ein Bogen 2. Art G_2 haben also in P eine Richtung, die mit der Ebene $\nu = \beta$ einen kleineren Winkel bildet, als die Schnittcurven $S_1 S_2$ und $S_1' S_2'$. Nimmt man hierzu noch, dass $\frac{d\nu}{N}$ längs der geodätischen Linien immer positiv ist, so gelangt man zu dem Schlusse: Der geodätische Bogen G_1 tritt bei P in das dreiseitig begrenzte Gebiet PS_2R (vgl. Fig. 3), G_2 in das Gebiet $PS_1'R'$ ein. Markirt man nun für alle Punkte des Weges PS_2, den der ebene Schnitt E auf λ_0 bezeichnet, die Richtung des hindurchlaufenden geodätischen Bogens 1. Art, so müssen die bezeichneten Richtungen durch stetige Aenderung aus der Richtung von G_1 in P hervorgehen, was mit Rücksicht auf Satz I unmittelbar aus den Formeln für $\cos \partial_\mu$ und $\cos \partial_\nu$ in der letzten Anm. des § 3 folgt. Da insbesondere die Richtung von G_1 in P von der rechten zur linken Seite des Weges PS_2 führt, so wird dasselbe gelten von den Richtungen geodätischer Bogen 1. Art, die in benachbarten Punkten den Weg PS_2 schneiden, und es könnte eine der Richtungen in entfernteren Punkten des Weges nur dann den Weg von links nach rechts kreuzen, wenn zuvor einmal eine jener Richtungen d. h. ein Element eines geodätischen Bogens mit einem Elemente des Weges PS_2 selbst zusammengefallen wäre, was nach dem oben Bemerkten nicht möglich ist. Demnach laufen alle geodätischen Bogen 1. Art, wo sie den Weg PS_2 schneiden, von der

rechten zur linken Seite desselben. Was nun den geodätischen Bogen G_1 betrifft, so muss derselbe das Gebiet PS_2R, in welches er bei P eingetreten, nothwendig wieder verlassen, da er nirgends abbricht und, weil längs desselben innerhalb des Gebietes dv sein Vorzeichen beibehält, nirgends umkehrt. Aus dem letzteren Umstande und der Beziehung der geodätischen Linien zur Krümmungscurve μ_0 folgt zugleich, dass G_1 das Gebiet PS_2R nur verlassen kann mit Durchschneidung des Weges PS_2. Da nun alle geodätischen Bogen 1. Art, welche den Weg PS_2 schneiden, ihn von rechts nach links schneiden, G_1 aber, um das Gebiet PS_2R zu verlassen, ihn von links nach rechts durchsetzen muss, so muss G_1 vor seinem Austritt aus diesem Gebiet in einen geodätischen Bogen 2. Art übergegangen sein, d. h. die Krümmungscurve μ_0 berührt haben in einem Punkte B_2, der auf der Strecke RS_2 liegt. Ergänzt man nun das geodätische Linienstück PB_2 durch das symmetrische Stück B_1P (vgl. Fig. 3), so erhält man in B_1B_2 einen geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0\mu_0)$, der sicher nicht von einer auf die andere der beiden Hälften hinüberreicht, in welche die Ebene $x = 0$ die Zone theilt. Der Halbbogen muss überdies immer weniger als die halbe Zone spannen; denn wenn er gerade bis an die Grenzen S_1 und S_2 reichte, so würde sich die betrachtete geodätische Linie mit 2 Halbbogen schliessen und Gleiches müsste von allen geodätischen Linien der Zone $(\mu_0\mu_0)$ gelten, was im Allgemeinen nicht der Fall sein kann. Bei diesen Betrachtungen wurde über die beiden Flächen λ_0 und μ_0 des confocalen Systems nichts vorausgesetzt und es folgt daher allgemein: *Keiner der geodätischen Halbbogen, welche auf dem Ellipsoid λ_0 die beiden Zweige der Durchdringungscurve desselben mit dem einschaligen Hyperboloide μ_0 verbinden, spannt mehr als die Hälfte der von beiden Zweigen begrenzten Zone.* Zugleich folgt mit Bezug auf den analytischen Ausdruck dieser Eigenschaft der geodätischen Bogen:

$$2\int_{\gamma}^{\mu_0}(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{M} < 2\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{N}. \tag{10}$$

Analoge Betrachtungen, wie die in diesem Paragraphen angestellten, bei der Combination eines Ellipsoides λ_0 und eines *zweischaligen* Hyperboloides ν_0 angewandt, führen zu dem gegentheiligen Resultate: Keiner der geodätischen Halbbogen, welche auf dem Ellipsoid λ_0 die beiden Zweige der Durchdringungscurve desselben mit dem zweischaligen Hyperboloide ν_0 verbinden, spannt weniger als die Hälfte der von den beiden Zweigen begrenzten Zone des Ellipsoides.

§ 7.

Ueber den Verlauf gewisser Combinationen der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 mit den geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve.

Durch jeden Punkt $P = \lambda_0 \mu \nu$ der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 läuft nach § 4 ein geodätischer Bogen 1. Art und ein solcher 2. Art; dementsprechend mag auch von den beiden gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, welche in $\lambda_0 \mu \nu$ das Ellipsoid berühren, die eine als eine Tangente 1. Art, die andre als eine Tangente 2. Art bezeichnet werden. Eine jede dieser Tangenten spaltet sich, wenn der Punkt P, etwa auf einer Curve $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$ von dem Ellipsoid λ_0 sich entfernend, in den Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ übergeht, in ein Paar in Bezug auf λ conjugirter Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0; die beiden entstehenden Paare mögen wiederum in Rücksicht auf die angedeutete Entstehungsweise, auf die man immer recurriren kann, als ein Paar 1. Art und ein Paar 2. Art unterschieden werden. Legt man von einem Punkte $P = \lambda \mu \nu$ des Raumes R an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 ein Paar in Bezug auf λ_0 conjugirter Tangenten etwa 1. Art (alle folgenden Betrachtungen gelten ebenfalls für den Fall der 2. Art), so berühren dieselben, wie man sich leicht überzeugt, entweder beide zuerst das Ellipsoid λ_0 und dann das Hyperboloid μ_0, oder aber die eine zuerst das Ellipsoid, die andere zuerst das Hyperboloid, sofern man sie für den Augenblick im Sinne der wachsenden λ durchläuft. Seien, was zunächst *den 1. Fall* angeht, Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Ellipsoid λ_0. Dann berührt, wie die oben erwähnte Entstehungsweise des Tangentenpaares 1. Art erkennen lässt, PQ_1 einen geodätischen Bogen 1. Art, der von seinem Berührungspunkt B_1 mit dem Zweige K_1 der Durchdringungscurve her nach K_2 zustrebt, und PQ_2 einen geodätischen Bogen 1. Art, der von K_1 her nach Q_2 kommt und etwa in B_2 den Zweig K_2 berührt. Die positive Durchlaufung des Weges $B_1 Q_1 P Q_2 B_2$ führt von dem Zweige K_1 her über P nach dem Zweige K_2 (vgl. die schematische Darstellung Fig. 4). Der Weg besteht theils aus Elementen geodätischer Linien auf λ_0, welche der Gleichung (6):

$$\pm (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{\mathsf{M}} + (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{\widetilde{\mathsf{N}}} = 0$$

genügen, theils aus Elementen geradliniger Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0, welche unter andern der aus § 4, 3 folgenden Gleichung:

$$(11) \qquad \mp (\lambda_0' - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} \pm (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{\mathsf{M}} + (\nu - \lambda_0') \frac{d\nu}{\widetilde{\mathsf{N}}} = 0$$

entsprechen. Die letztere Gleichung gilt demnach für alle Elemente des Weges und zwar, wie man mit Rücksicht auf die Regeln (4) und (8) findet (dabei ist nur zu bemerken, dass in (11) $\frac{d\lambda}{\Lambda}$ das entgegengesetzte Zeichen hat, wie in den einzelnen Gleichungen (3)), in den der Fig. 4 beigefügten Vorzeichencombinationen. Demnach liefert die Integration längs des Weges $B_1 P B_2$ die Relation:

$$2\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+2\int_{\mu_0}^{\gamma}(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{\mathsf{M}}+\int_{\nu_1'}^{\nu_2'}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}}=0$$

oder:

$$\int_{\nu_1'}^{\nu_2'}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}}=2\int_{\lambda}^{\lambda_0}(\lambda_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+2\int_{\gamma}^{\mu_0}(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{\mathsf{M}}.$$

Man schliesst daraus ebenso, wie in § 5, dass der Linienzug $B_1 P B_2$ weniger als eine halbe Zone $(\mu_0\mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 überspannt, wenn

$$(12)\quad 2\int_{\lambda}^{\lambda_0}(\lambda_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+2\int_{\gamma}^{\mu_0}(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{\mathsf{M}}<2\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}}.$$

Diese Bedingung ist unabhängig von der Lage des Punktes P auf dem Ellipsoid λ und bei ihrer Ableitung ist nur vorausgesetzt, dass die beiden in Bezug auf λ conjugirten Tangenten PQ_1 und PQ_2 beide zuerst λ_0 berühren, dann erst μ_0. Es folgt daher:

Wenn man von allen Punkten $P=\lambda\mu\nu$ des Ellipsoides λ, von denen 2 in Bezug auf λ conjugirte Tangenten 1. Art an die beiden Flächen λ_0 und μ_0 laufen, die beide zuerst λ_0 berühren, diese Tangenten construirt und auf λ_0 geodätisch bis zur Berührung mit der Durchdringungscurve $(\lambda_0\mu_0)$ fortsetzt, so spannt der erhaltene Weg von einer dieser Berührungen bis zur andern immer weniger als eine halbe Zone $(\mu_0\mu_0)$, wenn er es bei einer Lage des Punktes P thut.

Im Folgenden soll für eine specielle Lage von P die Voraussetzung des Satzes bewiesen werden.

Man wähle den Punkt P auf der x-Axe des Coordinatensystems und betrachte wieder das Ebenenpaar EE' des vorigen Paragraphen. Dann treten die Schnittlinien der von P über λ_0 und μ_0 errichteten Berührungskegel nicht aus dem die z-Axe enthaltenden doppelten Winkelraum zwischen diesen Ebenen heraus. Demnach verlaufen insbesondere die beiden Tangenten PQ_1 und PQ_2 innerhalb dieses Raumes; dieselben berühren auch beide zuerst das Ellipsoid λ_0; denn sie haben diese Eigenschaft, wenn P unendlich wenig von λ_0 entfernt auf der x-Axe liegt und können sie bei fortschreitender Bewegung von P auf der Axe erst verlieren, wenn sie einmal die Durchdringungscurve

$(\lambda_0 \mu_0)$ berührt haben, was gerade erst für $\lambda = -\infty$ eintritt. Somit liegt einer der beiden Berührungspunkte mit λ_0, Q_2, in dem Gebiete PS_2R (Fig. 3) und beginnt daher auch die geodätische Fortsetzung Q_2B_2 innerhalb dieses Gebietes. Da dieselbe überdies von der 1. Art ist, so schliesst man wie in § 6, dass sie bereits innerhalb des Gebietes die Durchdringungscurve berührt. Analoges gilt natürlich für Q_1B_1. Damit ist bewiesen, dass bei der angenommenen Lage des Punktes P der Weg B_1PB_2 nicht mehr als eine halbe Zone spannt. Er spannt sogar weniger als eine solche, weil die Weite des von ihm überspannten Zonentheils mit der Entfernung des Punktes P auf der x-Axe von der Fläche λ_0 wächst und doch erst, wenn P unendlich weit rückt, genau die halbe Zone gespannt wird*).

Damit ist zugleich die Gültigkeit der Ungleichung (12) für jedes endliche λ bewiesen.

Wenn man daher die 2 von einem Punkte $P = \lambda, \mu, \nu$ des Raumes R an die Flächen λ_0 und μ_0 gelegten gemeinsamen Tangenten 1. Art, falls dieselben beide zuerst λ_0 berühren, jeweils geodätisch bis zu dem entsprechenden Zweige der Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$ bis B_1 und B_2 fortsetzt, so kann man stets durch 2 Curvenstücke $\nu = \text{const.}$ die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ so halbiren, dass die Punkte B_1 und B_2 in derselben Halbzone liegen, ohne deren Grenzen zu erreichen; man kann ferner nach § 6 in der andern Halbzone einen geodätischen Halbbogen 2. Art construiren, dessen beide Berührungspunkte B_1' und B_2' mit der Durchdringungscurve beide innerhalb der letzteren Halbzone liegen.

Unter Einfügung der Stücke $B_1'B_1$ und B_2B_2' der Durchdringungscurve erhält man dann einen geschlossenen Weg $PQ_2B_2B_2'B_1'B_1Q_1P$ (vgl. Fig. 4), welcher die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens bezeichnet, der in entsprechender Weise um die Combination der Flächen λ_0 und μ_0 geschlungen und durch den Punkt P gespannt ist (vgl. § 8).

Es bleibt der im Anfange dieses Paragraphen erwähnte 2. *Fall* zu betrachten. Der Punkt $P = \lambda \mu \nu$ liegt im Raume R so, dass von den beiden conjugirten Tangenten 1. Art, die von ihm an λ_0 und μ_0 laufen, die eine zuerst λ_0, die andere zuerst μ_0 berührt. Seien wieder Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte der Tangenten mit λ_0; alsdann liegt

*) An Stelle von (12) hat man dann:

$$\int_{-\infty}^{\lambda_0} (\lambda_0 - \lambda) \frac{d\lambda}{\Lambda} + \int_{\gamma}^{\mu_0} (\mu - \lambda_0) \frac{d\mu}{\mathsf{M}} = \int_{\beta}^{\alpha} (\nu - \lambda_0) \frac{d\nu}{\mathsf{N}} .$$

Ueber derartige Relationen zwischen den Perioden überall endlicher Integrale $p=2$ vgl. z. B. Prym, Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen, Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. XXIV, S. 15; ferner Rosenhain, Mémoires présentés à l'Académie des Sciences, Bd. XI, S. 381.

auf einer der Strecken PQ_1 und PQ_2, etwa auf PQ_1, ein Berührungspunkt R_1 mit dem Hyperboloid μ_0. Man setzt, wie vorhin, PQ_2 auf λ_0 geodätisch fort bis zur Berührung B_2 mit dem Zweige K_2 der Durchdringungscurve (vgl. Fig. 5). Die Tangente PQ_1 berührt nun jetzt, da sie mit dem Stücke R_1Q_1 bereits den Zweig K_1 der Durchdringungscurve überspannt hat, einen geodätischen Bogen 2. Art, der seinerseits den Weg PQ_1 auf λ_0 bis zur Berührung B_2' mit dem Zweige K_2 weiterführt. Indem man nun längs des Weges $B_2'Q_1R_1PQ_2B_2$ (Fig. 5) mit den der Figur beigefügten Vorzeichen die Differentialgleichung (11) hin integrirt, ergiebt sich:

$$2\int_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+4\int_{\mu_0}^{\gamma}(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{\mathsf{M}}+\int_{\nu_2''}^{\nu_2'}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}}=0.$$

Es spannt nun der gesammte Weg weniger als die ganze Zone $(\mu_0\mu_0)$ des Ellipsoides (λ_0), wenn:

$$(13)\quad 2\int_{\chi}^{\lambda_0}(\lambda_0-\lambda)\frac{d\lambda}{\Lambda}+4\int_{\gamma}^{\mu_0}(\mu-\lambda_0)\frac{d\mu}{\mathsf{M}}<4\int_{\beta}^{\alpha}(\nu-\lambda_0)\frac{d\nu}{\mathsf{N}}.$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichung folgt aber aus den Formeln (10) und (12). Demnach ist die entsprechende Eigenschaft des Weges $B_2'PB_2$ ebenfalls wieder unbeschränkt gültig.

Wenn man daher die 2 von einem Punkte $P=\lambda, \mu, \nu$ des Raumes R an die Flächen λ_0 und μ_0 gelegten Tangenten, falls die eine zuerst λ_0, die andere zuerst μ_0 berührt, auf λ_0 geodätisch fortsetzt und zwar beide bis zu ihrer Berührung in B_2' und B_2 mit demselben Zweige der Durchdringungscurve, so überspannt der ganze Weg $B_2'PB_2$ noch nicht die ganze Zone $(\mu_0\mu_0)$. Unter Einfügung des Stückes B_2B_2' (vgl. Fig. 5) der Durchdringungscurve erhält man jetzt einen geschlossenen Weg $PQ_2B_2B_2'Q_1R_1P$, welcher die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens bezeichnet, der in entsprechender Weise um die Combination der Flächen λ_0 und μ_0 herumgeschlungen und durch den Punkt P gespannt wird (vgl. § 8).

Das Resultat dieses Paragraphen ist folgendes:

III. *Es gehören zu jedem Punkte $P=\lambda, \mu, \nu$ des Raumes R zwei geschlossene Wege, entsprechend den beiden Tangentenpaaren* 1. *und* 2. *Art, welche folgende Eigenschaften haben:*

1. *Jeder derselben stellt die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens dar, der durch die Combination der Flächen λ_0 und μ_0 einerseits und durch den Punkt P anderseits gespannt wird.*

2. *Jeder derselben berührt einmal das Ellipsoid λ_0* (nämlich längs eines ganzen Curvenzuges, $Q_2B_2B_2'B_1'B_1Q_1$ in Fig. 4 und $Q_2B_2B_2'Q_1$ in Fig. 5).

3. *Jeder derselben berührt je einmal jede der beiden Hälften des durch die Zone* $(\mu_0 \mu_0)$ *des Ellipsoides getheilten Hyperboloides* μ_0 (nämlich entweder längs eines Curvenzuges $B_2 B_2'$, $B_1' B_1$ in Fig. 4, $B_2 B_2'$ in Fig. 5, oder in einem Punkte, R_1 in Fig. 5).

Dass sich umgekehrt alle Gleichgewichtslagen eines geschlossenen Fadens, der von einem beweglichen Punkte P beständig gespannt wird und dabei immer den Bedingungen (2) und (3) entspricht, *im Wesentlichen* unter die geschilderten beiden Formen (Fig. 4 und 5) subsumiren, wird am Schluss des folgenden Paragraphen weiter entwickelt werden.

§ 8.

Fadenconstruction des Ellipsoides aus 2 gegebenen confocalen Flächen.

Die Combination zweier confocaler Flächen, eines Ellipsoides λ_0 und eines einschaligen Hyperboloides μ_0, mag irgendwo im Raume festgelegt sein. Die sichtbare Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 trennt den sichtbaren Theil des Hyperboloides μ_0 in 2 Hälften H_1 und H_2, die sich bezüglich längs der Zweige K_1 und K_2 der Krümmungscurve μ_0 an das Ellipsoid ansetzen. Es soll nun ein geschlossener, unausdehnbarer Faden, der vorerst um die Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des Ellipsoides λ_0 herumgeschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt $P = \lambda \mu \nu$ des Raumes ausserhalb der beiden Flächen beständig gespannt werden und bei der Bewegung des Punktes P fortwährend den beiden Bedingungen III, (2) und (3) des vorigen Paragraphen entsprechen: *nämlich einmal das Ellipsoid* λ_0 *und je einmal jede der beiden Hälften* H_1 *und* H_2 *des Hyperboloides* μ_0 *berühren.*

Dabei ist unter einer *einmaligen Berührung* des Fadens mit einer der beiden Flächen die Aufeinanderfolge eines Ueberganges vom Raume ausserhalb der Fläche auf diese und eines Ueberganges von der Fläche in den Raum ausserhalb verstanden, gleichviel ob der Faden zwischen beiden Uebergängen nur in einem Punkte oder längs eines ganzen Curvenzuges auf die Fläche sich aufgelegt hat.

In irgend einer den gestellten Anforderungen genügenden Gleichgewichtslage des Fadens werden an diesem einzelne Stücke von verschiedener Gestalt zu unterscheiden sein. Da der Faden gespannt sein soll, wird ein solches durch seine geometrische Gestalt individualisirtes Fadenstück entweder geradlinig im Raume verlaufen oder sich geodätisch auf einer der Flächen λ_0 und μ_0 auflegen oder gleichzeitig beiden Flächen d. i. ihrer Durchdringungscurve sich anschmiegen. Was den Uebergang der einzelnen Fadenstücke ineinander betrifft, so wird sich derselbe wegen des geforderten Gleichgewichts so vollziehen, dass die Richtung einer geradlinigen Tangente der Fadencurve

längs derselben sich überall stetig ändert mit alleiniger Ausnahme des Punktes P, in welchem zwei im Allgemeinen geradlinige Stücke des Fadens unter einem kleineren Winkel als 180^0 zusammenstossen. Wo daher ein geradliniges Stück in ein geodätisches oder in ein der Durchdringungscurve angehöriges Stück übergeht, wird es der geradlinigen Tangente desselben im Uebergangspunkt angehören, und wo ein geodätisches Stück an ein in der Durchdringungscurve gelegenes Stück sich anschliesst, wird das erstere eine geodätische Tangente der Durchdringungscurve im Uebergangspunkt vorstellen. Zugleich bewirkt die Forderung III, 3, der zufolge immer wenigstens einer der beiden Zweige der Durchdringungscurve ein nicht verschwindendes Stück des Fadens in sich aufnehmen muss, dass die auf λ_0 oder μ_0 durch den Faden verzeichneten geodätischen Linien geodätische Tangenten der Durchdringungscurve und also die dieselben berührenden geradlinigen Fadenstücke gemeinsame Tangenten beider Flächen sind. Der Faden setzt sich daher seiner geometrischen Gestalt nach aus keinen andern als den 3 Arten von Linien zusammen, von denen in den §§ 2 bis 5 gehandelt wurde und besitzt, wie diese Linien, eine bestimmte positive Richtung. Es stellt sich demnach auch das Längenelement des Fadens allgemein durch den Ausdruck II des § 5 dar:

$$dS = \pm \frac{d\lambda}{L} \pm \frac{d\mu}{M} + \frac{d\nu}{\widetilde{N}}$$

und ist also die Länge des Fadens, ausgedrückt als Function des Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$, der den Faden gerade spannt:

$$S = \int_{\lambda}^{\lambda} \left(\pm \frac{d\lambda}{L}\right) + \int_{\mu}^{\mu} \left(\pm \frac{d\mu}{M}\right) + \int_{\nu}^{\nu} \left(\frac{d\nu}{\widetilde{N}}\right).$$

Hier ist jedes der 3 Integrale vom Punkte λ, μ, ν aus in positiver Richtung längs des Fadens bis wieder zu λ, μ, ν zurück zu erstrecken und dabei die Vorzeichenregel des Satzes II in § 5 dahin anzuwenden, dass bei der Integration für alle Längenelemente die positiven Werthe in Rechnung gezogen werden. Ueber die Integrationswege, welche der geschlossene Faden für die Integrationsvariabeln λ, μ, ν bezeichnet, ist nun Folgendes zu bemerken:

Längs des ganzen Fadens von P aus bis wieder zu P zurück behält $\frac{d\nu}{\widetilde{N}}$ einen positiven Werth, während allerdings $d\nu$ und $\widetilde{N}$ 4mal gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln, nämlich wo der Faden die Ebenen $\nu = \beta$ und $\nu = \alpha$ schneidet. Der Faden muss nämlich, wenn er einmal, wie vorausgesetzt, von Anfang an um die Zone $(\mu_0\mu_0)$ herum-

geschlungen ist, im gespannten Zustande immer die beiden genannten Ebenen je 2mal und zwar abwechselnd durchsetzen. Der Fadenweg ist daher für das dritte der obigen Integrale ein doppelter Periodenweg und zwar ist:

$$\int_{\nu}^{\nu} \frac{d\nu}{\widetilde{N}} = 4 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{N}.$$

Da ferner kein Fadenstück eine andere Fläche μ berührt als $\mu = \mu_0$, so kehrt sich in dem Differential $\pm \frac{d\mu}{M}$ das Vorzeichen nur an 4 Stellen um, nämlich an den 2 Stellen, wo der Faden die Ebene $\mu = \gamma$ durchsetzt, und an den 2 Stellen, wo er das Hyperboloid $\mu = \mu_0$ berührt, gleichviel ob dies in einem Punkte oder längs eines Curvenzuges stattfindet. Die beiden kritischen Stellen trennen sich auf dem Faden gerade gegenseitig, weil die Berührungen mit dem Hyperboloid verschiedenen Hälften H_1 und H_2 des letzteren angehören. Demnach ist auch für das zweite der obigen Integrale der Fadenweg ein doppelter Periodenweg und zwar ist:

$$\int_{\mu}^{\mu} \left(\pm \frac{d\mu}{M}\right) = 4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{M}.$$

Da endlich der Faden das Ellipsoid λ_0 nur einmal berührt und andere kritische Stellen für das Differential $\pm \frac{d\lambda}{L}$, vom Punkte P selbst abgesehen, nicht vorkommen, so wechselt dasselbe nur einmal das Vorzeichen und ist:

$$\int_{\lambda}^{\lambda} \left(\pm \frac{d\lambda}{L}\right) = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{L}.$$

Für die Länge S des Fadens ergiebt sich daher der allein von der Coordinate λ des Punktes λ, μ, ν abhängige Ausdruck:

$$S = 2 \int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{d\lambda}{L} + 4 \int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{M} + 4 \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{N}.$$

Zugleich folgt aus dem Umstande, dass auf dem Fadenwege $d\lambda$ einmal, $d\mu$ und $d\nu$ je viermal das Zeichen wechseln, dass die im Punkte P zusammenstossenden, im Allgemeinen geradlinigen, Stücke des Fadens ein Paar in Bezug auf λ conjugirter Tangenten von λ_0 und μ_0 bilden (vgl. § 3). Fasst man das erhaltene Resultat zusammen, indem man bemerkt, dass die Bedingung III, 2, wenn der gespannte Faden einmal von Anfang an um die beiden Flächen

λ_0 und μ_0 herumgeschlungen ist, von selbst erfüllt bleibt, und schliesslich nur die Bedingung III, 3 die Bewegung des Punktes P wesentlich charakterisirt, so erhält man den Satz:

IV. *Wenn ein geschlossener Faden, der um die Combination zweier confocaler Flächen, eines Ellipsoides λ_0 und eines einschaligen Hyperboloides μ_0, herumgeschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt P gespannt wird und zwar derart, dass er beständig jede der beiden durch das Ellipsoid getrennten Stücke des Hyperboloides berührt, so beschreibt der Punkt ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoid und die Halbirungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Fadenstücke ist die Normale des Ellipsoides*).*

Zugleich besteht zwischen der Länge S des Fadens und dem Parameter λ des zu construirenden Ellipsoides die Relation:

$$S = 2\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)\,d\lambda}{2\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\lambda_0-\lambda)(\mu_0-\lambda)}}$$

$$+ 4\int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)\,d\mu}{2\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)(\mu_0-\mu)}}$$

$$+ 4\int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\lambda_0)(\nu-\mu_0)}},$$

wo die Integrale mit positiver Quadratwurzel auf reellem Wege zu nehmen sind.

Natürlich kann die durch Satz IV gegebene Fadenconstruction eines Ellipsoides λ nur die ausserhalb der beiden gegebenen Flächen λ_0 und μ_0 gelegene Zone des Ellipsoides λ liefern. Dass aber für jeden Punkt dieser Zone eine den Bedingungen des Satzes entsprechende Gleichgewichtslage des gespannten Fadens existirt, ist durch den in § 7 bewiesenen Satz III ausgesprochen. Alle den Bedingungen des Satzes IV entsprechenden Gleichgewichtslagen werden sich überdies nach den im Eingange des vorliegenden Paragraphen gemachten Bemerkungen unter die typische Form der in § 7 geschilderten Lagen subsumiren, sofern man von unwesentlichen Verschiedenheiten absieht. Diese Verschiedenheiten haben ihren Grund darin, dass die betrachteten Gleichgewichtslagen des Fadens nicht in allen Stücken eindeutig bestimmt sind. Ohne nämlich die einem gegebenen Punkte λ, μ, ν nach § 7 entsprechende Gleichgewichtslage des Fadens zu stören, kann man im 1. Falle des § 7 (vgl. Fig. 4) den geodätischen Halbbogen $B_2'B_1'$ soweit verschieben, dass noch

*) Das letztere folgt auch unmittelbar aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

keiner der beiden Berührungspunkte B_2' und B_1' bezüglich die Grenzen B_2 und B_1 erreicht, und kann man im 2. Falle des § 7 (vgl. Fig. 5) das Stück B_2R_1 dahin modificiren, dass der Faden von R_1 nicht in der geradlinigen Fortsetzung R_1Q_1 von PR_1 weitergeht, sondern sich erst längs eines Stückes R_1R_1' geodätischer Tangente der Durchdringungscurve an μ_0 anschmiegt und erst dann in der früheren Weise nach dem Zweige K_2 der Durchdringungscurve hinstrebt, den er etwa in B_2'' berührt. Das geodätische Stück R_1R_1' kann sich eventuell auch bis zu dem Zweige K_1 der Durchdringungscurve hinerstrecken, denselben etwa in B_1' berühren und noch längs eines Stückes $B_1'B_1''$ in demselben verlaufen (vgl. Fig. 6), um dann mit einem vollen geodätischen Halbbogen von B_1'' aus den Zweig K_2, etwa in B_2'', zu erreichen. Die einzige Beschränkung, welcher diese Modificationen des Fadenstückes B_2R_1 unterworfen sind, ist die, dass der Punkt B_2'' im Sinne der positiven Durchlaufungsrichtung des Zweiges K_2 dem Punkte B_2 immer nachfolgen muss.

§ 9.

Einige Specialfälle.

Lässt man, ausgehend von dem Falle der Fig. 5, den Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ auf die Fläche des Hyperboloides μ_0 fallen, so fällt nicht nur der Berührungspunkt R_1 der Tangente PQ_1 und des Hyperboloides mit P zusammen, sondern es rückt auch der Berührungspunkt der Tangente PQ_2 und des Hyperboloides, auf der Verlängerung der Tangente über P hinaus herankommend, in den Punkt P hinein. Die beiden gemeinsamen Tangenten PQ_2 und PQ_1 der Flächen λ_0 und μ_0 vom Punkte $P = \lambda\mu_0\nu$ setzen sich von Q_2 und Q_1 aus auf λ_0 je bis zur Berührung B_2 und B_2' mit K_2 geodätisch fort und werden durch das zwischen B_2 und B_2' gelegene Stück des Zweiges K_2 verbunden. Der geschlossene Weg $PQ_2B_2B_2'Q_1P$ ist die dem Punkte P entsprechende Gleichgewichtslage des geschlossenen Fadens; bewegt sich der Punkt P nunmehr auf μ_0, indem er den Faden beständig spannt, so *beschreibt er die Krümmungscurve $\lambda = \lambda$ auf dem Hyperboloid μ_0*. Hält man zwei innerhalb des Stückes B_2B_2' gelegene Punkte des Fadens fest und bewegt den Punkt P auf μ_0 nur soweit, als die Berührungspunkte B_2 und B_2' der Fadenstrecken PQ_2B_2 und PQ_1B_2' mit dem Zweige K_2 der Durchdringungscurve die beiden festen Punkte noch zwischen sich einschliessen, so hat man einen besonderen Fall der von Chasles*) angegebenen, aber nur innerhalb gewisser Grenzen gültigen Construction der Krümmungscurve.

*) Chasles, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XI, S. 16. — Salmon-Fiedler, Anal. Geom. des Raumes II, Art. 155.

Nimmt man in dem allgemeinen Resultate IV des § 8 $\lambda = \lambda_0$, so geht der folgende Satz hervor:

V. *Die Summe der Längen zweier sich nicht schneidender geodätischer Halbbogen verschiedener Art auf der Zone* $(\mu_0 \mu_0)$ *des Ellipsoides* λ_0, *diese Summe noch vermehrt um die Längen der beiden Stücke der Krümmungscurve* μ_0, *welche je zwei auf demselben Zweige der Krümmungscurve gelegene Endpunkte der geodätischen Halbbogen verbinden, ist von dem constanten Werthe:*

$$S = 4\int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{d\mu}{M} + 4\int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{N}.$$

Hieraus fliesst für $\mu_0 = \beta$ der bekannte Satz*):

Die Summe der Längen zweier geodätischer Linien auf dem Ellipsoid, welche beide zwei diametral gegenüberliegende Kreispunkte verbinden, ist constant, vgl. § 10.

Für $\mu_0 = \gamma$ geht aus IV das Graves'sche Theorem hervor:

Wenn ein um die Ellipse λ_0 in der xy-Ebene $(\mu = \gamma)$ geschlungener geschlossener Faden durch einen in der Ebene beweglichen Punkt P gespannt wird, so beschreibt der bewegliche Punkt eine der gegebenen confocale Ellipse. Zugleich besteht zwischen der Fadenlänge S und dem Parameter λ der zu construirenden Ellipse die Relation**):

$$S = 2\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda)\, d\lambda}{2\sqrt{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)(\lambda_0 - \lambda)}} + 4\int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{2\sqrt{(\alpha - \nu)(\nu - \beta)(\nu - \lambda_0)}}.$$

Eine nähere Betrachtung erfordern diejenigen Specialfälle des allgemeinen Satzes IV, bei denen mit den Annahmen $\lambda_0 = \gamma$ oder $\mu_0 = \beta$ das gegebene Ellipsoid in die Focalellipse oder das gegebene Hyperboloid in die Focalhyperbel ausartet. Es tritt dann nämlich als neues Moment hinzu, dass der Faden nicht mehr auf einer Fläche, sondern über eine Raumcurve gleitet.

§ 10.

Specialfall $\lambda_0 = \lambda_0$, $\mu_0 = \beta$: Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem gegebenen Ellipsoid und dessen Focalhyperbel.

Gegeben ist ein Ellipsoid λ_0 und die Focalhyperbel $\mu_0 = \beta$, welche als Grenzfall des einschaligen Hyperboloides convexerseits durch ein entsprechendes Stück $(\mu = \beta)$ der Ebene $y = 0$ undurchdringlich ausgefüllt gedacht werden mag. Die beiden Zweige der Durchdringungs-

*) M. Roberts, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XI, S. 3.

**) Vgl. die nur formell verschiedenen Ausdrücke bei Hesse, Anal. Geometrie des Raumes, Vorl. XXI.

curve $(\lambda_0 \mu_0)$ bestehen bei dieser Auffassung aus den ebenen Curvenstücken, in welchen das Ellipsoid dieses Ebenenstück schneidet, und die positive Richtung dieser Zweige ist je auf der einen Seite des Ebenenstückes die entgegengesetzte, wie auf der andern (vgl. Fig. 7). Die gemeinsamen Tangenten der beiden Flächen λ_0 und $\mu_0 = \beta$, sowie die geodätischen Linien der nun zur vollen Oberfläche des Ellipsoides verbreiterten Zone $(\beta\beta)$ haben, wie früher, eine bestimmte positive Richtung mit positivem $\frac{d\nu}{\sqrt{N}}$. Für die in der Ebene $y = 0$ verlaufenden Linien beiderlei Gattung bestimmt sich die positive Richtung nach ihrem Verhalten auf dem Ebenenstück $\mu = \beta$ und ist auf beiden Seiten desselben entgegengesetzt. Die geodätischen Halbbogen der Zone $(\beta\beta)$, welche dieselben beiden diametral gegenüberliegenden Kreispunkte des Ellipsoides λ_0 verbinden, sind auf verschiedenen Seiten der Ebene $y = 0$ von verschiedener Art im Sinne des § 4.

Ich bezeichne mit $K_1 K_2$ und $K_1' K_2'$ die beiden Paare diametral gegenüberliegender Kreispunkte des gegebenen Ellipsoides λ_0 und mit $H_1 H_2$ und $H_1' H_2'$ die beiden Paare diametral gegenüberliegender Quadranten des ausserhalb des Ellipsoides verlaufenden Theiles der Focalhyperbel, sofern dieselbe als Curve gedacht wird (vgl. Fig. 7). Fasst man jedes dieser beiden Quadrantenpaare unter dem Namen eines „Zuges der Focalhyperbel" zusammen, so läuft jeder der beiden Züge von einem Kreispunkt durch das Unendliche hindurch zu dem diametral gegenüberliegenden Kreispunkt. Bekanntlich*) schneiden, wie auch aus dem Satze I des § 4 hervorgeht, alle geradlinigen Tangenten einer geodätischen Linie auf dem Ellipsoid, welche 2 diametrale Kreispunkte verbindet, die Focalhyperbel und zwar denjenigen Zug derselben, welcher, durch das Unendliche hindurchlaufend, dieselben beiden Kreispunkte verbindet. Man erkennt überdies, dass von den 4 gemeinsamen Tangenten des Ellipsoides λ_0, und seiner Focalhyperbel, welche durch einen beliebigen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Raumes hindurchgehen, immer 2 den einen und 2 den andern Hyperbelzug berühren und immer 2 solche in Bezug auf λ conjugirt sind, welche *denselben* Hyperbelzug berühren. Sind nun Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte zweier durch P gehender und etwa den Hyperbelzug $H_1 H_2$ treffender Tangenten, die überdies ein Tangentenpaar 1. Art im Sinne des § 7 bilden, so liegt, wie man unmittelbar erkennt, entweder auf keiner oder auf einer der Strecken PQ_1 und PQ_2 ein Schnittpunkt mit der Focalhyperbel.

Im ersteren Falle berührt jede der Tangenten bezüglich in Q_1

*) Vgl. z. B. Chasles, Liouville's Journal, I. Serie, Band XI, S. 12.

und Q_2 einen geodätischen Halbbogen 1. Art der Zone $(\beta\beta)$ des Ellipsoides, der von K_1 nach K_2 hinläuft, und kann die eine PQ_1 geodätisch nach K_1, die andere PQ_2 ebenso nach K_2 fortgesetzt werden. Die Wege PQ_1K_1 und PQ_2K_2 sind offenbar die kürzesten Wege von P nach K_1 und K_2, falls eine Durchschneidung der Fläche λ_0 für unzulässig gilt. Die kürzeste Schliessung des Weges $K_1Q_1PQ_2K_2$ (Fig. 7) ist indessen unbestimmt und wird durch jeden*) geodätischen Halbbogen 2. Art, der von K_2 nach K_1 läuft, geleistet. Der durch irgend einen solchen Halbbogen geschlossene Weg $PQ_2K_2K_1Q_1P$ stellt die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens dar, der nach dem Punkte P hingespannt und gezwungen ist, durch die Punkte K_1 und K_2 hindurchzugehen.

Im zweiten Falle berührt eine der beiden Tangenten, etwa PQ_2, wie vorhin, in Q_2 einen geodätischen Halbbogen 1. Art, ohne vorher die Focalhyperbel zu treffen, und setzt sich geodätisch nach K_2 hin fort; die andere schneidet zwischen P und Q_1 die Focalhyperbel in einem Punkte R_1 auf dem Quadranten H_1 derselben und mag von hier zunächst geradlinig bis zu ihrem Berührungspunkt Q_1 mit λ_0 und von Q_1 durch ein Bogenstück 2. Art geodätisch bis K_2 fortgesetzt werden (vgl. Fig. 8). Der geschlossene Weg $PQ_2K_2Q_1R_1P$ stellt wieder die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens dar, der nach P hingespannt wird und gezwungen ist, durch K_2 zu gehen und den Hyperbelquadranten H_1 zu berühren. Dabei bleibt indessen die Lage des Stückes $K_2Q_1R_1$ unbestimmt. Denn wenn man von R_1 irgend welche Tangenten an λ_0 zieht und dieselben von ihrem Berührungspunkt Q_1' bis K_2 geodätisch verlängert, so sind die erhaltenen Wege $R_1Q_1'K_2$ alle gleich lang**). Ueberdies steht die Halbirungslinie des Winkels zwischen den geradlinigen Stücken PR_1 und R_1Q_1' immer auf der Tangente der Focalhyperbel in R_1 senkrecht, weil PR_1 und R_1Q_1' Stücke von Halberzeugenden verschiedener Mäntel des Kreiskegels sind, der mit der Spitze R_1 über λ_0 errichtet werden kann. Diese Winkelbeziehung bedingt aber das Gleichgewicht eines von K_2 in der Lage $K_2Q_1'R_1P$ nach P hin gespannten Fadens, der bei R_1 ohne Reibung über die als Curve gedachte Focalhyperbel gleitet. Ist umgekehrt ein Faden, der von K_2 nach P gespannt wird und über den Quadranten H_1 der Hyperbel gleitet, im Gleichgewicht, so liegt sein Kreuzungspunkt R_1 mit H_1 eben so, dass die Gerade PR_1 in ihrer Verlängerung λ_0 berührt.

Unter eine der beiden geschilderten Gleichgewichtslagen (Fig. 7 und 8) subsumiren sich im Wesentlichen alle Gleichgewichtslagen eines

*) Vgl. M. Roberts, Liouville's Journal, I. Serie, Bd. XI, S. 3.
**) Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Raumes II, Art. 152.

durch einen beweglichen Punkt P gespannten, geschlossenen Fadens, der um das Ellipsoid λ_0 herumgeschlungen und gezwungen ist, beständig über jeden von 2 diametral gegenüberliegenden Quadranten der Focalhyperbel zu gleiten. Die beiden geschilderten Lagen erfüllen aber die Bedingungen des allgemeinen Satzes IV des § 8 und die Anwendung desselben giebt das Resultat:

VI. *Wenn ein um ein gegebenes Ellipsoid geschlungener geschlossener Faden durch einen beweglichen Punkt P des Raumes der Art gespannt wird, dass er beständig über 2 diametral gegenüberliegende Quadranten der Focalhyperbel gleitet, so beschreibt der bewegliche Punkt ein dem gegebenen Ellipsoid confocales Ellipsoid und die Halbirungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Fadenstücke ist die Normale des Ellipsoides.*

Zugleich besteht zwischen der Länge S des Fadens und dem Parameter λ des zu construirenden Ellipsoides die Relation:

$$S = 2\int_{\lambda}^{\lambda_0} \frac{(\lambda_0 - \lambda)\,d\lambda}{2\sqrt{(\alpha-\lambda)(\gamma-\lambda)(\lambda_0-\lambda)}} + 4\int_{\gamma}^{\alpha} \frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{(\alpha-\mu)(\mu-\gamma)(\mu-\lambda_0)}},$$

wo μ als Collectivbezeichnung für μ und ν gebraucht ist. Die hyperelliptischen Integrale 2. Gattung des allgemeinen Falles sind in elliptische derselben Gattung übergegangen.

Um die Construction mechanisch zu realisiren, füge man in das Gypsmodell eines Ellipsoides die Focalhyperbel ein, die man aus einem Doppeldraht bildet, so dass die Curve selbst durch den Spalt zwischen den zwei dicht nebeneinander herlaufenden Drähten dargestellt wird. Nun hat man nur dafür zu sorgen, dass der geschlossene Faden vor seiner Schliessung durch den Spalt eines jeden von 2 diametral gegenüberliegenden Quadranten der Focalhyperbel hindurch gezogen worden ist. Man spannt dann den Faden mittels eines Häkchens, welches auf einer Seite der Ebene der Focalhyperbel beliebig bewegt wird und nur beim Uebergang auf die andre Seite selbst durch den Spalt der Focalhyperbel hindurchgeführt wird. Die Stelle, wo der Faden über das Häkchen gleitet, beschreibt dann das volle Ellipsoid, ohne dass mehr als 2 diametrale Quadranten der Focalhyperbel zur Benutzung kommen. Dafür werden allerdings bei der Construction der einen Hälfte des Ellipsoides Tangentenpaare 1. Art (im Sinne des § 7), bei der andern solche 2. Art angewendet, was natürlich bei der mechanischen Construction ausser Acht gelassen werden darf.

Für den Hauptschnitt $y = 0$ des Ellipsoides giebt der Satz VI dieselbe Construction der Ellipse, wie das Graves'sche Theorem, wenn man die Willkür in den Gleichgewichtslagen des Fadens entsprechend ausnützt.

§ 11.

Specialfall $\lambda_0 = \gamma$, $\mu_0 = \mu_0$: Fadenconstruction des Ellipsoides aus einem gegebenen einschaligen Hyperboloid und dessen Focalellipse.

Gegeben ist ein einschaliges Hyperboloid μ_0 und die Focalellipse $\lambda_0 = \gamma$, welche als Grenzfall der confocalen Ellipsoide auf ihrer concaven Seite mit einem undurchdringlichen Ebenenstücke ausgefüllt gedacht werden mag. In der auf beiden Seiten dieses Ebenenstückes zu verzeichnenden elliptischen Schnittcurve mit der Fläche μ_0 hat man die beiden Zweige der früheren Durchdringungscurve $(\lambda_0 \mu_0)$ zu erblicken, einen rechten Zweig K_1 und einen linken K_2, wenn man den früheren positiven Durchlaufungssinn festhält (Fig. 9). Wie die Durchdringungscurve selbst, so haben auch alle geradlinigen Tangenten der beiden Flächen $\lambda_0 = \gamma$ und μ_0 und alle geodätischen Tangenten der Durchdringungscurve (γ, μ_0) auf einer der beiden Flächen noch immer eine bestimmte positive Richtung, in der $\frac{dv}{\widetilde{N}}$ positiv ist.

Die geodätischen Halbbogen der Zone $(\mu_0 \mu_0)$ des ausgearteten Ellipsoides stellen sich jetzt dar als gebrochene Linien; die Halbbogen 1. Art laufen als geradlinige Tangenten der Ellipse K_1 auf der rechten Seite des Ebenenstückes $\lambda_0 = \gamma$ von K_1 weg bis zum Rande der Focalellipse und von hier auf der linken Seite als geradlinige Tangenten der Ellipse K_2 auf diese zu; entsprechend die Halbbogen 2. Art.

Von den 4 gemeinsamen Tangenten der Focalellipse $\lambda_0 = \gamma$ und des Hyperboloides μ_0, welche durch einen beliebigen Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$ des Raumes hindurchgehen, berühren, von P aus im Sinne der wachsenden λ gerechnet, immer 2 zuerst die Focalellipse, 2 andere zuerst das Hyperboloid μ_0, und sind immer 2 solche, die sich hierin verschieden verhalten, in Bezug auf λ conjugirt. Es seien Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte zweier in Bezug auf λ conjugirter Tangenten, die etwa ein Paar 1. Art bilden, mit $\lambda_0 = \gamma$. Auf einer der beiden Strecken PQ_1 und PQ_2, etwa auf der ersteren, liegt ein Berührungspunkt R_1 mit μ_0. Es schliesst sich dann an PQ_2 in Q_2 ein Stück eines geodätischen Halbbogens 1. Art an, welcher, falls beispielsweise P rechts von der Ebene $z = 0$ liegt, auf der linken Seite von $\lambda_0 = \gamma$ auf K_2 zustrebt und an PQ_1 in Q_1 ein Stück eines geodätischen Halbbogens 2. Art, welcher auf derselben Seite von K_2 herkommt (vgl. Fig. 9). Man verbindet nun die Berührungspunkte B_2 und B_2' dieser Fortsetzungen durch das betreffende Stück $B_2 B_2'$ des Zweiges K_2 der Durchdringungscurve. Der geschlossene Weg $PQ_2 B_2 B_2' Q_1 R_1 P$ bezeichnet die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens, der in entsprechender Weise um die Combination der Flächen $\lambda_0 = \gamma$ und μ_0 geschlungen und nach P hin gespannt ist. Denn wo derselbe über

die Focalellipse gleitet (bei Q_2 und Q_1) steht die Halbirungslinie des Winkels seiner beiden geradlinigen Strecken (PQ_2 und Q_2B_2, $B_2'Q_1$ und Q_1R_1) auf der Tangente der Focalellipse senkrecht, weil die betreffenden Strecken jeweils Halberzeugenden verschiedener Mäntel eines Kreiskegels angehören, der seine Spitze auf der Focalellipse hat und das Hyperboloid berührt. Das Fadenstück $B_2B_2'Q_1R_1$ kann dabei ohne Einfluss auf das Gleichgewicht bei fester Lage des Punktes P innerhalb gewisser Grenzen verschoben werden. Anstatt nämlich das Hyperboloid μ_0 nur in dem einen Punkte R_1 zu berühren und sich über R_1 geradlinig nach Q_1 fortzusetzen, kann das Fadenstück von R_1 auf μ_0 geodätisch fortlaufen und erst, nachdem es längs eines endlichen Stückes R_1R_1' mit μ_0 in Contact geblieben, geradlinig nach einem entsprechenden Punkte Q_1' der Focalellipse hinstreben, um sich hier umzubiegen und in der Ebene der Ellipse als geradlinige Tangente $Q'B_2''$ in B_2'' den Zweig K_2 der Durchdringungscurve zu erreichen; oder das Fadenstück kann von R_1 aus auf μ_0 geodätisch bis zur Berührung mit K_1 fortschreiten und von hier, nachdem es eventuell noch eine Strecke weit mit K_1 zusammengefallen ist, als geradlinige Tangente von K_1 nach dem Rande der Focalellipse und von hier umbiegend wieder nach dem Zweige K_2 hinlaufen, den es in einem Punkte B_2'' berührt.

Diese Modificationen sind indessen immer auf gewisse Grenzen eingeschränkt durch die Bedingung, dass der Punkt B_2'' im Sinne der positiven Durchlaufung des Zweiges K_2 nothwendig dem Punkte B_2 *nach*folgen muss (vgl. § 8).

Unter die geschilderten Gleichgewichtslagen eines geschlossenen Fadens subsumiren sich alle Gleichgewichtslagen eines solchen, falls derselbe um die Combination der Flächen $\lambda_0 = \gamma$ und μ_0 herumgeschlungen und durch einen beweglichen Punkt der Art gespannt wird, dass er jede der beiden Hälften des Hyperboloides μ_0 beständig je einmal berührt, während er gleichzeitig ohne Reibung über die Focalellipse hinweggleitet. Diese Lagen entsprechen daher alle den Bedingungen des allgemeinen Satzes IV des § 8, sodass man den Satz erhält:

VII. *Wenn ein um die Combination eines einschaligen Hyperboloides und seiner Focalellipse geschlungener geschlossener Faden durch einen beweglichen Punkt P des Raumes der Art gespannt wird, dass er beständig über die Focalellipse gleitet und jede der beiden Hälften des Hyperboloides beständig berührt, so beschreibt der bewegliche Punkt ein dem gegebenen Hyperboloid confocales Ellipsoid und die Halbirungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Stücke des Fadens ist die Normale des Ellipsoides.*

Zugleich besteht zwischen der Länge S des Fadens und dem Parameter λ des zu construirenden Ellipsoides die Relation:

$$S = 2\int_{\lambda}^{\gamma} \frac{(\mu_0 - \lambda)\, d\lambda}{2\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\mu_0-\lambda)}} + 4\int_{\gamma}^{\mu_0} \frac{(\mu_0 - \mu)\, d\mu}{2\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu_0-\mu)}}$$

$$+ 4\int_{\beta}^{\alpha} \frac{(\nu - \mu_0)\, d\nu}{2\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\mu_0)}}.$$

Auch hier werden die Integrale elliptisch, aber eine Zusammenziehung der 3 Integrale in 2, wie bei Satz VI, findet nicht statt. Es geschieht daher bei Anwendung des Satzes VII die Construction des Hauptschnittes $z = 0$ des Ellipsoides λ nicht in unmittelbarer Uebereinstimmung mit dem Graves'schen Theorem, sondern es ergiebt sich eine Construction, die einer *doppelten* Anwendung dieses Theorems entspricht.

§ 12.

Specialfall $\lambda_0 = \gamma$, $\mu_0 = \beta$: Fadenconstruction des Ellipsoides aus seinen beiden Focalcurven.

Gegeben sind zwei zusammengehörige Focalcurven*). Das Innere der Focalcurven denke man sich zunächst im Anschluss an die allgemeineren Fälle der §§ 10 und 11 noch von Ebenenstücken ausgefüllt. Die Brennpunkte der Focalellipse seien im Anschluss an § 10 sowohl auf der rechten, als auf der linken Seite der Ebene der Ellipse markirt und die betreffenden 4 Punkte mit K_1, K_2 und K_1', K_2' benannt (vgl. Fig. 10). Die geodätischen Halbbogen 1. Art, welche auf dem Ellipsoid λ_0 (§ 10) die Kreispunkte K_1 und K_2 auf der einen, und die geodätischen Halbbogen 2. Art, welche die Kreispunkte K_2 und K_1 auf der andern Seite der Ebene $y = 0$ verbanden, stellen sich jetzt dar als gebrochene Linien, die von dem einen Endpunkte K_1 des Hyperbelzuges $H_1 H_2$ über den Rand der Focalellipse nach dem andern Endpunkt K_2 oder umgekehrt von K_2 nach K_1 hinlaufen. Von den 4 Focallinien eines Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$ d. h. den 4 durch ihn hindurchgehenden gemeinsamen Tangenten der beiden Focalkegelschnitte, sind auch hier, wie in § 10, zwei solche in Bezug auf λ conjugirt, welche denselben Hyperbelzug schneiden, und berührt, wie in § 11, von 2 in Bezug auf λ conjugirten Tangenten immer eine zuerst die Focalellipse, die andre zuerst die Focalhyperbel, falls man sie beide für den Augenblick im Sinne der wachsenden λ durchläuft. Sind Q_1 und Q_2 die Berührungspunkte zweier den Zug $H_1 H_2$ schneidender Focallinien des Punktes P mit der Focal-

*) Deux focales conjugées nach der Bezeichnung von Chasles, Aperçu historique, Note XXXI, Nr. 7, Anm.

ellipse, so liegt immer auf einer der beiden Strecken PQ_1 und PQ_2, etwa auf PQ_1, ein Schnittpunkt R_1 mit der Focalhyperbel (vgl. Fig. 10), auf der andern nicht. Man führe nun, falls P beispielsweise auf der rechten Seite der Focalellipse liegt und die Tangenten PQ_1 und PQ_2 ein Tangentenpaar 1. Art bilden, den Weg PQ_2 auf der linken Seite der Ebene durch ein Stück geodätischen Halbbogens 1. Art nach K_2 fort, und führe anderseits auch den Weg PR_1 bis K_2 fort und zwar entweder über Q_1 oder über irgend einen andern Punkt Q_1' der Focalellipse hinweg; der Punkt Q_1' mag dabei nur auf diejenige Seite der Ebene $y = 0$ beschränkt sein, auf der Q_1 liegt, damit die Fortsetzung $Q_1'K_2$ von der 2. Art werde. Alle diese Fortsetzungen $R_1Q_1'K_2$ sind gleichlang und es steht nicht nur die Halbirungslinie des Winkels zwischen den Strecken PR_1 und R_1Q_1' auf der Tangente der Focalhyperbel in R_1, sondern auch die Halbirungslinie des Winkels zwischen den Strecken R_1Q_1' und $Q_1'K_2$ auf der Tangente der Focalellipse in Q_1' senkrecht. Demnach bezeichnet der geschlossene Weg $PQ_2K_2Q_1'R_1P$ die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens, der durch den Punkt P gespannt wird und gezwungen ist, beständig durch K_2 zu gehen und über den Quadranten H_1 der Focalhyperbel zu gleiten, und anderseits subsumirt sich jede mögliche Gleichgewichtslage eines solchen Fadens unter die hier geschilderte. Mit Rücksicht darauf ergiebt sich folgende Specialisirung des allgemeinen Satzes IV des § 8:

VIII. *Wird ein geschlossener Faden, der um 2 zusammengehörige Focalcurven geschlungen ist, durch einen beweglichen Punkt P in der Weise gespannt, dass er beständig über jeden von 2 diametral gegenüberliegenden Quadranten der Focalhyperbel gleitet, so beschreibt der bewegliche Punkt ein zu den gegebenen Focalcurven gehöriges Ellipsoid und die Halbirungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Fadenstücke ist die Normale des Ellipsoides. Zugleich besteht zwischen der Länge S des Fadens und dem Parameter λ des zu construirenden Ellipsoides die Relation:*

$$S = 2\int_{\lambda}^{\gamma} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} + 4\int_{\gamma}^{\beta} \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} + 4\int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}},$$

oder:

$$S = 2\sqrt{\alpha-\lambda} + 2\sqrt{\alpha-\gamma}.$$

Durch geeignete Ausnützung der Willkür, welche die Lage des Fadenstückes $K_2Q_1'R_1$ zulässt, kann man die Construction VIII noch wesentlich vereinfachen, indem man den geschlossenen Faden durch einen mit seinen beiden Enden in 2 festen Punkten befestigten Faden ersetzt. Die diesbezügliche Betrachtung bleibt dem folgenden Paragraphen vorbehalten, der im Zusammenhange die aus dem Satze VIII hervorgehende Theorie *der gebrochenen Focaldistanzen* für die 3 centrischen Flächen 2. Grades behandeln soll.

§ 13.

Die Theorie der gebrochenen Focaldistanzen.

Es sei G die Focalellipse des confocalen Systems, g_1, g_2 ihre Brennpunkte, H die Focalhyperbel und h_1, h_2 ihre Brennpunkte (Fig. 11). Man mag sich etwa von den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$, die auf den concaven Seiten der Focalkegelschnitte befindlichen Stücke den Focalkegelschnitten eingefügt denken; dieser Auffassung zu Folge sind in Fig. 11 die durch die genannten Ebenenstücke verdeckten Linien punktirt gehalten.

Sei nun $P = \lambda, \mu, \nu$ ein übrigens beliebiger Punkt in dem Raumviertel oberhalb der Ebene der Focalellipse und vor der Ebene der Focalhyperbel. Bei der Symmetrie der Figur wird durch diese Annahme über die Lage des Punktes P die Allgemeinheit der folgenden Erörterungen nicht beschränkt. Von den 4 Focallinien des Punktes P, die jetzt, anders als früher, von P aus immer im Sinne der wachsenden λ durchlaufen werden sollen, schneiden 2 zuerst die Focalellipse (in G_1 und G_2), 2 andere zuerst die Focalhyperbel (in H_1 und H_2). Die beiden Strecken PG_1 und PG_2, die in ihren Verlängerungen über P oder G hinaus immer verschiedene Züge der Focalhyperbel (vgl. §§ 10 und 12) schneiden, setzen sich, wie aus § 12 unmittelbar hervorgeht, von G_1 und G_2 auf der andern Seite der Ebene der Focalellipse bezüglich bis g_1 und g_2 derart fort, dass die entstehenden gebrochenen Linien PG_1g_1 und PG_2g_2 die kürzesten über die Focalellipse gemessenen Entfernungen des Punktes P von den Punkten g_1 und g_2 oder die stabilen Gleichgewichtslagen zweier Fäden sind, die respective in g_1 und g_2 befestigt und über die Focalellipse, auf der sie ohne Reibung gleiten, nach P hin gespannt sind. *Seien diese beiden über die Focalellipse gemessenen kürzesten Entfernungen („gebrochenen Focaldistanzen") des Punktes P von den Brennpunkten g_1 und g_2 der Focalellipse ihrer Lage und Länge nach mit r_1 und r_2 bezeichnet.*

Die beiden Strecken PH_1 und PH_2 werden ihrerseits über H_1 und H_2 hinaus bezüglich bis zu den Brennpunkten h_1 und h_2 der Focalhyperbel hin verlängert und zwar auf der hinteren Seite der Ebene der Focalhyperbel. Die so entstehenden gebrochenen Linien PH_1h_1 und PH_2h_2 sind die kürzesten über die Focalhyperbel gemessenen Entfernungen des Punktes P von den Brennpunkten h_1 und h_2 der Focalhyperbel oder die stabilen Gleichgewichtslagen zweier Fäden, die respective in h_1 und h_2 befestigt und über die Focalhyperbel, auf der sie ohne Reibung gleiten, nach P hin gespannt sind. *Seien diese beiden über die Focalhyperbel gemessenen kürzesten Entfernungen („ge-*

brochenen Focaldistanzen") *des Punktes P von den Brennpunkten der Focalhyperbel ihrer Lage und Länge nach mit s_1 und s_2 bezeichnet.*

Betreffs der Zusammengehörigkeit der 4 Focallinien PG und PH im Sinne des § 4 erkennt man ohne Schwierigkeit, dass:

$$\left.\begin{matrix} PG_1 \text{ und } PH_2 \\ PG_2 \text{ und } PH_1 \end{matrix}\right\} \text{ in Bezug auf die Fläche } \lambda,$$

$$\left.\begin{matrix} PG_1 \text{ und } PH_1 \\ PG_2 \text{ und } PH_2 \end{matrix}\right\} \text{ in Bezug auf die Fläche } \mu,$$

$$\left.\begin{matrix} PG_1 \text{ und } PG_2 \\ PH_1 \text{ und } PH_2 \end{matrix}\right\} \text{ in Bezug auf die Fläche } \nu$$

einander conjugirt sind, oder anders ausgedrückt: Die 4 Linienstücke PG und PH, respective deren Verlängerungen über P hinaus rückwärts, die für den Augenblick mit PG' und PH' bezeichnet seien, ordnen sich mit Bezug auf die Normalen N_λ, N_μ, N_ν der drei durch P gehenden Flächen λ, μ, ν in der Weise an, dass die Winkel:

(a)
$$\begin{matrix} G_1PH_2 \text{ und } G_2PH_1 \text{ von } N_\lambda, \\ G_1PH_1' \text{ und } G_2PH_2' \text{ von } N_\mu, \\ G_1PG_2' \text{ und } H_1PH_2' \text{ von } N_\nu \end{matrix}$$

halbirt werden. Es mag nun unter dem *Winkel zwischen irgend zweien der gebrochenen Focalstrahlen* r_1, r_2, s_1, s_2 immer der Winkel zwischen den betreffenden Stücken PG_1, PG_2, PH_1, PH_2 derselben verstanden werden; dagegen mag der Winkel zwischen einem Stücke PG_1, PG_2, PH_1, PH_2 einerseits und einem Stücke $PG_1', PG_2', PH_1', PH_2'$ andrerseits seiner Grösse und Lage nach als *das Supplement des Winkels der betreffenden gebrochenen Focalstrahlen* bezeichnet sein.

Die Differentialgleichungen der einzelnen Stücke der gebrochenen Focalstrahlen eines Punktes P sind theils in der allgemeinen Form (3) § 3 der Differentialgleichungen der gemeinsamen Tangenten zweier Flächen λ_0 und μ_0, theils in den Formen:

$$\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\mu_0-\mu)(\mu-\lambda_0)}} \pm \frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{\sqrt{(\alpha-\nu)(\nu-\beta)(\nu-\gamma)(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)}} = 0$$

und:

$$\frac{(\nu_0-\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)(\gamma-\lambda)(\nu_0-\lambda)(\lambda_0-\lambda)}} \pm \frac{(\nu_0-\mu)\,d\mu}{\sqrt{(\alpha-\mu)(\beta-\mu)(\mu-\gamma)(\nu_0-\mu)(\mu-\lambda_0)}} = 0$$

der Differentialgleichungen der geodätischen Tangenten der Krümmungscurven μ_0 und λ_0 respective auf den Flächen λ_0 und ν_0 enthalten; sie entsprechen den besonderen Annahmen $\lambda_0 = \gamma$, $\mu_0 = \nu_0 = \beta$. Nun gilt der Ausdruck II des § 5 für das Linienelement der gemeinsamen Tangenten der Flächen λ_0 und μ_0 und die geodätischen Tangenten der Krümmungscurve μ_0 auf λ_0 mit Veränderung von μ_0 in ν_0 auch für

das Linienelement der geodätischen Tangenten der Krümmungscurve λ_0 auf ν_0. Diesen Bemerkungen zufolge ergiebt sich als gemeinsamer Ausdruck für den Werth des Linienelementes der verschiedenen Stücke der gebrochenen Focalstrahlen der folgende:

$$dS = \pm \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} \pm \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} \pm \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}},$$

wobei die Vorzeichen, wie früher, so einzurichten sind, dass der Werth eines jeden der 3 Differentiale positiv ausfüllt (vgl. § 5). Es sei nun der Punkt $P = \lambda, \mu, \nu$, wie in Fig. 11, durch die Ebene $\nu = \alpha$ von den Punkten g_1 und h_1 getrennt, sodass die gebrochenen Focalstrahlen r_1 und s_1 die Ebene $\nu = \alpha$ schneiden. Längs des Strahles r_1 wächst alsdann λ von λ bis γ, nimmt μ von μ bis γ ab, um hernach wieder von γ bis β zu wachsen, und wächst endlich ν von ν bis α, um nachdem Durchgang durch die Ebene $\nu = \alpha$, wieder von α bis β abzunehmen, ohne bei G_1 eine Unterbrechung in der stetigen Abnahme zu erfahren Demnach ist:

$$r_1 = \int_\lambda^\gamma \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} - \int_\mu^\gamma \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} + \int_\gamma^\beta \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} + \int_\nu^\alpha \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}} - \int_\alpha^\beta \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}}$$

und entsprechend:

$$r_2 = \int_\lambda^\gamma \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} - \int_\mu^\gamma \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} + \int_\gamma^\beta \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} - \int_\nu^\beta \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}},$$

$$s_1 = \int_\lambda^\gamma \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} + \int_\mu^\beta \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} - \int_\beta^\gamma \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} + \int_\nu^\alpha \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}} - \int_\alpha^\beta \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}},$$

$$s_2 = \int_\lambda^\gamma \frac{d\lambda}{2\sqrt{\alpha-\lambda}} + \int_\mu^\beta \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} - \int_\beta^\gamma \frac{d\mu}{2\sqrt{\alpha-\mu}} - \int_\nu^\beta \frac{d\nu}{2\sqrt{\alpha-\nu}},$$

wobei überall die Quadratwurzeln *positiv* verstanden sind. Mit Ausführung der Integration ergiebt sich hieraus für die Längen der 4 gebrochenen Focalstrahlen des Punktes $P = \lambda, \mu, \nu$:

$$r_1 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma},$$

$$r_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} + \sqrt{\alpha-\gamma},$$

$$s_1 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} + \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\beta},$$

$$s_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu} - \sqrt{\alpha-\nu} - \sqrt{\alpha-\beta}\,^*).$$

*) In der Ebene drücken sich bekanntlich die beiden Focaldistanzen des Punktes λ, μ in elliptischen Coordinaten durch die Formeln aus:

$$r_1 = \sqrt{\alpha-\lambda} + \sqrt{\alpha-\mu}, \qquad r_2 = \sqrt{\alpha-\lambda} - \sqrt{\alpha-\mu},$$

vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 222.

Wenn nicht r_1 und s_1, sondern r_2 und s_2 die Ebene $v = \alpha$ durchsetzten, so hätte man in diesen 4 Formeln nur das Vorzeichen von $\sqrt{\alpha - \nu}$ umzukehren. Es folgt nun hieraus:

$$\left.\begin{matrix} |r_1 + s_2| \\ |r_2 + s_1| \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{\alpha - \lambda} + \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta},$$

$$\left.\begin{matrix} |r_1 - s_1| \\ |r_2 - s_2| \end{matrix}\right\} = |2\sqrt{\alpha - \mu} - \sqrt{\alpha - \gamma} - \sqrt{\alpha - \beta}|, \quad \text{(b)}$$

$$\left.\begin{matrix} |r_1 - r_2| \\ |s_1 - s_2| \end{matrix}\right\} = 2\sqrt{\alpha - \nu},$$

wobei allgemein $|x|$ den absoluten Werth von x bedeutet und wieder alle Quadratwurzeln positiv gerechnet sind. Es mag $\sqrt{\alpha - \gamma}$ die grosse und $\sqrt{\alpha - \beta}$ die kleine Excentricität der confocalen Flächen λ, μ, ν heissen; es mögen ferner r_1, r_2 und s_1, s_2 Paare *gleichartiger* und r_1, s_1 und r_2, s_2 Paare *gleichseitiger gebrochener Focaldistanzen* oder *Focalstrahlen* des Punktes λ, μ, ν genannt werden (vgl. Fig. 11).

Alsdann fliessen aus den Ergebnissen (a) und (b) die folgenden Sätze:

I. *Für jeden Punkt des Ellipsoides ist die Summe zweier ungleichseitiger ungleichartiger gebrochener Focaldistanzen constant, nämlich gleich der Länge der grossen Axe des Ellipsoides, vermehrt um die Differenz seiner Excentricitäten.*

Zugleich ist die Halbirungslinie des Winkels zwischen zwei entsprechenden Focalstrahlen die Normale des Ellipsoides.

Da ein gebrochener Focalstrahl des Punktes P immer die stabile Gleichgewichtslage eines Fadens ist, der in einem der Punkte g oder h befestigt, und über die entsprechende Focalcurve G oder H hinweggleitend, nach P hingespannt wird, so kann dieser Satz zu einer äusserst einfachen Fadenconstruction des Ellipsoides verwerthet werden. Man verwendet dazu ein Drahtmodell, welches die beiden Focalkegelschnitte, verbunden durch die geradlinigen Stücke $h_1 g_1$ und $g_2 h_2$, darstellt und befestigt einen Faden mit seinen beiden Enden in den Punkten g_1 und h_2 (oder g_2 und h_1). Der Faden muss so über die beiden Focalcurven gelegt sein, dass er, durch einen Punkt P gespannt, die Lage $g_1 G_1 P H_2 h_2$ (oder $g_2 G_2 P H_1 h_1$) annimmt (Fig. 11). Der Punkt P beschreibt alsdann, indem er sich in dem einen der durch die Ebenen der Focalkegelschnitte abgegrenzten Raumviertel bewegt und beständig den Faden spannt, ein Viertheil der Ellipsoidfläche. Der Uebergang des Punktes P in ein anderes Raumviertel muss, wie leicht ersichtlich, mit einer gleichzeitigen Aenderung der Lagenbeziehung des Fadens zu den Focalkegelschnitten verbunden sein.

II. *Für jeden Punkt des einschaligen Hyperboloides ist die Differenz*

zweier gleichseitiger ungleichartiger gebrochener Focaldistanzen constant, nämlich gleich der Länge der grossen reellen Axe des einschaligen Hyperboloides, vermindert um die Summe seiner Excentricitäten.

Zugleich ist die Halbirungslinie des Supplementes des Winkels zwischen zwei entsprechenden Focalstrahlen die Normale des einschaligen Hyperboloides.

III. *Für jeden Punkt des zweischaligen Hyperboloides ist die Differenz zweier ungleichseitiger gleichartiger gebrochener Focaldistanzen constant, nämlich gleich der Länge der reellen Axe des zweischaligen Hyperboloides.*

Zugleich ist die Halbirungslinie des Supplementes des Winkels zwischen zwei entsprechenden Focalstrahlen die Normale des zweischaligen Hyperboloides.

Ueber geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid.

Von

Otto Staude in Leipzig.

Eine unmittelbare Folge des Satzes über die Fadenconstruction des Ellipsoides*) ist eine Verallgemeinerung des Fagnano'schen Theorems, welche sich auf Längendifferenzen geodätischer Linienstücke auf dem Ellipsoid bezieht, und als Seitenstück neben die von Lebesgue, Schlömilch und Malmstèn**) gegebenen, auf Inhaltsdifferenzen gewisser Flächenstücke auf dem Ellipsoid bezüglichen Analoga des genannten Theorems gestellt werden kann.

Betrachtet man zwei confocale Ellipsen in der Ebene und zieht von zwei beliebigen Punkten der äusseren Ellipse die Tangentenpaare an die innere, so ist bekanntlich***) die Differenz der von diesen Tangentenpaaren beziehungsweise überspannten Bögen der innern Ellipse, und damit auch die Differenz der Ergänzungen dieser Bögen zum vollen Umfang der innern Ellipse, algebraisch ausdrückbar, nämlich gleich dem Ueberschuss der Summe der Längen der Tangenten des einen Paares über die Summe der Längen der Tangenten des andern Paares.

Um diesen Satz auf den Raum auszudehnen hat man an Stelle von nur *zwei* Liniengattungen, geradlinigen Tangenten einer Ellipse und Bögen der Ellipse selbst, *drei* verschiedene Liniengattungen miteinander in Verbindung zu bringen, und zwar gemeinsame geradlinige Tangenten eines Ellipsoides und eines confocalen einschaligen Hyperboloides, geodätische Linien auf dem Ellipsoid und Bögen der Durchdringungscurve der beiden Flächen. Die Curvenstücke, auf welche sich der verallgemeinerte Satz bezieht, sind zusammengesetzt aus den

*) Vgl. die vorstehende Arbeit „Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides", auf welche auch die im Text weiterhin gebrauchte Abkürzung „Ueb. F. d. E." Bezug nimmt.

**) Vgl. die Literaturnachweise bei Enneper, Elliptische Functionen; Theorie und Geschichte, Note VIII, B, sowie die Schlussbemerkung zu dieser Note.

***) Chasles, Propriétés générales des arcs d'une section conique dont la différence est rectifiable, Comptes Rendus Bd. XVII, S. 838.

beiden letzteren Liniengattungen, mögen aber der Kürze wegen schlechthin als geodätische Linien bezeichnet werden, weil sie kürzeste Linien sind, die entweder auf *einer* oder gleichzeitig auf *zwei* Flächen verlaufen (Ueb. F. d. E. § 5).

Denkt man sich zwei confocale Ellipsoide und ein ihnen confocales einschaliges Hyperboloid gegeben, und wählt unter den vier von einem Punkte P des äussern Ellipsoides an das innere und an das Hyperboloid laufenden gemeinsamen Tangenten zwei solche aus, deren Winkel durch die Normale des äussern Ellipsoides im Punkte P halbirt wird (Ueb. F. d. E. § 3), so können die Berührungspunkte Q_1 und Q_2 der beiden Tangenten mit dem innern Ellipsoid auf diesem durch einen aus Stücken der Durchdringungscurve des innern Ellipsoides mit dem Hyperboloid und aus Stücken geodätischer Tangenten der Durchdringungscurve gebildeten Curvenzug verbunden werden. Dieser Curvenzug ist des Näheren dadurch charakterisirt, dass er zusammen mit den beiden Tangenten PQ_1 und PQ_2 die Gleichgewichtslage eines geschlossenen Fadens vorstellt, der um das innere Ellipsoid und das Hyperboloid geschlungen ist und durch den Punkt P des äussern gespannt wird (Ueb. F. d. E. § 7, III). Construirt man nun von einem zweiten Punkte P' des äussern Ellipsoides zwei entsprechende Tangenten $P'Q_1'$ und $P'Q_2'$ und verbindet ihre Endpunkte Q_1' und Q_2' durch einen entsprechenden Curvenzug auf dem innern Ellipsoid, so ist die Differenz der Längen der beiden Curvenzüge Q_1Q_2 und $Q_1'Q_2'$, deren jede für sich durch hyperelliptische Integrale 2. Gattung $p = 2$ dargestellt wird, algebraisch ausdrückbar, nämlich gleich dem Ueberschuss der Summe der Längen der beiden Tangenten PQ_1 und PQ_2 über die Summe der Längen der beiden Tangenten $P'Q_1'$ und $P'Q_2'$.

Dieser Satz geht, wenn man das gegebene einschalige Hyperboloid in bekannter Weise in den äussern Theil der Ebene seiner Focalellipse ausarten lässt, unmittelbar in den vorausgeschickten Satz über confocale Ellipsen über.

Zwickau, den 27. März 1882.

Ueber eindeutige Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden I.

Von

Otto Rausenberger in Frankfurt a. M.

In meiner Abhandlung im 18. Bande der Annalen „*Theorie der allgemeinen Periodicität*“ habe ich nachgewiesen, dass eindeutige Functionen, welche mehrere lineare, nicht vertauschbare Perioden zulassen (oder nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise: eindeutige Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren, linearen Transformationen in sich) im Allgemeinen unendlich viele wesentliche Unstetigkeitspunkte besitzen; die Ausnahmen, welche sich ergaben, waren unwesentlicher Art. Auch habe ich bereits gezeigt, dass gewisse Combinationen von Perioden überhaupt unzulässig sind. Es musste sich mir nun die allgemeine Aufgabe darbieten: *Diejenigen Zusammenstellungen von linearen, nicht vertauschbaren Perioden aufzusuchen, welchen transcendente Functionen entsprechen.*

Ich hatte bereits diesen Gegenstand in Angriff genommen und war auch zu einigen Resultaten gelangt, als ich durch Herrn Klein auf die Poincaré'schen Arbeiten, welche das gleiche Ziel verfolgen, aufmerksam gemacht wurde. Obgleich nun Herr Poincaré den Gegenstand in der allgemeinsten Weise und nach ausgezeichneten Methoden behandelt, so glaubte ich doch meine eignen Untersuchungen fortsetzen zu sollen. Denn einerseits sind die Poincaré'schen Resultate bis jetzt nur ziemlich allgemeine, die der Durchführung im Speciellen noch entbehren; andrerseits schien es mir zweckmässig und nützlich, die rein *geometrischen* Methoden von Herrn Poincaré durch *arithmetische* zu ergänzen, zumal ich glaube auf diesem Wege leichter zu einer systematischen Uebersicht und Gruppirung der fraglichen Transcendenten gelangen zu können. — Die vorliegende Arbeit beabsichtigt es nun, die Methoden und Principien darzulegen, deren ich mich in der Folge bedienen will, dann aber auch einen speciellen Fall sofort zu erledigen.*)

*) Ich will bei dieser Gelegenheit nicht unerwähnt lassen, dass mir Herr Klein bereits vor 1½ Jahren in einem an mich gerichteten Briefe als wesentliche

I. Allgemeine Principien und Methoden.

§ 1.

Eintheilung und Transformation der Perioden.

1. Wie ich in meiner oben citirten Abhandlung nachgewiesen habe, lassen sich alle linearen Perioden durch lineare Transformationen auf 2 Normalfälle zurückführen: die additive und die multiplicatorische; die letztere Classe zerfällt wieder in 2 Unterabtheilungen.

Wir haben

(1) $$y = x + 1,$$

(2) $$y = px, \text{ mod. } p \lesseqgtr 1,$$

(3) $$y = px, \text{ mod. } p = 1.$$

Die dritte Art von Perioden ist nur dann zulässig, wenn p eine genaue n^{te} Einheitswurzel ist. Die Substitutionen, welche sich aus diesen 3 Normalformen herleiten, sind identisch mit denjenigen, welche Herr Klein resp. als *parabolische, hyperbolische und elliptische* bezeichnet. Wir werden uns dieser Ausdrucksweise im Folgenden öfters bedienen, die elliptischen Substitutionen jedoch auch *cyklische* nennen.

2. Es wird für die späteren Untersuchungen angenehm sein, hier die Rechnungen zusammenzustellen, durch welche beliebige lineare Substitutionen auf die Normalfälle reducirt werden.

Setzen wir die Substitution $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ der durch $\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta} = p \cdot \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ definirten, d. h. der Substitution

$$y = \frac{(p\alpha\delta - \beta\gamma)\,x - \beta\delta\,(1-p)}{\alpha\gamma\,(1-p)\,x + \alpha\delta - p\beta\gamma}$$

gleich, so erhalten wir durch Coefficientenvergleichung

$a = p\alpha\delta - \beta\gamma$, $b = -\beta\delta(1-p)$, $c = \alpha\gamma(1-p)$, $d = \alpha\delta - p\beta\gamma$

und hieraus nach einiger Rechnung

$$p = -1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+d)^2 \pm (a+d)\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{ad - bc}.$$

Die Zweideutigkeit des Vorzeichens erklärt sich dahin, dass statt p auch $\frac{1}{p}$ als Periode gewählt werden kann.

Aufgabe seiner functionaltheoretischen Untersuchungen bezeichnete: ***Alle Functionen mit beliebigen linearen Transformationen in sich aufzustellen.*** Freilich glaubte ich damals noch, dass die bezügliche Bemerkung in einem weit eingeschränkteren Sinne aufzufassen sei. — Was die Untersuchungen über den gleichen Gegenstand anlangt, die Herr Hurwitz in dem vorigen Hefte der Annalen veröffentlichte, so verweise ich auf die Einleitung zu dieser Arbeit selbst; ein genaueres Bezeichnen der übereinstimmenden Resultate dürfte unnöthig sein.

Weiter finden wir

$$\beta = \frac{b(1+p)\alpha}{ap-d}, \qquad \gamma = \frac{c}{1-p}\cdot\frac{1}{\alpha},$$

$$\delta = \frac{ap-d}{1-p^2}\cdot\frac{1}{\alpha}.$$

Für $(a-d)^2+4bc=0$ wird $p=1$ und die Transformation unmöglich; die Periode ist dann parabolisch. Andere Specialfälle erledigen sich leicht.

Sind a, b, c, d *reelle* Grössen, so ist die Substitution hyperbolisch, falls $(a-d)^2+4bc>0$, elliptisch, falls $(a-d)^2+4bc<0$ ist.

Im Falle der parabolischen Periode setzen wir $\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta} = 1+\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ und finden bei der Zusammenstellung mit $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ausser der Bedingungsgleichung $(a-d)^2+4bc=0$:

$$\alpha \text{ beliebig}, \quad \beta = \frac{\alpha\sqrt{-b}}{\sqrt{c}} - \sqrt{-b} + \frac{d}{\sqrt{c}}, \quad \gamma = \sqrt{c}, \quad \delta = \sqrt{-b}.$$

3. Wenn mehrere Perioden zusammenbestehen, so ergiebt die Combination und Iterirung derselben eine *Gruppe* von Perioden, in der im Allgemeinen alle 3 Arten von Substitutionen vorkommen. Soll diese Gruppe existenzberechtigt sein, so darf sie keine unmöglichen Perioden enthalten, also abgesehen von unendlich kleinen additiven und von multiplicatorischen Perioden, deren p der Einheit unendlich nahe kommt, auch keine *irrational elliptischen oder cyklischen* Perioden, d. h. solche, für welche mod. $p=1$, aber p keine genaue Einheitswurzel ist. Wir haben also das wichtige Princip:

Alle Periodicitätsgruppen, welche irrational elliptische Perioden enthalten, sind auszuschliessen.

§ 2.

Die nothwendigen wesentlichen Unstetigkeitspunkte.

1. Aus dem Vorhandensein einer nicht cyklischen Periode bei einer Function folgt ohne Weiteres, dass letztere gewisse wesentliche Unstetigkeitspunkte haben muss. Es sind dies solche Punkte, die mit *allen* Punkten der Ebene oder wenigstens eines zusammenhängenden Theils der Ebene durch Periodicität verbunden sind. Lautet die Periodicitätsgleichung $y=x+n$, so ist $x=\infty$ ein nothwendiger Discontinuitätspunkt; ist dagegen $y=px$, so sind $x=0$ und $x=\infty$ solche, vorausgesetzt, dass nicht p eine Einheitswurzel ist, in welchem Falle keine Discontinuitätspunkte bedingt werden. Durch eine lineare Transformation der Function werden diese Punkte in andere übergeführt, die im Allgemeinen im Endlichen liegen. Auch ohne diese Trans-

formation durchzurechnen, lassen sich diese Punkte für irgend eine Periode $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ leicht durch die Bemerkung bestimmen, dass durch diese Substitution die fraglichen Punkte in sich selbst transformirt werden müssen, weil die unendlich oftmalige Iterirung von $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ auf dieselben führen muss, gleichgültig welchen Werth x hat. Wir brauchen daher nur zu setzen

$$x = \frac{ax+b}{cx+d},$$

woraus folgt

$$x = \frac{a-d \pm \sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}.$$

Bei parabolischen Substitutionen fallen die hierdurch bestimmten beiden Punkte in einen zusammen; bei elliptischen Perioden dagegen verlieren die erhaltenen Punkte die Bedeutung als Discontinuitätspunkte; sie sind alsdann die Centren des Cyklus.*)

2. Sind mehrere Perioden vorhanden, so erzeugt nicht allein jedes Glied der Gruppe, welches nicht cyklisch ist, ein oder zwei wesentliche Discontinuitätspunkte (die jedoch theilweise identisch sind), sondern es werden auch aus den so erzeugten durch die Periodicität unzählige andere hergeleitet, sodass wir in allen hier in Betracht kommenden Fällen *eine unendlich grosse Anzahl von wesentlichen Unstetigkeitspunkten* erhalten. Dieselben liegen im Allgemeinen zerstreut, fügen sich jedoch auch mitunter zu *geschlossenen Reihen* zusammen. Derartige *Unstetigkeitslinien* können die ganze Ebene, in der sich das Argument bewegt, in getrennte Theile zerlegen, deren jedem dann, wie aus Weierstrass'schen Untersuchungen bekannt ist, eine besondere Function entspricht. Haben wir es daher mit einer Periodicitätsgruppe zu thun, welche geschlossene oder beiderseits ins Unendliche laufende Unstetigkeitslinien involvirt, so hat es keinen Sinn, solche Substitutionen der Gruppe zuzulassen, welche Punkte mit einander verbinden, die in getrennten Bezirken liegen.

Hieraus folgt ein zweites sehr wesentliches Princip:

Soll eine Periodengruppe, welche das Vorhandensein von trennenden Unstetigkeitslinien begründet, zulässig sein, so muss sich in der Ebene des Arguments ein von Unstetigkeitslinien nicht durchschnittenes Gebiet abgrenzen lassen, dessen sämmtliche Punkte nicht mit andern, die jenseits einer Unstetigkeitslinie liegen, durch irgend eine Periode der Gruppe verbunden sind.

*) Vergl. hiermit Klein, *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen u. s. w.*, Math. Annalen, Band XIV, p. 122.

§ 3.

Geometrische Darstellung.

1. Die besprochenen Principien werden es uns gestatten, eine grosse Anzahl von Periodicitätsgruppen als unmöglich zu erkennen; viel schwieriger ist es dagegen, auf rein arithmetischem Wege nachzuweisen, dass eine Gruppe überhaupt keine unzulässigen Elemente enthält, da die einheitliche Darstellung der Gesammtgruppe im Allgemeinen auf grosse Schwierigkeiten führt. In solchen Fällen ist dann die geometrische Repräsentation der Gruppen, auf die Herr Poincaré allein seine Untersuchung basirt, von dem grössten Nutzen. Obgleich diese Methode durch zahlreiche Arbeiten, namentlich auf dem Gebiete der Modulfunctionen, eingehend erörtert ist, so glaube ich doch der Vollständigkeit und Deutlichkeit halber einige Worte auf dieselbe verwenden zu sollen.

2. Es handelt sich bei dieser geometrischen Darstellung darum, denjenigen Theil der Ebene des Arguments, für welchen die fragliche Function existirt, in unendlich viele Parzellen zu zerlegen, derart, dass 2 Punkte *einer* Parzelle durch keine Periode der Gruppe in einander übergeführt werden, dass dagegen die Punkte verschiedener Parzellen durch Periodicität mit einander verbunden sind. Diese Parzellen werden durch die Periodicitätssubstitutionen conform auf einander abgebildet, stimmen also in den Winkeln überein. Um den Charakter des Liniensystems, welches die Grenzen bildet, besser überschauen zu können, gehen wir auf die Normalformen der Perioden zurück.

3. Die Eintheilung der Ebene für die Periode $y = px$, mod $p \leqslant 1$, stellen wir am einfachsten dadurch her, dass wir um den Nullpunkt concentrische Kreise beschreiben, welche die Radien (a mod. p^n) besitzen, wobei a beliebig angenommen werden kann. Indessen können diese Kreise auch durch andere Curven ersetzt werden, von denen eine ziemlich willkürlich angenommen werden darf, während die anderen die Abbildungen derselben durch die Periodicitätsgleichung darstellen. Charakteristisch für das begrenzende Curvensystem ist es unter allen Umständen, *dass sich die einzelnen Curven desselben niemals (oder wenn man will, unter imaginären Winkeln) schneiden.*

4. Für die Periode $y = x + 1$ wird die Eintheilung durch eine Schaar paralleler Curven gegeben (am einfachsten durch Gerade, welche auf der Abscissenaxe senkrecht stehen), und den in der Richtung der Abscissenaxe gemessenen Abstand 1 besitzen. *Dieselben bilden Winkel von* 0^0 *mit einander.*

5. Ist in $y = px$ p eine n^{te} Einheitswurzel, so wird die Zerlegung

durch n Strahlen (am einfachsten geradlinige) *bewerkstelligt, welche sich im Nullpunkt unter Winkeln von* $\frac{360^0}{n}$ *schneiden.*

6. Nehmen wir nun eine beliebige existenzberechtigte Periodicitätsgruppe, welche die verschiedenen Arten von Perioden enthält, so wird sich das ganze System von Curven, durch welche die Parzellen begrenzt werden, in einzelne Schaaren zerlegen lassen, welche conforme Abbildungen der eben geschilderten sind. Es werden also Complexe von Linien auftreten, welche sich überhaupt nicht schneiden und hyperbolischen Perioden entsprechen; andere, welche unter Winkeln von 0^0 zusammentreffen (sich berühren) und parabolischen Substitutionen ihre Entstehung verdanken; endlich durch elliptische Perioden veranlasste Curven, welche von gewissen *Centren* als Strahlen auslaufen und unter einander Winkel bilden, die ein Bruchtheil von 360^0 sind, wobei es nicht ausgeschlossen ist, dass *mehrere* derartige Strahlenbüschel von *einem* Centrum ausgehen.

7. Damit der Periodicitätsgruppe eine Function entsprechen kann, ist es nöthig, dass sich die einzelnen Parzellen nicht gegenseitig überdecken; man sieht leicht ein, dass dies der Fall sein wird, wenn sich von *einer* Parzelle nachweisen lässt, dass keine 2 Punkte innerhalb derselben durch Perioden der Gruppe verbunden sind. Dies ist die Methode, mittelst welcher Herr Klein die Existenzberechtigung der Gruppe der Modulfunctionen und ihrer Untergruppen bewiesen hat.*)

Doch werden wir auch ohne diesen Nachweis in einigen Fällen die Existenzberechtigung darthun, ähnlich wie dies durch Herrn Poincaré geschieht.

II. Untersuchung specieller Gruppen.

§ 4.

Reduction und Specialisirung des Problems.

1. Wir wollen im Folgenden die Periodicitätsgruppen immer als *Producte einzelner Perioden* ansehen, und zunächst nur solche Gruppen in Betracht ziehen, welche durch Iterirung und Combination *zweier* Elementarperioden hervorgebracht werden können. Dann lässt sich entweder die eine der Fundamentalperioden auf $y = x + 1$ reduciren, oder beide sind hyperbolische oder elliptische Substitutionen. In der folgenden Untersuchung werden wir nur den ersten Fall ins Auge fassen.

Seien also nach vollzogener Reduction der einen Periode

*) S. hierüber Hurwitz, *Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen u. s. w.*, Math. Annalen, Band XVIII, p. 531 ff.

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

die beiden Fundamentalperioden, wobei wir voraussetzen dürfen, dass in der Gruppe keine kleinere reelle, additive Periode wie 1 vorkommt. c können wir als von Null verschieden annehmen, da ich den entgegengesetzten Fall bereits in meiner früheren Arbeit absolvirt habe. Die zweite Periode lässt sich nun noch weiter vereinfachen, ohne die erste zu alteriren, indem wir $y + 1$ statt y, $x + 1$ statt x setzen und 1 so bestimmen, dass das Glied mit x im Zähler wegfällt. Die Perioden nehmen alsdann die *reducirte Form* an, in der wir sie in der Folge immer betrachten werden:

(1) $$y = x + 1,$$

(2) $$y = \varphi_1(x) = -\frac{a}{x+b}.$$

Hier ist a die Determinante von $\varphi_1(x)$ und für die Periode von wesentlicher Bedeutung; wir wollen dasselbe vorläufig im Allgemeinen als *reell* voraussetzen, während wir für b auch complexe Werthe zulassen.

3. Sehr wichtig ist es, dass in der durch (1) und (2) bestimmten Gruppe *eine Untergruppe enthalten ist, die von der Grösse b nicht abhängt.* Es ist nämlich:

(3) $$\varphi_{-1}(x) = -b - \frac{a}{x}$$

und in Folge dessen

(4) $$\varphi_1[\varphi_{-1}(x) + k] = -\frac{a}{k - \frac{a}{x}} = -\frac{ax}{kx - a}$$

oder in reducirter Form

(5) $$y = -\frac{\frac{a^2}{k^2}}{x - \frac{2a}{k}}.$$

4. Falls a und b reelle Zahlen sind, lässt es sich leicht entscheiden, welcher Gattung die Periode (2) angehört. Aus § 1, 2 folgt nämlich, dass $\varphi_1(x)$ parabolisch ist, wenn wir $b^2 - 4a = 0$ und dass es hyperbolisch mit reellem p ist, wenn wir $b^2 - 4a > 0$ haben. Ist dagegen $b^2 - 4a < 0$, so haben wir es mit einer rationalen oder irrationalen elliptischen Periode zu thun; soll dieselbe insbesondere *rational* elliptisch sein, so muss (φ bezeichnet einen rationalen Bruchtheil von 2π)

$$-1 + \frac{b^2}{2a} = \cos\varphi,$$

also

$$\frac{b^2}{2a} = 1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

mithin

(6) $$b = 2\sqrt{a} \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$$

sein.

5. Die Iterirung von $\varphi_1(x)$ lautet:

$$\varphi_2(x) = -\frac{a(x+b)}{-a+bx+b^2}$$

oder in reducirter Form:

(7) $$y = -\cfrac{a^2}{x+\cfrac{b^2}{\cfrac{b^2-2a}{b}}}$$

§ 5.

Wesentliche Unstetigkeitspunkte.

Bevor wir uns auf weitere Untersuchungen einlassen, wollen wir einige Betrachtungen über wesentliche Unstetigkeitspunkte der Functionen mit den Perioden

(1) $$y = x + 1$$

und

(2) $$y = -\frac{a}{x+b}$$

anstellen. Wegen (1) ist $x = \infty$ ein wesentlicher Unstetigkeitspunkt, also auch wegen (2) $x = -\frac{a}{\infty + b} = 0$ und weiter $x = k$. Ziehen wir nun blos die Perioden in Betracht, die der durch (1) und Substitutionen der Form

(3) $$\varphi_1[\varphi_1(x) + k] = -\frac{a}{k - \frac{a}{x}}$$

erzeugten Untergruppe angehören, so finden wir, dass alle Punkte, welche durch den Kettenbruch (die k bezeichnen reelle, ganze, positive oder negative Zahlen):

(4) $$x = k_0 - \cfrac{a}{k_1 - \cfrac{a}{k_2 - \cfrac{a}{k_3 - \ddots \cfrac{a}{k_{n-1} - \cfrac{a}{k_n}}}}}$$

dargestellt werden, wesentliche Unstetigkeitspunkte sind. Die Zahl der Theilbrüche braucht durchaus nicht, wie es nach (3) scheinen könnte, eine gerade zu sein, da man zuletzt als Nenner ∞ oder k wählen kann.

Falls $b = 0$ ist, giebt dieser Kettenbruch (eventuell ins Unendliche

fortgesetzt) *alle* nothwendigen wesentlichen Discontinuitätspunkte, auch diejenigen, die durch unendlich oftmalige Iterirung *beliebiger* Perioden der Gruppe hervorgebracht werden; dagegen sind deren im Allgemeinen noch andere vorhanden, falls b von Null verschieden ist.

2. Wenn a reell ist, so liegen alle in (4) enthaltenen Discontinuitätspunkte auf der Abscissenaxe; dieselben werden sich zu einer zusammenhängenden Unstetigkeitslinie vereinigen, falls a so beschaffen ist, dass sich durch (4) alle reellen Zahlen darstellen lassen.

Ist mod. $a \geqq 1$, so lässt sich leicht zeigen (in Wirklichkeit kommt nur mod. $a = 1$ in Betracht), dass jede reelle Zahl genau oder mit beliebiger Näherung durch einen Bruch der Form (4) ausgedrückt werden kann, selbst wenn man für die k ausser k_0 lediglich positive oder lediglich negative Zahlen wählt. Wenn $\frac{1}{2} \leqq$ mod. $a < 1$ ist, so lässt sich auch noch, indem man die Zeichen der k geeignet wählt, für jede reelle Zahl eine Darstellung durch (4) finden. So ist z. B. für $a = \frac{1}{2}$:

$$\frac{5}{9} = 1 - \frac{4}{9} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{9}{8}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{8}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{\frac{1}{2}}{4}} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{\frac{1}{2}}{-4}}.$$

Dagegen ist dies für mod. $a < \frac{1}{2}$ nicht mehr möglich, da bei den in dem angedeuteten Algorithmus vorkommenden Divisionen nicht immer ein Rest erzielt werden kann, welcher $<$ mod. a ist. Wir finden also folgenden Satz:

Ist a reell, mod. $a \geqq \frac{1}{2}$, so bildet die Abscissenaxe eine zusammenhängende Unstetigkeitslinie; ist aber mod. $a < \frac{1}{2}$, so braucht dies nicht mehr der Fall zu sein.

Uebrigens wird durch den hier constatirten Unterschied der Charakter der zugehörigen Functionen nicht so wesentlich beeinflusst, als man wohl denken könnte.

§ 6.

Der Fall: mod. $a > 1$.

Wir theilen nun die Untersuchung je nach der Grösse von a in verschiedene Abtheilungen. Ist zunächst $\pm a > 1$, so finden wir

durch wiederholte Anwendung von § 4, (5) folgende reducirte Perioden der Gruppe:

$$y = -\frac{a^2}{x-2a}, \quad -\frac{a^4}{x-2a^2}, \quad -\frac{a^8}{x-2a^4},$$

u. s. w.

Von diesen parabolischen Substitutionen gelangen wir zu zahllosen elliptischen, indem wir $x + k$ statt x einfügen, wo für k eine solche ganze Zahl zu wählen ist, dass resp. mod. $(k - 2a) <$ mod. $2a$ u. s. w. ist. Sollen diese Substitutionen rational elliptisch sein, so ist nach § 4, (6) die Bedingung zu erfüllen:

$$2a - k = \mp 2a \cos\frac{\varphi}{2}$$

oder

$$a = \frac{k}{2\left(1 \mp \cos\frac{\varphi}{2}\right)},$$

wofür wir je nach dem Vorzeichen

$$a = \frac{k}{4\sin^2\frac{\varphi}{4}} \quad \text{oder} \quad a = \frac{k}{4\cos^2\frac{\varphi}{4}}$$

setzen können; entsprechende Gleichungen müssen für a^2, a^4 u. s. w. bestehen. Nehmen wir etwa $k = 1$, so müssen sich a, a^2, a^4, a^8 u. s. w. sämmtlich in der Form $\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}$ darstellen lassen, was nur für $a = \mp 1$ möglich ist. Wir finden daher:

Die Gruppe

$$y = x + 1,$$

$$y = -\frac{a}{x+b}$$

ist unmöglich, falls a reell und mod. $a > 1$ ist.

§ 7.

Der Fall: mod. $a = 1$.

1. Bei reellen b muss $a = -1$ ohne Weiteres ausgeschlossen werden; denn durch die Substitution $y = \frac{1}{x+b}$ würden, wie leicht zu sehen ist, *alle* Punkte oberhalb der Abscissenaxe, welche eine Unstetigkeitslinie bildet, mit solchen unterhalb dieser Linie in Verbindung gesetzt.

2. Ist $b = 0$, $a = 1$, so haben wir die Gruppe $y = x + 1$, $y = -\frac{1}{x}$; die Perioden derselben lassen sich bekanntlich in dem Ausdruck

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

zusammenfassen, worin a, b, c, d beliebige ganze Zahlen bedeuten, die der Gleichung

$$ad - bc = 1$$

genügen. Da diese Gruppe, welcher die *Modulfunctionen* entsprechen, bereits genügend untersucht ist, brauche ich nicht weiter auf dieselbe einzugehen.

3. Wenn $a = 1$, b von Null verschieden, also $\varphi_1(x) = -\frac{1}{x+b}$ ist, dürfen wir mod. $b \leq \frac{1}{2}$ voraussetzen, da wir statt $\varphi_1(x)$ ebenso gut auch $\varphi_1(x \pm k) = -\frac{1}{x+b\pm k}$ als Fundamentalsubstitution verwenden können.

Wir haben dann

$$y = 1 + \varphi_1[1 + \varphi_{-1}(x+1)] = -\frac{1}{x},$$

und mit Hülfe dieser Substitution leiten wir aus $y = -\frac{1}{x+b}$ die Periode $y = x + b$ her, die nach einer früheren Bemerkung unzulässig ist.

4. Ist $a = 1$, b complex, so wird der letzte Schluss hinfällig, da eine complexe, additive Periode sehr wohl neben $y = x + 1$ bestehen könnte. Wir wollen diesen Fall durch den Nachweis erledigen, dass kein Gebiet in der ganzen Ebene vorhanden ist, welches nicht mit Punkten in periodischer Beziehung stände, die von ihm durch Unstetigkeitslinien getrennt sind.

Zunächst ist die Abscissenaxe eine Unstetigkeitslinie, die durch die complexen Substitutionen der Gruppe unendlich vielfach abgebildet wird. Von diesen Abbildungen brauchen wir jedoch nur wenige ins Auge zu fassen. Setzen wir $b = \alpha + \beta i$, $x = \xi + \eta i$, $y = u + vi$, so wird die Abscissenaxe mittelst der Substitution $\varphi_1(x) = -\frac{1}{x+\alpha+\beta i}$ als ein Kreis abgebildet, dessen Gleichung $u^2 + v^2 = \frac{v}{\beta}$ ist; denn wir haben $\eta = 0$,

$$u + vi = -\frac{\xi+\alpha-\beta i}{(\xi+\alpha)^2+\beta^2},$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{(\xi+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{v}{\beta}.$$

Der Radius ist $\frac{1}{2\beta}$, und der Kreis berührt die Abscissenaxe von oben im Nullpunkte; den von ihm eingeschlossenen Raum wollen wir mit I, den übrigen oberhalb der Abscissenaxe gelegenen mit II bezeichnen. Ferner bildet die Substitution $\varphi_{-1}(x)$ die Abscissenaxe als eine Gerade ab, welche im Abstande β unterhalb derselben und parallel zu ihr

verläuft; der Raum zwischen beiden Geraden möge III genannt werden. Ausserdem bilden wir noch die Abscissenaxe mittelst $\varphi_{-2}(x)$ ab und erhalten einen weiteren Kreis mit der Gleichung

$$(u+\alpha)^2+(v+\beta)^2+\frac{v}{\beta}+1=0,$$

dessen Radius $\frac{1}{2\beta}$ ist und der die untere Gerade von unten im Punkte $\xi=-\alpha$ berührt. Der von diesem Kreis begrenzte Raum heisse IV, der noch übrig bleibende V. Die sämmtlichen Punkte der Räume I und IV stehen durch $y=x+k$ mit Punkten von II und V in Verbindung. Durch $\varphi_1(x)$ werden die Punkte von II in solche von I transformirt, während durch die gleiche Substitution diejenigen von III in solche von II übergehen. Durch $\varphi_{-1}(x)$ dagegen correspondiren die Punkte von V mit solchen von IV. Man sieht also, *dass sich in der ganzen Ebene kein Punkt findet, der nicht mit anderen, durch Unstetigkeitslinien von ihm getrennten, in periodischer Beziehung stände. Complexe b sind demnach bei $a=1$ nicht zulässig.* — Ganz analoge Betrachtungen lassen sich bei $y=\frac{1}{x+b}$ durchführen.

§ 8.

Der Fall: $\frac{1}{4}<a<1$; $b=0$.

1. Sind die angegebenen Voraussetzungen erfüllt, so muss

$$\varphi_1(x+1)=-\frac{a}{x+b}$$

eine cyklische Substitution sein, da $1-4a<1$ ist. Nach § 4, (6) muss die Bedingung

$$1=2\sqrt{a}\cdot\cos\frac{\varphi}{2},\quad\text{also}\quad a=\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

befriedigt sein, wobei zunächst φ einen *rationalen* Bruchtheil von 2π bezeichnet. Allein diese Bedingung genügt noch nicht, wie sich aus der folgenden eingehenderen Betrachtung ergiebt. Setzen wir in der Periodicitätsgleichung $y=px$ $\frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}$ statt y, $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ statt x, so erhalten wir

$$y=-\frac{(\beta\gamma-p\alpha\delta)x+\beta\delta(1-p)}{\alpha\gamma(1-p)x+\alpha\delta-p\beta\gamma}$$

und hieraus durch Reduction

$$y=-\cfrac{\frac{p(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}{\alpha^2\gamma^2(1-p)^2}}{x+\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha\gamma}\cdot\frac{1+p}{1-p}},$$

oder wenn $\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha\gamma} = c$ gesetzt wird:

$$y = -\frac{c^2 \cdot \frac{p}{(1-p)^2}}{x + c \cdot \frac{1+p}{1-p}}.$$

Ist nun p eine Einheitswurzel, also $p = \cos\varphi + i \sin\varphi$, so wird hieraus

$$y = -\frac{\frac{c^2}{\left(2i \sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}}{x + \frac{c}{i} \cdot \operatorname{cotang}\frac{\varphi}{2}},$$

oder wenn c statt $\frac{c}{i}$ gesetzt wird:

$$y = -\frac{\frac{c^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{x + c \operatorname{cotang}\frac{\varphi}{2}}. \tag{1}$$

Setzt man hierin $k\varphi$ statt φ, während man c ungeändert lässt, so bekommt man die k^{te} Iterirung von (1) in reducirter Form. Wird nun dasjenige φ, welches der Substitution $y = -\frac{a}{x+1}$ zugehört, mit φ bezeichnet, so müssen wir

$$c \operatorname{cotang}\frac{\varphi_1}{2} = 1, \quad \text{also} \quad c = \operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2}$$

setzen, und wir erhalten für die Iterirungen der fraglichen Substitution (in reducirter Form):

$$y = -\frac{\frac{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_1}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{x + \operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2} \cdot \operatorname{cotang}\frac{\varphi}{2}}, \tag{2}$$

worin für φ nacheinander $\varphi_1, 2\varphi_1, 3\varphi_1$ u. s. w. zu nehmen ist. Haben wir nun $\varphi_1 = \frac{2\pi}{n}$, so ist offenbar

$$\sin^2\frac{\varphi_1}{2} \leq \sin^2\frac{k\varphi_1}{2},$$

mithin die Determinante von (2) kleiner oder gleich

$$\frac{\operatorname{tang}^2\frac{\varphi_1}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi_1}{2}},$$

wodurch kein Widerspruch herbeigeführt wird. Ist dagegen $\varphi_1 = \frac{2m\pi}{n}$,

so wird sich unter den φ mindestens eines finden, welches abgesehen von Vielfachen von 2π absolut kleiner wie φ_1 (nämlich $= \frac{2\pi}{n}$), somit höchstens gleich $\frac{\varphi_1}{2}$ ist. Im letzteren Falle (dem möglichst günstigen) haben wir

$$\frac{\operatorname{tang}^2 \frac{\varphi_1}{2}}{4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{4}} = \frac{\cos^2 \frac{\varphi_1}{4}}{\cos^2 \frac{\varphi_1}{2}} > 1.$$

Wenn also φ_1 kein aliquoter Theil von 2π ist, kommen in der Gruppe Substitutionen vor, deren Determinante grösser als 1 ist, die somit die ganze Gruppe unmöglich machen. Wir dürfen also nur

$$(3) \qquad y = -\frac{\frac{\operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}{x + \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \cdot \operatorname{cotang} \frac{\varphi}{2}} = -\frac{\frac{1}{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{x+1}$$

in Betracht ziehen, worin jetzt $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ ist.

2. Um uns nun davon zu überzeugen, dass die Substitution

$$y = -\frac{\frac{1}{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{x} \quad \text{mit} \quad y = x + 1$$

zusammen eine wirklich zulässige Gruppe bildet, construiren wir die zugehörige Eintheilung der Ebene. Ganz analog wie bei der Modulfunction (vgl. die citirte Abhandlung von Herrn Hurwitz) nehmen wir als Ausgangsraum ein unendliches Dreieck, welches von 2 mit der Ordinatenaxe parallelen, im Abstand $\pm \frac{1}{2}$ von dieser verlaufenden Geraden und von einem Kreise begrenzt wird, der mit dem Radius $\sqrt{a} = \frac{1}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}$ und dem Nullpunkt als Mittelpunkt beschrieben ist. Die beiden im Endlichen gelegenen Winkel des Dreiecks betragen $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{n}$. An diesen Ausgangsraum legen sich in Folge von $y = x \pm 1$ seitlich congruente Dreiecke an, nach unten zu dagegen in Folge von $y = -\frac{a}{x}$ ein Dreieck, dessen untere Spitze im Nullpunkt liegt. Die Substitutionen $y = -\frac{a}{x \pm 1}$ nebst Iterirungen leiten aus dem Ausgangsraum und den beiden ihm congruenten, angrenzenden Gebilden Dreiecke her, die sich in den Ecken des ersteren ansetzen und deren untere Spitzen auf der Abscissenaxe liegen. Man sieht ohne Weiteres,

dass die Dreiecke, welche an den Ausgangsraum in Linien oder Ecken anstossen, denselben so wie sich einander nirgends überdecken. Indem man nun den Ausgangsraum durch geeignete Substitutionen der Gruppe auf den benachbarten Dreiecken, dann auf den hieran sich anschliessenden u. s. w., und hiermit immer auch die dem Ausgangsraum benachbarten Dreiecke abbildet, setzt man die Eintheilung fort, ohne dass irgend wo eine Uebereinanderlagerung vorkommen kann, da sonst eine solche auch in der Umgebung des Ausgangsraums vorhanden sein müsste. So überdecken schliesslich die erhaltenen Dreiecke den ganzen Raum auf der einen Seite der Abscissenaxe einfach und vollständig.*)

3. Die einfachsten der hierhergehörigen Gruppen sind:

(a) $$y = x + 1, \quad y = -\frac{1}{x^2};$$

(b) $$y = x + 1, \quad y = -\frac{3 - \sqrt{5}}{x^2};$$

(c) $$y = x + 1, \quad y = -\frac{1}{x^3};$$

u. s. w.

Die Darstellung von Functionen, welchen (a) und (c) zugehören, mit Hülfe der Modulfunction zeigte ich bereits in meiner Notiz pag. 47 dieses Annalenbandes: *„Zur Theorie der Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden."* Die allgemeine Construction der hierhergehörigen Functionen, die im Princip von Herrn Poincaré gegeben ist, deren speciellere Durchführung indessen auf Schwierigkeiten stösst, verschiebe ich auf eine spätere Gelegenheit. — Die Abscissenaxe ist nur für (a) nothwendigerweise eine Unstetigkeitslinie; allein auch bei den andern Functionen erscheinen die Gebiete oberhalb und unterhalb der Abscissenaxe als wesentlich getrennt, da sie nicht durch Periodicität verbunden sind. —

Für die gefundenen Functionen schlage ich den Namen *„Erweiterte Modulfunctionen"* vor; die eigentliche Modulfunction ist nur ein specieller Fall derselben, da für sie $n = 3$ ist.

§ 9.

Der Fall: $-1 < a < -\frac{1}{4}; \quad b = 0.$

1. Diesen Fall können wir nicht so ohne Weiteres beiseite legen, wie den entsprechenden $a = -1$, weil nur für mod. $a > \frac{1}{2}$ die

*) Ueber diesen Gegenstand verdanke ich Herrn Klein wesentliche Angaben.

Abscissenaxe noch eine Unstetigkeitslinie ist; kleinere negative a müssen wir als möglich zulassen. — Aus

$$(1) \qquad y = x + 1, \quad y = \varphi_1(x) = -\frac{a}{x}$$

leiten wir mittelst § 4, (5)

$$(2) \qquad y = -\frac{a^2}{x - 2a}$$

und hieraus weiter

$$(3) \qquad y = -\frac{a^2}{x - (2a + 1)}$$

her, eine Periode, die für die hier in Betracht kommenden Werthe von a immer elliptisch ist. Soll sie *rational* elliptisch sein, so muss die Gleichung (eine Aenderung des Vorzeichens auf der rechten Seite führt zu nichts wesentlich Anderem)

$$2a + 1 = -2a \cos\frac{\varphi}{2}$$

oder

$$a = -\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{4}}$$

erfüllt sein, worin zunächst wieder $\varphi = \frac{2m\pi}{n}$ ist.

Somit wird aus (3)

$$(4) \qquad y = -\frac{\frac{1}{16\cos^4\frac{\varphi}{4}}}{x - \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{4}}},$$

ein Ausdruck, der sich in die Form (1) von § 8 bringen lässt, indem man

$$(5) \qquad c = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{4}} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{4}$$

setzt. Dieselbe Betrachtung, welche in § 8, 1 durchgeführt wurde, zeigt nun, dass die Determinanten eines Theils der Iterirungen von (4) den Werth $\frac{1}{4}$ übersteigen, falls φ kein *aliquoter* Theil von 2π ist. Lassen wir den letzten Fall vorläufig bei Seite, so werden also unter jenen Interirungen

$$(6) \qquad y = -\frac{\frac{c^2}{4\sin^2\frac{k\varphi}{2}}}{x + c\operatorname{cotang}\frac{k\varphi}{2}}$$

solche vorkommen, bei denen

$$\frac{c^2}{4\sin^2\frac{k\varphi}{2}} > \frac{1}{4}$$

ist. Da nun (6) eine rational elliptische Periode ist, so muss entweder, wie theils aus früheren, theils aus den späteren Untersuchungen von § 12, 4 hervorgeht,

$$c\ \text{cotang}\frac{k\varphi}{2} = 0$$

oder

$$c\ \text{cotang}\frac{k\varphi}{2} = 1$$

sein. Der erste Fall muss ausgeschlossen werden, da alsdann aus (6) folgen würde, dass die Determinante kleiner als $\frac{1}{4}$ ist; der zweite Fall dagegen giebt

$$\text{tang}\frac{k\varphi}{2} = \text{tang}\frac{\varphi}{4},$$

also

$$k\varphi \equiv \frac{\varphi}{2}.$$

Diese Relation kommt immer dann vor, wenn

$$\varphi = \frac{4\pi}{n}$$

ist, und es ist auch leicht einzusehen, dass nur unter dieser Voraussetzung $\left(\varphi = \frac{2\pi}{n}\right.$ ist ein specieller Fall hiervon$\left.\right)$ unzulässige Perioden nicht unter den Iterirungen auftreten.

2. Um nun darüber zu entscheiden, ob die vorläufig als möglich erkannten Perioden auch wirklich zulässig sind, vergleichen wir dieselben mit den entsprechenden Perioden mit positiver Determinante. Man sieht sofort, dass alle Substitutionen der Gruppe

$$(7) \qquad y = x + 1, \quad y = \varphi_1(x) = -\frac{a}{x},$$

in denen die Substitution $\varphi_1(x)$ in *gerader* Anzahl auftritt, mit solchen der Gruppe

$$(8) \qquad y = x + 1, \quad y = \frac{a}{x}$$

identisch sind, während diejenigen mit einer *ungeraden* Anzahl von $\varphi_1(x)$ sich mit den negativen Werthen von Perioden der Gruppe (8) identificiren lassen. Perioden der ersten Art verbinden nur Punkte mit einander, die auf *derselben* Seite der Abscissenaxe, Perioden der zweiten Art nur Punkte, die auf *verschiedenen* Seiten derselben liegen. Die Gesammtgruppe der Perioden der ersten Art, (die der zweiten bilden keine Gruppe) werden durch die beiden Perioden

(9) $$y = x + 1, \quad y = \psi_1(x) = \varphi_1[1 + \varphi_1(x)]$$

erzeugt, wie man leicht mittelst der Bemerkung einsieht, dass $\psi_m(x+n) = \varphi_1[m + \varphi_1(x+n)]$ ist. An Stelle von (9) kann auch die Combination

(10) $$y = x + 1, \quad y = \psi_1(x - 1) = \chi_1(x)$$

gesetzt werden.

3. Um zunächst die Eintheilung der Ebene für den Fall $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ herzustellen, construiren wir dieselbe für die Gruppe

(11) $$y = x + 1, \quad y = -\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}\,x}$$

auf beiden Seiten der Abscissenaxe. Während nun die Gruppe (8) die beiden durch die Abscissenaxe getrennten Halbebenen in sich selbst transformirt, communiciren durch die Gruppe

(12) $$y = x + 1, \quad y = -\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}\,x}$$

Parzellen mit einander, die in verschiedenen Halbebenen liegen. Auch hier sind zwei Gebiete der Ebene vorhanden, die durch Periodicität nicht verbunden sind; allein sie liegen nicht getrennt, sondern ihre Theile greifen in complicirter Weise in einander. Jedenfalls steht der Gruppe (12) principiell nichts im Wege, wenn nicht $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, in welchen beiden Fällen die Abscissenaxe zur Unstetigkeitslinie wird.

4. Ist $\varphi = \frac{4\pi}{n}$, n ungerade, so wollen wir nur diejenige Untergruppe von (12) ins Auge fassen, welche die obere Halbebene in sich selbst transformirt und durch (10) dargestellt wird; haben wir die Eintheilung der einen Halbebene hergestellt, so ergiebt sich die der andern durch einfache Abbildung. Wie aus 1. hervorgeht (wir brauchen nur in (6) $\sin\frac{k\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi}{4}$ zu nehmen), sind unter den Iterirungen von $\chi_1(x)$ solche vorhanden, die sich reducirt in die Form

$$y = \vartheta_1(x) = -\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{4}\,x + 1}$$

setzen lassen, und umgekehrt ist leicht ersichtlich, dass alle $\chi_\varkappa(x)$ sich wieder als Iterirungen von $\vartheta_1(x)$ darstellen. Die Gruppe (10) lässt sich also durch

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{4}}}{x+1}$$

oder

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{4}}}{x} \tag{13}$$

ersetzen; die Gruppe (13) ist aber mit den in § 8. behandelten identisch, also zulässig. — Wir erhalten das Gesammtresultat:

Die Gruppe

$$y = x + 1, \quad y = \frac{\frac{1}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}}{x}$$

ist mit Ausnahme der Fälle $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ *und* $\varphi = \frac{\pi}{2}$ *zulässig, falls* $\varphi = \frac{4\pi}{n}$ *ist. Wenn insbesondere n gerade ist, so zerfällt die Ebene in zwei ineinandergreifende Gebiete, welche durch Periodicität nicht verbunden sind. Bei ungeradem n hingegen erfüllen die unter einander correspondirenden Parzellen die ganze Ebene.*

§ 10.

Der Fall: mod. $a \leqq \frac{1}{4}$; $b = 0$.

1. Wenn $0 < a \leqq \frac{1}{4}$, $b = 0$ ist, stellt $\varphi_1(x+1) = -\frac{a}{x+1}$ überhaupt keine cyklische Substitution mehr dar; dass alsdann in der gesammten Gruppe keine cyklische Substitution ausser den von $y = -\frac{a}{x}$ abgeleiteten vorkommt, dürfte algebraisch sehr schwer nachzuweisen sein, während es sich geometrisch in der einfachsten Weise ergiebt. Wir können indessen die ganze Untersuchung sofort bedeutend erweitern und annehmen, dass a eine beliebige *complexe* Zahl ist, deren absoluter Werth $\leqq \frac{1}{4}$ ist. Wir denken uns die ganze Ebene durch Gerade, welche parallel zur Ordinatenaxe mit den Abscissen $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$ u. s. w. verlaufen, in unendlich viele Streifen zerlegt. Ferner beschreiben wir innerhalb des Streifens, welcher den Nullpunkt enthält, von letzterem aus mit dem Radius mod. $a^{\frac{1}{2}}$ einen Kreis und bilden denselben durch die Substitutionen $y = x \pm k$ in den übrigen Streifen ab; es ist klar, dass diese Kreise die Grenzen der Streifen nicht schneiden; nur im Falle mod. $a = \frac{1}{4}$ berühren sie

dieselben*). Der Raum, welchen der erste Kreis umschliesst (mit dem Nullpunkt) möge mit I, die innerhalb der übrigen Kreise gelegenen Flächentheile mögen mit II, der übrigbleibende Raum mit III bezeichnet werden. Es ergiebt sich ohne Weiteres, dass durch $y = -\frac{a}{x}$ jeder Punkt von I in II oder III, jeder Punkt von II oder III in I abgebildet wird, während der den Nullpunkt umschliessende Kreis in sich selbst transformirt wird. Ich behaupte nun, dass sich innerhalb eines jeden der Parallelstreifen, soweit derselbe zum Raum III gehört, keine 2 Punkte finden, welche durch Periodicität verbunden sind. Denn gehen wir von einem beliebigen Punkt des Raumes III aus, so können wir zunächst die Substitution (1) $y = x \pm k$ (k eventuell auch Null) anwenden, wodurch wir in III bleiben. Wenden wir hierauf (2) $y = -\frac{a}{x}$ an, so gelangen wir in den Raum I, aus dem wir wieder durch (1) nach II versetzt werden, da keine zwei Punkte von I infolge dieser Substitution correspondiren können, weil der Durchmesser der Kreise gleich oder kleiner als 1 ist. Lassen wir dann (2) folgen, so kommen wir wieder nach I, dann durch (1) nach II u. s. w. Niemals gelangen wir also in den Raum III zurück, vorausgesetzt, dass wir nicht den eingeschlagnen Weg wieder vollständig zurückgehen, also (2) zweimal nach einander folgen lassen u. s. w. Unsere Behauptung ist hiermit erwiesen. Zugleich sehen wir, dass keine cyklischen Substitutionen in der Gruppe vorkommen ausser den von $y = -\frac{a}{x}$ abgeleiteten. Wir gelangen somit zu dem wichtigen Resultate

Ist a eine reelle oder complexe Zahl, die der Bedingung mod. $a \leq \frac{1}{4}$ genügt, so ist die Gruppe

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{a}{x}$$

immer möglich. Die Transcendenten, zu welchen wir hiedurch gelangen, werden daher ausser dem Argument x noch einen variablen Parameter a enthalten, der nur der vorhin angeführten Beschränkung unterworfen ist.

Wir wollen diese Transcendenten „parametrische Modulfunctionen" nennen.

Nebenbei erhellt hieraus, dass die Poincaré'sche Unterscheidung von Fuchsiens und Kleinéens, jenachdem die erzeugende Gruppe wesentlich reell oder complex ist, nicht als fundamental aufrecht erhalten werden kann; die parametrischen Modulfunctionen würden

*) Wir haben es nach der Poincaré'schen Ausdrucksweise mit „cycles ouverts" zu thun.

nämlich zu der einen oder der anderen Classe gehören, jenachdem ihr Parameter reell oder complex ist.

2. Die nothwendigen Discontinuitätspunkte liegen nur dann alle auf der Abscissenaxe, wenn a reell ist; unter allen Umständen beschränken sie sich jedoch (von $x = \infty$ abgesehen) auf den Raum innerhalb der construirten Kreise und auf die Linien, durch welche wir die Eintheilung der Ebene bewerkstelligten.

§ 11.

Darstellung der Gesammtgruppen für die letzten Fälle.

1. Bevor wir für die Gesammtheit der Substitutionen der Gruppe $y = x + 1$, $y = -\frac{a}{x}$ einen Ausdruck herstellen, wollen wir diese Gruppe erst einer einfachen Transformation unterwerfen, welche den Vortheil bietet, dass dann alle ihre Substitutionen die Determinante 1 erhalten. Wir setzen nämlich $y\sqrt{a}$ statt y, $x\sqrt{a}$ statt x, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \tau$ und bekommen die Gruppe

$$y = x + \tau, \quad y = -\frac{1}{x}. \tag{1}$$

Bezeichnet nun k_α eine ganze, positive oder negative Zahl, so stellt sich die gesammte Gruppe in der Form

$$y = k_n\tau - \cfrac{1}{k_{n-1}\tau - \cfrac{1}{k_{n-2}\tau - \ddots - \cfrac{1}{k_0\tau + x}}} = \frac{a_n x + b_n}{c_n x + d_n} \tag{2}$$

dar.

Uebrigens wollen wir bei den weiteren Rechnungen $k_n = 0$ annehmen, da dies durch eine einfache Functionalsubstitution immer zu Wege gebracht werden kann, und Perioden, welche in einander transformirt werden können, denselben Charakter zeigen. Um nun (1) als einfachen Bruch darzustellen, beachten wir, dass

$$\frac{a_{n+1}x + b_{n+1}}{c_{n+1}x + d_{n+1}} = -\frac{c_n x + d_n}{(a_n + c_n k_n \tau)x + b_n + d_n k_n \tau},$$

also

$$a_{n+1} = -c_n, \qquad b_{n+1} = -d_n,$$
$$c_{n+1} = a_n + c_n k_n \tau, \qquad d_{n+1} = b_n + d_n k_n \tau,$$

somit

$$\begin{cases} a_{n+2} = -c_{n+1} = -a_n - c_n k_n \tau = -a_n + a_{n+1}k_n\tau, \\ b_{n+2} = -d_{n+1} = -b_n - d_n k_n \tau = -b_n + b_{n+1}k_n\tau, \\ c_{n+2} = a_{n+1} + c_{n+1}k_{n+1}\tau = -c_n + c_{n+1}k_{n+1}\tau, \\ d_{n+2} = b_{n+1} + d_{n+1}k_{n+1}\tau = -d_n + d_{n+1}k_{n+1}\tau \end{cases} \tag{3}$$

ist. Mittelst dieser Recursionsformeln lassen sich die gesuchten Coefficienten leicht berechnen, wenn man noch berücksichtigt, dass

$$a_1 = 0, \quad b_1 = -1, \quad c_1 = 1, \quad d_1 = k_0\tau,$$
$$a_2 = -1, \quad b_2 = -k_0\tau, \quad c_2 = k_1\tau, \quad d_2 = -1 + k_0k_1\tau^2$$

ist. — Man erkennt leicht, dass sämmtliche Coefficienten abwechselnd nur gerade oder nur ungerade Potenzen von τ enthalten, und zwar gleichzeitig a_n und d_n nur gerade, b_n und c_n nur ungerade und umgekehrt. Das independente Bildungsgesetz der einzelnen Coefficienten ist complicirt und hat für uns keinen besonderen Werth.

2. Wichtiger ist es, den Ausdruck $a_n + d_n$ darzustellen, da von demselben (bei reellen τ) der Charakter der Substitution abhängt. Ist nämlich bei der angegebenen Voraussetzung

$(a + d)^2 - 4 > 0$, so ist die Substitution hyperbolisch,
$(a + d)^2 - 4 = 0$, „ „ parabolisch,
$(a + d)^2 - 4 < 0$, „ „ elliptisch.

Zur Bildung des fraglichen Ausdrucks wollen wir uns directer Schlüsse bedienen. Aus den Formeln (3) folgt, dass $a_n + d_n$ nur gerade oder nur ungerade Potenzen von τ enthält, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Die Coefficienten dieser Potenzen sind von derselben Dimension wie die letzteren selbst. Die einzelnen Glieder haben wechselnde Zeichen; das höchste ist positiv. Sind nur gerade Potenzen vorhanden, so ist das constante Glied $(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2$, wie sich leicht durch Nullsetzen sämmtlicher k ergiebt; dann haben wir $y = x$, also $a = d = \pm 1$; das Vorzeichen bestimmt sich durch die vorhergehende Bemerkung. Weiter zeigt sich, dass kein k in einer Potenz vorkommen kann, so dass alle einzelnen Posten der Coefficienten von τ^r aus *verschiedenen* Factoren zusammengesetzt sind; kein Posten kommt mehrfach vor. Von besonderer Wichtigkeit ist die Wahrnehmung, dass eine cyklische Vertauschung der k keine Aenderung bei $a_n + d_n$ hervorrufen kann; denn eine solche Vertauschung entspricht der Anwendung einer Functionalsubstitution auf die Periode. Schliesslich erkennt man aus den Recursionsformeln (3) leicht, dass bei einem Posten die Indices der Factoren entweder in ununterbrochener Reihe auf einander folgen oder eine Unterbrechung von einer geraden Anzahl von Einheiten erleiden, und dass alle hiernach zulässigen Combinationen wirklich vorkommen. Hiernach ergiebt sich für die Bildung des Ausdrucks $a_n + d_n$ folgende praktische Regel: Der Ausdruck wird zusammengesetzt aus Gliedern mit wechselndem Vorzeichen, deren erstes positiv und in τ sowohl wie in den Grössen k von der n^{ten} Dimension ist und deren folgende in Beiden von der $(n-2)^{\text{ten}}$, $(n-4)^{\text{ten}}$ u. s. w.

Dimension sind; das etwaige constante Glied lautet $(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2$. Der Coefficient der ν^{ten} Potenz von τ stellt sich als Summe einer Reihe von Producten dar, die man folgendermassen erhält. Man nimmt zuerst das Product $k_0 k_1 k_2 \cdots k_{\nu-1}$; dann bildet man ähnliche Producte, bei denen die Indices immer in ihrer natürlichen Reihenfolge bleiben, die aber Lücken von 2, 4 u. s. w. Factoren aufweisen, wie $k_0 k_3 k_4 \cdots k_{\nu+1}$ u. s. w. Bei den erhaltenen Producten nimmt man nun sämmtliche cyklischen Vertauschungen der Indices vor, lässt aber bei dieser wie bei der vorhergehenden Operation alle Glieder weg, zu denen man vorher schon gelangt ist. So finden wir z. B.

$$a_1 + d_1 = k_0 \tau,$$
$$a_2 + d_2 = k_0 k_1 \tau^2 - 2,$$
$$a_3 + d_3 = k_0 k_1 k_2 \tau^3 - (k_0 + k_1 + k_2)\tau,$$
$$a_4 + d_4 = k_0 k_1 k_2 k_3 \tau^4 - (k_0 k_1 + k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_0)\tau^2 + 2,$$
$$a_5 + d_5 = k_0 k_1 k_2 k_3 k_4 \tau^5 - (k_0 k_1 k_2 + k_1 k_2 k_3 + k_2 k_3 k_4 + k_3 k_4 k_0 + k_4 k_0 k_1)\tau^3 + (k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4)\tau,$$
$$a_6 + d_6 = k_0 k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 \tau^6 - (k_0 k_1 k_2 k_3 + k_1 k_2 k_3 k_4 + k_2 k_3 k_4 k_5 + k_3 k_4 k_5 k_0 + k_4 k_5 k_0 k_1 + k_5 k_0 k_1 k_2)\tau^4 + (k_0 k_1 + k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_3 k_4 + k_4 k_5 + k_5 k_0 + k_0 k_3 + k_1 k_4 + k_2 k_5)\tau^2 - 2,$$

u. s. w.

Mittelst dieser Formeln erkennt man unmittelbar, dass irrational elliptische Perioden z. B. nicht in den Gruppen $y = x + \sqrt{2}$, $y = -\frac{1}{x}$ und $y = x + \sqrt{3}$, $y = -\frac{1}{x}$ vorkommen; in andern Fällen wird dagegen die Sache sehr complicirt, und es ist daher fraglich, wieweit den gefundenen Formeln praktischer Werth beizumessen ist.

§ 12.

Fall: $\frac{1}{4} < \text{mod. } a < 1$; b von Null verschieden.

1. Haben wir $a > \frac{1}{2}$, b reell, so dürfen wir $b \leqq \frac{1}{2}$ annehmen; alsdann lautet die Iterirung von $\varphi_1(x) = -\frac{a}{x+b}$ in reducirter Form:

$$y = -\cfrac{\frac{a^2}{b^2}}{x + \frac{b^2 - 2a}{b}};$$

da hierin $\frac{a^2}{b^2} > 1$ ist, sind solche Substitutionen unmöglich.

2. Ist $a = \frac{1}{2}$, so ist derselbe Schluss zulässig ausser bei $b = \frac{1}{2}$. Die Substitution $\varphi_1(x) = -\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}$ erweist sich aber als irrational elliptisch, weil $-1 + \frac{b^2}{2a} = -\frac{3}{4}$ nicht der Cosinus eines Winkels ist, der einen rationalen Bruchtheil von 360^0 ausmacht.

3. Wenn $\frac{1}{2} \leqq a < 1$ und b complex ist, sind ähnliche Schlüsse anzuwenden wie in § 7., 4. — Dass nicht $-1 < a \leqq -\frac{1}{2}$ sein darf, erhellt ebenfalls leicht.

4. Den Fall, dass $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$, b von Null verschieden ist, wollen wir nur unter der Voraussetzung eines reellen b $\left(\text{mod. } b \leqq \frac{1}{2}\right)$ erledigen. Da die Periode $\varphi_1(x) = -\frac{a}{x+b}$ jedenfalls cyklisch sein muss, dürfen wir

$$\varphi_1(x) = -\frac{\frac{c^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{x + c\,\text{cotang}\,\frac{\varphi}{2}}$$

setzen. Auch hier ist es leicht nachzuweisen, dass $\varphi = \frac{360^0}{n}$ sein muss; denn andernfalls würde bei den Iterirungen von $\varphi_1(x)$ ein φ_1 auftreten, welches höchstens die Hälfte von φ (abgesehen von Vielfachen von 360^0) wäre; es ist aber

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{4}} \leqq \frac{\sin 90^0}{\sin 45^0} \leqq \sqrt{2},$$

mithin

$$\frac{c^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{4}} > 2 \cdot \frac{c^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} > \frac{1}{2},$$

wodurch wir also zu einer unmöglichen Periode gelangten, ausser wenn gerade

$$\frac{c^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{4}} = 1$$

würde; doch zeigt die Untersuchung von c cotang $\frac{\varphi}{2}$, dass auch diese Möglichkeit auszuschliessen ist. Ferner haben wir

$$\text{mod. } b = \text{mod.}\left(c\ \text{cotang}\,\frac{\varphi}{2}\right) \leqq \frac{1}{2},$$

also

$$\text{mod. } c \leqq \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2},$$

somit

$$\frac{c^2}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \leqq \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}}{16 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \leqq \frac{1}{16 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Bedenkt man nun, dass $\frac{\varphi}{2}$ höchstens 60^0, also $\cos^2 \frac{\varphi}{2}$ nicht weniger als $\frac{1}{4}$ betragen kann, so erkennt man, dass die Determinante der Substitution unter $\frac{1}{4}$ liegen muss. Der untersuchte Fall ist daher unmöglich.

5. Ist $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4}$, so gehört die Iterirung von $x = -\frac{a}{x+b}$:

$$y = -\cfrac{\frac{a^2}{b^2}}{x + \frac{b^2 - 2a}{b}}$$

dem vorigen Fall an; die scheinbaren Ausnahmen erledigen sich ohne Schwierigkeit.

§ 13.

Das Gebiet der Untergruppen.

1. Wenn mod. $a \leqq \frac{1}{4}$ ist, wird die Untersuchung, welche Werthe für b zulässig sind, ausserordentlich verwickelt; in der That sind unendlich viele Fälle möglich, in denen b von Null verschieden sein darf. Insbesondere gehören hierher zahllose Untergruppen der bis jetzt aufgestellten Gruppen, wesshalb ich auch den ganzen hier in Frage kommenden Bereich *das Gebiet der Untergruppen* nennen will.

2. Etwas eingehender beschäftigen wir uns nur mit den Untergruppen von

$$y = x + 1, \quad y = -\frac{1}{x},$$

oder was dasselbe ist, von

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

worin a, b, c, d *ganze* Zahlen bezeichnen, die der Bedingung

$$ad - bc = 1$$

genügen. Wir fassen hier natürlich nur diejenigen Untergruppen in's Auge, die in unser Gebiet gehören, d. h. die, welche durch Combination einer *parabolischen* Substitution mit irgend einer andern erzeugt

werden. Befindet sich diese parabolische Substitution nicht in der Form $y = x + k$, so lässt sie sich in dieselbe durch eine ganzzahlige Functionalsubstitution mit der Determinante ± 1 transformiren, so dass also die andere Periode ebenfalls ganzzahlig bleibt und die Determinante 1 behält. Wir haben daher nur die Combination

$$y = x + k, \quad y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc = 1$$

zu untersuchen. Transformiren wir die erste Periode in $y = x + 1$ und reduciren dann die zweite, so finden wir

$$y = x + 1,$$

$$y = -\cfrac{\cfrac{1}{c^2k^2}}{x + \cfrac{a+d}{ck}}.$$

Mit Leichtigkeit ergiebt sich hieraus, dass die fraglichen Untergruppen *vollständig* in der folgenden Form enthalten sind:

$$y = x + 1,$$

$$y = -\cfrac{\cfrac{1}{n^2}}{x + \cfrac{m}{n}},$$

worin m und n ganze Zahlen bezeichnen, und dass auch andrerseits *alle* hierdurch bestimmten Gruppen Untergruppen sind. Nimmt man nämlich $c = 1$ und lässt k alle Werthe durchlaufen, so erhält man bereits alle diese Substitutionen, da alsdann $a + d$ keiner Bedingung unterworfen ist. Dass aber keine neuen Substitutionen hinzukommen, wenn man c andere Werthe beilegt, leuchtet ohne Weiteres ein.

Frankfurt a. M., April 1882.

Ueber die Zahl π.*)

Von

F. Lindemann in Freiburg i. Br.

Bei der Vergeblichkeit der so ausserordentlich zahlreichen Versuche**), die Quadratur des Kreises mit Cirkel und Lineal auszuführen, hält man allgemein die Lösung der bezeichneten Aufgabe für unmöglich; es fehlte aber bisher ein Beweis dieser Unmöglichkeit; nur die Irrationalität von π und von π^2 ist festgestellt. Jede mit Cirkel und Lineal ausführbare Construction lässt sich mittelst algebraischer Einkleidung zurückführen auf die Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen, also auch auf die Lösung einer Reihe von quadratischen Gleichungen, deren erste rationale Zahlen zu Coefficienten hat, während die Coefficienten jeder folgenden nur solche irrationale Zahlen enthalten, die durch Auflösung der vorhergehenden Gleichungen eingeführt sind. Die Schlussgleichung wird also durch wiederholtes Quadriren übergeführt werden können in eine Gleichung geraden Grades, deren Coefficienten rationale Zahlen sind. Man wird sonach die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises darthun, wenn man nachweist, dass *die Zahl π überhaupt nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung irgend welchen Grades mit rationalen Coefficienten sein kann.* Den dafür nöthigen Beweis zu erbringen, ist im Folgenden versucht worden.

Die wesentliche Grundlage der Untersuchung bilden die Relationen zwischen gewissen bestimmten Integralen, welche Herr Hermite angewandt hat***), um den transcendenten Charakter der Zahl e festzustellen. In § 1 sind deshalb die betreffenden Formeln zusammengestellt; § 2 und § 3 geben die Anwendung dieser Formeln zum Beweise des erwähnten Satzes; § 4 enthält weitere Verallgemeinerungen.

*) Vergl. eine Mittheilung des Hrn. Weierstrass an die Berliner Akademie, vom 22. Juni 1882.

**) Man sehe die Artikel *Cyclometrie, Quadratur* und *Rectification* in Klügel's mathematischen Wörterbuche.

***) Sur la fonction exponentielle, Paris 1874 (auch Comptes rendus, t. LXXVII, 1873).

§ 1.

Die Hermite'schen Formeln.

Es sei

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_n);$$

mit Z möge irgend eine der *von einander verschiedenen* Grössen $z_1, z_2, \cdots z_n$ bezeichnet werden; dann bestehen zwischen den bestimmten Integralen

$$\varepsilon_m^i = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (m-1)} \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_i} dz$$

folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{m+1}^0 &= \Theta(z_0, z_0)\, \varepsilon_m^0 + \Theta(z_1, z_0)\, \varepsilon_m^1 + \cdots + \Theta(z_n, z_0)\, \varepsilon_m^n, \\
\varepsilon_{m+1}^1 &= \Theta(z_0, z_1)\, \varepsilon_m^0 + \Theta(z_1, z_1)\, \varepsilon_m^1 + \cdots + \Theta(z_n, z_1)\, \varepsilon_m^n, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varepsilon_{m+1}^n &= \Theta(z_0, z_n)\, \varepsilon_m^0 + \Theta(z_1, z_n)\, \varepsilon_m^1 + \cdots + \Theta(z_n, z_n)\, \varepsilon_m^n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Die Function $\Theta(z, \zeta)$ ist eine ganze Function n^{ten} Grades ihrer beiden Argumente; in ihr sind die Coefficienten der Potenzen von z und ζ ganze symmetrische Functionen der $n+1$ Grössen z_i und enthalten ausserdem nur ganze Zahlen, *sodass sie selbst ganze Zahlen sind, sobald dies mit den Coefficienten der Potenzen von z in $f(z)$ der Fall ist;* sie sind ganze Functionen n^{ten} Grades von m; auf ihr Bildungsgesetz kommt es im Folgenden nicht weiter an, es muss nur noch bemerkt werden, dass ihre Determinante folgender Relation genügt:

$$\begin{vmatrix} \Theta(z_0, z_0) & \Theta(z_1, z_0) \cdots \Theta(z_n, z_0) \\ \Theta(z_0, z_1) & \Theta(z_1, z_1) \cdots \Theta(z_n, z_1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Theta(z_0, z_n) & \Theta(z_1, z_n) \cdots \Theta(z_n, z_n) \end{vmatrix} = \delta^2,$$

wenn

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \cdots & z_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_0^n & z_1^n & \cdots & z_n^n \end{vmatrix}.$$

Durch die angegebenen Gleichungen sind die Integrale ε_{m+1}^i zurückgeführt auf die Integrale ε_m^i. Durch wiederholte Anwendung derselben findet man also Formeln von der Gestalt:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_m^0 &= A_0\varepsilon_1^0 + A_1\varepsilon_1^1 + \cdots + A_n\varepsilon_1^n,\\
\varepsilon_m^1 &= B_0\varepsilon_1^0 + B_1\varepsilon_1^1 + \cdots + B_n\varepsilon_1^n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varepsilon_m^n &= L_0\varepsilon_1^0 + L_1\varepsilon_1^1 + \cdots + L_n\varepsilon_n^n;
\end{aligned}
\tag{1 a}
$$

und man hat

$$
\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ B_0 & B_1 & \cdots & B_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_0 & L_1 & \cdots & L_n \end{vmatrix} = \delta^{2(m-1)}. \tag{2}
$$

Um endlich die Integrale ε_1^i auszuwerthen, werden neue ganze Functionen $\Phi(z, \zeta)$ eingeführt, welche den Functionen $\Theta(z, \zeta)$ analog gebildet sind, insbesondere hinsichtlich ihrer Coefficienten ebenfalls die bei den Θ hervorgehobene Eigenschaft zeigen und wiederum der Bedingung

$$
\begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \cdots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \cdots & \Phi(z_n, z_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \cdots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix} = \delta^2
$$

genügen. Aus ihnen setzen sich die durch folgende Gleichungen definirten Grössen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \cdots \Lambda$ zusammen:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A} &= A_0\Phi(Z, z_0) + A_1\Phi(Z, z_1) + \cdots + A_n\Phi(Z, z_n),\\
\mathsf{B} &= B_0\Phi(Z, z_0) + B_1\Phi(Z, z_1) + \cdots + B_n\Phi(Z, z_n),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Lambda &= L_0\Phi(Z, z_0) + L_1\Phi(Z, z_1) + \cdots + L_n\Phi(Z, z_n).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Bezeichnet man endlich mit $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0, \cdots \Lambda_0$ die Werthe dieser Constanten für den Fall, dass Z durch z_0 ersetzt wird, so hat man für die bestimmten Integrale ε_m^i schliesslich folgende Formeln:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_m^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-Z}\mathsf{A},\\
\varepsilon_m^1 &= e^{-z_0}\mathsf{B}_0 - e^{-Z}\mathsf{B},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\varepsilon_m^n &= e^{-z_0}\Lambda_0 - e^{-Z}\Lambda.
\end{aligned}
$$

Hierin bedeutet Z irgend eine der Grössen $z_1, z_2, \cdots z_n$; setzen wir insbesondere $Z = z_k$, so mögen die dann entstehenden Werthe von $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \cdots \Lambda$ mit $\mathsf{A}_k, \mathsf{B}_k, \cdots \Lambda_k$ bezeichnet werden, und es werde

$$
\left[\varepsilon_m^i\right]_{Z=z_k} = \eta_k^i
$$

gesetzt; dann ist auch

$$
\begin{aligned}
\eta_k^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-z_k}\mathsf{A}_k,\\
\eta_k^1 &= e^{-z_0}\mathsf{B}_0 - e^{-z_k}\mathsf{B}_k,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\eta_k^n &= e^{-z_0}\Lambda_0 - e^{-z_k}\Lambda_k.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Die Determinante der Coefficienten $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \cdots$ ist hier gegeben durch

$$
\begin{vmatrix}
\mathsf{A}_0 & \mathsf{A}_1 & \cdots & \mathsf{A}_n\\
\mathsf{B}_0 & \mathsf{B}_1 & \cdots & \mathsf{B}_n\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\Lambda_0 & \Lambda_1 & \cdots & \Lambda_n
\end{vmatrix} = \delta^{2m}. \tag{5}
$$

§ 2.

Ueber die symmetrischen Functionen der Grössen e^{z_i}.

Wir bemerken, dass die in § 1. zusammengestellten Relationen unabhängig davon bestehen, ob die Grössen $z, z_0, z_1, \cdots, z_n$ reell oder complex sind, denn sie beruhen einfach auf identischen Umformungen; auch kann der bei Berechnung der Integrale η_k^i gewählte Integrationsweg ein beliebiger sein; es muss nur der unendlich ferne Punkt der z-Ebene ausgeschlossen bleiben.

Wir nehmen an, dass die symmetrischen Functionen der z_i reelle oder complexe ganze Zahlen seien; auch unter $N_0, N_1, \cdots, N_n$ verstehen wir reelle oder complexe ganze Zahlen. Zunächst werde ein System von Gleichungen abgeleitet, zu denen eine Relation der Form

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0 \tag{6}$$

Veranlassung giebt.

Wir multipliciren die in (4) enthaltenen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\eta_1^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-z_1}\mathsf{A}_1,\\
\eta_2^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-z_2}\mathsf{A}_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\eta_n^0 &= e^{-z_0}\mathsf{A}_0 - e^{-z_n}\mathsf{A}_n,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

bez. mit $N_1 e^{z_1}, \cdots, N_n e^{z_n}$, dann ergiebt sich durch Addition

$$
\begin{aligned}
&e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n\\
&= e^{-z_0}\left(e^{z_1}N_1 + e^{z_2}N_2 + \cdots + e^{z_n}N_n\right)\mathsf{A}_0\\
&\quad - (\mathsf{A}_1 N_1 + \mathsf{A}_2 N_2 + \cdots + \mathsf{A}_n N_n).
\end{aligned}
$$

In Folge von (14) muss daher die Gleichung bestehen

$$e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n = -(\mathsf{A}_0 N_0 + \mathsf{A}_1 N_1 + \cdots + \mathsf{A}_n N_n).$$

Analoge Gleichungen werden sich ergeben, wenn man A durch B, $\cdots$, Λ ersetzt; man wird also zu folgendem Systeme von $n+1$ Gleichungen geführt:

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_0 N_0 + \mathsf{A}_1 N_1 + \cdots + \mathsf{A}_n N_n &= \alpha, \\ \mathsf{B}_0 N_0 + \mathsf{B}_1 N_1 + \cdots + \mathsf{B}_n N_n &= \beta, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \Lambda_0 N_0 + \Lambda_1 N_1 + \cdots + \Lambda_n N_n &= \lambda, \end{aligned} \tag{8}$$

wo

$$\begin{aligned} -\alpha &= e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n, \\ -\beta &= e^{z_1}\eta_1^1 N_1 + e^{z_2}\eta_2^1 N_2 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^1 N_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ -\lambda &= e^{z_1}\eta_1^n N_1 + e^{z_2}\eta_2^n N_2 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^n N_n. \end{aligned}$$

Dies sind die Formeln, aus welchen Herr Hermite das Transscendentsein der Zahl e direct ableitet, indem er annimmt, dass die z_i selbst ganze Zahlen sind. Für unsern Zweck sollen die Gleichungen dadurch vereinfacht werden, dass $N_1 = N_2 = \cdots = N_n$ genommen wird; *es soll ferner im Folgenden immer* $z_0 = 0$ *gesetzt werden.* Man hat dann an Stelle von (8):

$$\begin{aligned} N_0\mathsf{A}_0 + N_1(\mathsf{A}_1 + \cdots + \mathsf{A}_n) &= -N_1(e^{z_1}\eta_1^0 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^0), \\ N_0\mathsf{B}_0 + N_1(\mathsf{B}_1 + \cdots + \mathsf{B}_n) &= -N_1(e^{z_1}\eta_1^1 + \cdots + e^{z_n}\eta_n^1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ N_0\Lambda_0 + N_1(\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_n) &= -N_1(e^{z_1}\eta_1^n + \cdots + e^{z_n}\eta_n^n). \end{aligned} \tag{9}$$

Hier stehen links ganze Functionen der Grössen $z_1, z_2, \cdots, z_n$ mit ganzzahligen Coefficienten. Vertauscht man in ihnen z_i mit z_k, so vertauscht sich nach (7) auch A_i mit A_k. Die linke Seite der ersten Gleichung ist also eine symmetrische Function der Wurzeln z_i, *folglich selbst eine ganze Zahl.*

Durch Vertauschung von z_1 mit z_2 geht B_i in Γ_i über und umgekehrt, sobald i von 1 und 2 verschieden ist; dagegen vertauscht sich gleichzeitig B_1 mit Γ_2 und B_2 mit Γ_1: es vertauschen sich also die linken Seiten der zweiten und dritten Gleichung unter einander. Analoges gilt bei beliebigen Vertauschungen der z_i; also: *Die linken Seiten der n letzten Gleichungen des Systems* (9) *sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung von der Form*

$$V^n + M_1 V^{n-1} + \cdots + M_n = 0 \tag{10}$$

mit ganzzahligen Coefficienten M_i.

Wir lassen jetzt die Zahl m unendlich gross werden. Bezeichnet M' das Maximum des absoluten Betrages von $f(z)$ für die Werthe von z, welche sich auf dem beim Integrale ε_m^i gewählten Integrationswege befinden, und ist l' die Länge dieses Weges, M_0' das Maximum des absoluten Betrages von $e^{-z}(z - z_i)^{-1}$ längs dieses Weges, so hat man

$$\operatorname{abs} \varepsilon_m^i \leqq \frac{\mathsf{M}'^m \cdot \mathsf{M}_0' \cdot l'}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)}.$$

Versteht man also unter M, M_0, l die grössten derjenigen Zahlen M', M_0', l', welche bei den verschiedenen Integralen ε_m^i vorkommen, wenn man die obere Grenze Z nach einander durch $z_1, z_2, \cdots, z_n$ ersetzt und dem Index i alle möglichen Werthe beilegt, und setzt man noch $\mathsf{M}_0 l = E$, so besteht für alle Integrale η_k^i die Ungleichung:

$$\operatorname{abs} \eta_k^i \leqq \frac{\mathsf{M}^m \cdot E}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)},$$

wo E und M bestimmte endliche von m unabhängige Zahlen bedeuten.

Es kann also die rechte Seite der ersten unter den Gleichungen (9) und somit die ganze Zahl $N_0\mathsf{A}_0 + N_1(\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \cdots \mathsf{A}_n)$ beliebig klein gemacht werden, dadurch dass man m hinreichend gross wählt. Das ist aber nur möglich, wenn es eine endliche ganze Zahl m' giebt der Art, dass die Gleichung

$$N_0\mathsf{A}_0 + N_1(\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \cdots + \mathsf{A}_n) = 0$$

genau erfüllt ist für alle ganzzahligen Werthe von m, welche nicht kleiner als m' sind.

Ebenso ergiebt sich, dass die rechten Seiten der übrigen Gleichungen (9) gleich Null werden für $m = \infty$, dass also auch die linken Seiten, d. i. die Wurzeln von (10), beliebig klein werden für hinreichend grosse Werthe von m. Dasselbe gilt folglich von den Coefficienten M_i dieser Gleichung; da letztere aber ganze Zahlen sind, so müssen sie schon für hinreichend grosse *endliche* Werthe von m genau gleich Null sein; hieraus folgt, dass auch die Wurzeln von (10) für dieselben Werthe von m sämmtlich verschwinden. Wir sind also zu folgendem Resultate gekommen: *Soll eine Gleichung von der Form*

$$N_0 + N_1 \sum e^{z_i} = 0 \tag{11}$$

bestehen, so muss es eine bestimmte positive ganze Zahl m' geben der Art, dass für alle ganzzahligen Werthe von m, die nicht kleiner als m' sind, das folgende System von Gleichungen besteht:

$$\begin{aligned} &\mathsf{A}_0 N_0 + (\mathsf{A}_1 + \cdots + \mathsf{A}_n) N_1 = 0, \\ &\mathsf{B}_0 N_0 + (\mathsf{B}_1 + \cdots + \mathsf{B}_n) N_1 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\mathsf{\Lambda}_0 N_0 + (\mathsf{\Lambda}_1 + \cdots + \mathsf{\Lambda}_n) N_1 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Hieraus würde weiter folgen, dass die Determinante der Grössen $A, B, \cdots, \Lambda$ verschwinde, da ihre aus zwei parallellen Reihen zu bildenden zweireihigen Unterdeterminanten sämmtlich Null sein müssten. Die Determinante ist aber nach (5) gleich δ^{2m}, kann also, da die z_i von einander verschieden vorausgesetzt wurden, niemals Null sein. Damit ist gezeigt, dass die Annahme einer Relation von der Form (11) zu einem Widerspruche führt, und wir haben den Satz gewonnen:

Sind $z_1, \cdots, z_n$ die von Null und von einander verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung von der Form

$$z^n + s_1 z^{n-1} + \cdots + s_n = 0, \tag{13}$$

wo die s_i reelle oder complexe ganze Zahlen bezeichnen, und ist die Discriminante dieser Gleichung von Null verschieden, so kann eine Relation von der Form (11) *nicht bestehen, falls die N_i reelle oder complexe ganze, von Null verschiedene Zahlen bedeuten.*

Ebensowenig ist eine Relation von der Form

$$N_0 + N_1 (e^{r z_1} + e^{r z_2} + \cdots + e^{r z_n}) = 0 \tag{14}$$

möglich, wenn r eine ganze Zahl bedeutet. Denn die Grössen rz_1, $rz_2, \cdots, rz_n$ sind ebenfalls von einander und von Null verschiedene Wurzeln einer Gleichung von der Form (13), sobald dies mit $z_1, z_2, \cdots z_n$ der Fall ist; es lassen sich also auf (14) dieselben Schlüsse wie auf (11) anwenden, und es folgt:

Unter den gemachten Voraussetzungen kann keine der symmetrischen Functionen

$$e^{r z_1} + e^{r z_2} + \cdots + e^{r z_n} \tag{15}$$

gleich einer rationalen Zahl sein.

Untersuchen wir weiter, ob zwischen diesen symmetrischen Functionen eine lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten N_i, also eine Gleichung von der Gestalt

$$0 = N_0 + N_1 \sum e^{z_i} + N_2 \sum e^{2 z_i} + \cdots + N_s \sum e^{s z_i} \tag{16}$$

bestehen kann, wo s irgend eine ganze positive Zahl bedeutet. Die ns Grössen $z_i, 2z_i, \cdots sz_i$, mögen zur Abkürzung mit $z_1, z_2, \cdots z_{ns}$ bezeichnet werden, so dass $z_{i+n} = 2z_i$, $z_{i+2n} = 3z_i$, etc. Dieselben sind Wurzeln einer Gleichung ns^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten von der Form (13). Aus (16) würde sich also, wie aus (6), ein System von $ns + 1$ Gleichungen von der Gestalt (8) ergeben. Um dieselben einfach schreiben zu können, führen wir statt der $(n+1)^2$ Grössen $A_i, B_i, \cdots \Lambda_i$ jetzt $(ns+1)^2$ Grössen A ein, die mit zwei Indices versehen sein mögen, und zwar so, dass der erste Index diejenige Unterscheidung bewirkt, welche früher durch Wahl der ver-

schiedenen Buchstaben A, B, $\cdots$ A angedeutet war, dass also die folgenden zu (4) analogen Gleichungen bestehen (indem $z_0 = 0$):

$$\eta_k^i = \mathsf{A}_{i0} - e^{-z_k}\mathsf{A}_{ik}, \quad \text{für } i, k \text{ gleich } 0, 1, 2, \cdots, ns.$$

Statt (8) haben wir dann:

$$\begin{aligned}
&N_0\mathsf{A}_{00} + N_1\sum\mathsf{A}_{0,i} + N_2\sum\mathsf{A}_{0,i+n} + \cdots + N_s\sum\mathsf{A}_{0,i+ns-n} = \alpha_0,\\
&N_0\mathsf{A}_{10} + N_1\sum\mathsf{A}_{1,i} + N_2\sum\mathsf{A}_{1,i+n} + \cdots + N_s\sum\mathsf{A}_{1,i+ns-n} = \alpha_1,\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&N_0\mathsf{A}_{ns,0} + N_1\sum\mathsf{A}_{ns,i} + N_2\sum\mathsf{A}_{ns,i+n} + \cdots + N_s\sum\mathsf{A}_{ns,i+ns-n} = \alpha_{ns},
\end{aligned} \tag{17}$$

wo die rechten Seiten gegeben sind durch

$$-\alpha_k = N_1\sum\eta_i^{(k)}e^{z_i} + N_2\sum\eta_{i+n}^{(k)}e^{z_{i+n}} + \cdots + N_s\sum\eta_{i+ns-n}^{(k)}e^{z_{i+ns-n}}.$$

Alle hier vorkommenden Summen sind über i von $i = 1$ bis $i = n$ zu nehmen.

Auf den linken Seiten des Systems (17) stehen wieder ganze Functionen der z_i mit ganzzahligen Coefficienten. Vertauscht man z_i mit z_k (wo $i, k < n$), so vertauscht sich gleichzeitig z_{i+rn} mit z_{k+rn}, folglich auch

$$\mathsf{A}_{0,i} \text{ mit } \mathsf{A}_{0,k} \quad \text{und} \quad \mathsf{A}_{0,i+rn} \text{ mit } \mathsf{A}_{0,k+rn}$$

ferner, wenn der erste Index von Null verschieden ist:

$$\mathsf{A}_{k,i+rn} \text{ mit } \mathsf{A}_{i,i+rn} \quad \text{für} \quad l \gtrless k, i$$

$$\mathsf{A}_{i,k+rn} \text{ mit } \mathsf{A}_{k,i+rn} \quad \text{und} \quad \mathsf{A}_{i,i+rn} \text{ mit } \mathsf{A}_{k,k+rn}.$$

Die linke Seite der ersten unter den Gleichungen (17) ist sonach wieder eine ganze Zahl; die linken Seiten der übrigen Gleichungen sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom Grade ns und von der Form (10). Auf alle vorkommenden ganzen Zahlen lassen sich für $m = \infty$ die bei (9) und (10) gemachten Schlüsse übertragen. Es folgt also, dass für hinreichend grosse *endliche* Werthe der ganzen Zahl m die linken Seiten der Gleichungen (17) genau gleich Null sein müssen. Daraus würde weiter folgen, dass für dieselben Werthe von m alle $(s+1)$-reihigen Determinanten genau verschwinden, welche aus den $(s+1)(ns+1)$ Coefficienten der N_i in (17) in bekannter Weise zu bilden sind. Dann müsste auch die $(ns+1)$-reihige Determinante der A_{ik} selbst gleich Null sein; diese aber ist nach (5) gleich der $2m^{\text{ten}}$ Potenz von δ, wenn man in der Determinante δ (vergl. § 1) $z_0 = 0$ macht und den Index n durch ns ersetzt.

Es ist δ gleich dem Producte aller Differenzen $\pm(pz_i - qz_k)$, welche entstehen, wenn man den Indices i, k alle Werthe $1, 2, \cdots n$, den Zahlen p, q alle Werthe $0, 1, 2, \cdots, s$ beilegt (ausgenommen

$p=q=0$). Es kann also δ nur Null sein, wenn zwischen zwei Wurzeln z_i, z_k eine Relation der Form $pz_i - qz_k = 0$ besteht. Nimmt man eine solche an, so würden die Gleichung (13) und die Gleichung

$$z^n + \frac{q}{p} s_1 z^{n-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 s_2 z^{n-2} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^n s_n = 0$$

eine gemeinsame Wurzel z_i zulassen, somit beide reducibel sein. Legen wir also der Gleichung (13) die Bedingung der Irreducibilität auf, so kann δ sicher nicht verschwinden, während wir eben sahen, dass in Folge von (16) und (17) $\delta = 0$ sein müsste. Folglich:

Sind $z_1, z_2, \cdots z_n$ die Wurzeln einer irreducibeln Gleichung von der Form (13) *mit ganzzahligen Coefficienten s_i, so kann zwischen den symmetrischen Functionen* (15) *keine lineare Gleichung mit rationalen, von Null verschiedenen Coefficienten bestehen.*

§ 3.

Anwendung auf Untersuchung der Zahl π.

Die gewonnenen Sätze lassen sich übertragen auf die symmetrischen Functionen

$$(18) \qquad \begin{array}{lll} \sum e^{z_1}, & \sum e^{z_1+z_2}, & \sum e^{z_1+z_2+z_3}, \cdots \\ \sum e^{rz_1}, & \sum e^{r(z_1+z_2)}, & \sum e^{r(z_1+z_2+z_3)}, \cdots \end{array}$$

wo wieder r eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Setzen wir zunächst voraus, dass die Zahlen, welche hier als Exponenten von e auftreten, sämmtlich von Null und von einander verschieden seien. Die Annahme einer linearen Beziehung mit rationalen Coefficienten N_i zwischen den Grössen (18) würde dann zu einem Gleichungssysteme führen, welches zu (17) ganz analog ist, und dessen Unmöglichkeit in ganz derselben Weise dargethan werden kann.

Ist die gemachte Voraussetzung nicht erfüllt, so nehmen wir zunächst an, dass in einer der Functionen (18), sagen wir Σe^Z, mehrere der Exponenten Z einander gleich seien, und betrachten eine Relation von der Gestalt

$$(19) \qquad 0 = N_0 + N_1 \sum e^Z.$$

Jetzt werden sich die sämmtlichen Grössen Z in mehrere Gruppen

$$Z_1, Z_1', Z_1'', \cdots; \quad Z_2, Z_2', Z_2'', \cdots; \cdots$$

zerlegen, der Art, dass die Grössen jeder Gruppe Wurzeln einer irreducibeln Gleichung mit rationalen Coefficienten sind und sich bei Vertauschungen der z_i nur unter einander vertauschen. Es war

aber bei Behandlung der in § 2. supponirten Gleichungen (11), (14), (16) allein massgebend, dass in jeder einzelnen Summe nur solche Exponenten von e vorkamen, die sich unter einander vertauschen bei den Vertauschungen der z_i. Wir werden daher jetzt unmittelbar auf die Unmöglichkeit einer Relation von der Gestalt

$$0 = N_0 + N_1 \sum e^{z_1} + N_2 \sum e^{z_2} + \cdots$$

schliessen dürfen; und in dieser ist die Relation (19) als besonderer Fall enthalten.

Sollte ferner eine der Grössen Z gleich Null sein, so würde dies einer Aenderung des numerischen Werthes der Zahl N_0 äquivalent sein, das Resultat also nicht beeinflussen; es sei denn, dass alle auf der rechten Seite von (19) vorkommenden Exponenten gleichzeitig verschwänden. Wenn die z_i Wurzeln einer irreducibeln Gleichung sind, wird dies nur eintreten können für die Exponenten der Functionen

$$e^Z = e^{r(z_1+z_2+\cdots+z_n)} \tag{20}$$

falls in (13) der Coefficient s_1 von ε^{n-1} gleich Null ist. *Dieser Fall giebt im Folgenden immer eine Ausnahme* und soll nicht jedesmal wieder hervorgehoben werden.

Betrachtet man weiter eine lineare Relation, in der *mehrere* der Functionen (18) vorkommen, so wird man es beim Auftreten gleicher Exponenten wieder so einrichten, dass jede Zahl N_i multiplicirt erscheint in eine Summe, in deren Gliedern die Exponenten von e Wurzeln einer einzigen irreducibeln Gleichung sind, und die bei Gelegenheit von (19) gemachten Bemerkungen wiederholen. Als Specialfall erhält man dann wieder die zu Anfang dieses Paragraphen besprochene Relation, wo jede Zahl N_i in eine der symmetrischen Functionen (18) multiplicirt ist. — Schliesslich gelangen wir so zu folgenden Sätzen:

Es kann keine der symmetrischen Functionen (18) *gleich einer rationalen Zahl sein, ausgenommen eine Function* (20) *falls in* (13) s_1 *verschwindet.* Und allgemeiner: *Zwischen den Functionen* (18) *kann keine lineare Relation mit rationalen Coefficienten bestehen, ausgenommen den Fall, wo* s_1 *in* (13) *gleich Null ist, in welchem Falle eine solche Function der Grössen* (20) *gleich einer rationalen Zahl ist.*

Nun ist die erste Reihe der Grössen (18) identisch mit der Reihe der Coefficienten M_i derjenigen algebraischen Gleichung n^{ten} Grades

$$V^n - \mathsf{M}_1 V^{n-1} + \mathsf{M}_2 V^{n-2} - \cdots \mp \mathsf{M}_n = 0, \tag{21}$$

welche von den Zahlen e^{z_i} befriedigt wird. Wir wissen also, dass diese Coefficienten M_i nicht gleich rationalen Zahlen sind, ausgenommen M_n für $s_1 = 0$, und dass zwischen ihnen keine lineare Relation mit

rationalen Coefficienten Statt hat. Eine solche aber würde nothwendig erfüllt sein müssen, wenn eine der Wurzeln von (21), d. i. der Grössen e^{s_i}, gleich einer rationalen Zahl wäre. Also:

Ist Z Wurzel einer irreducibeln algebraischen Gleichung von der Form (13), *so kann e^z nicht gleich einer rationalen Zahl sein.*

Es ist aber die Bedingung $e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$ erfüllt, also kann $\pi\sqrt{-1}$ nicht Wurzel einer irreducibeln Gleichung der Form (13) sein. Auf letztere Form kann jede Gleichung mit rationalen Coefficienten leicht gebracht werden, indem man pz statt z als Unbekannte auffasst, unter p eine passend gewählte ganze Zahl verstanden. Es folgt so der in der Einleitung hervorgehobene Satz:

Die Ludolph'sche Zahl π kann nicht Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen (reellen oder complexen) Coefficienten sein.

§ 4.

Verallgemeinerung der gewonnenen Resultate.

Im Vorstehenden sind alle Schlüsse nur so weit durchgeführt, als es nöthig oder nützlich schien, um zu dem zuletzt ausgesprochenen Satze zu gelangen. Dieselben sind aber sofort einer weiteren Verallgemeinerung fähig, welche dann eine bemerkenswerthe Anwendung auf die Untersuchung der natürlichen Logarithmen gestattet.

Es seien $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ irgend welche ganze Functionen der Grössen z_i mit ganzzahligen Coefficienten. Die von einander verschiedenen Werthe, welche Z_k durch Vertauschungen der z_i annimmt, mögen mit $Z_k', Z_k'', Z_k''', \cdots$ bezeichnet werden. Dieselben sind dann Wurzeln einer irreducibeln Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten gleich Eins ist. Nach den zu Anfang von § 3. gemachten Erörterungen lassen sich auf die Grössen

$$\sum e^{Z_1}, \quad \sum e^{Z_2}, \cdots \tag{22}$$

wieder die analogen Schlüsse anwenden, wenn

$$\sum e^{Z_k} = e^{Z_k} + e^{Z_k'} + e^{Z_k''} + \cdots$$

gesetzt wird. *Es kann daher keine Relation von der Gestalt bestehen:*

$$0 = N_0 + N_1 \sum e^{Z_1} + N_2 \sum e^{Z_2} + \cdots . \tag{23}$$

Auf die Form der rechten Seite kann jede ganze Function der Grössen (22) sofort gebracht werden; also folgt als Corollar, dass *keine ganze Function der Grössen* (22), *insbesondere der Grössen* M_i *in* (21), *welche rationale Coefficienten hat, verschwinden kann.*

Uns kommt es mehr auf andere Folgerungen an. Es ergiebt sich nämlich, dass *die als unmöglich nachgewiesenen Relationen auch noch unmöglich sind, wenn man unter den N_i beliebige algebraische Irrationalzahlen versteht.* In der That, schreiben wir (23) in der Form

$$N_0 - V = 0,$$

und bezeichnen wir mit N_0', N_0'', $\cdots$, V', $V''\cdots$ die Grössen, welche aus N_0 bez. V entstehen, falls man die N_i mit allen Grössen vertauscht, die mit den N_i zusammen Wurzeln algebraischer Gleichungen mit rationalen Coefficienten sind, so würde auch die Gleichung

$$(N_0 - V)(N_0' - V')(N_0'' - V'')\cdots = 0$$

erfüllt sein müssen, wo links eine ganze Function der Zahlen (22) mit *rationalen* Coefficienten steht, also gerade wieder ein Ausdruck wie (23), von dem wir wissen, dass er nicht verschwinden kann. Insbesondere ergiebt sich: *Es kann keine ganze Function der M_i mit algebraisch irrationalen Coefficienten verschwinden*, ausgenommen (im Falle $\Sigma z_1 = 0$) eine solche Function von M_n allein.

Eine derartige Relation aber würde nach (21) erfüllt sein, wenn e^{zi} eine algebraisch irrationale Zahl wäre. Hebt man noch, wie am Schlusse von § 3., die der Gleichung (13) zunächst auferlegte Beschränkung auf, so folgt also:

Ist z eine rationale Zahl ($\gtrless 0$) oder algebraisch irrational, so ist e^z eine transscendente Zahl.

Und durch Umkehrung:

Der natürliche Logarithmus einer rationalen Zahl (die Einheit ausgenommen) oder einer algebraisch irrationalen Zahl ist stets eine transscendente Zahl.

Auch hier haben wir die Ueberlegungen specieller gefasst als nöthig wäre, da wir zunächst die ausgesprochenen speciellen Sätze im Auge hatten. Man kann indessen Alles (mit Rücksicht auf die Erörterungen zu Anfang von § 3.) in folgendem allgemeinen Theoreme zusammenfassen:

Ist eine Reihe algebraischer, von einander verschiedener Gleichungen von der Form (13) $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \cdots, f_s = 0$ *mit beliebigen ganzzahligen Coefficienten gegeben, sind dieselben sämmtlich irreducibel, und bezeichnet man mit Z_i, Z_i', Z_i'', $\cdots$ die Wurzeln der Gleichung $f_i = 0$, mit N_k beliebige rationale oder algebraisch irrationale Zahlen (die nicht sämmtlich gleich Null sind), so kann eine Gleichung der Form*

$$(24) \qquad N_0 + N_1 \sum e^{Z_1} + N_2 \sum e^{Z_2} + \cdots + N_s \sum e^{Z_s} = 0$$

nicht bestehen; es sei denn, dass eine der ganzen Functionen f_i einfach

mit z identisch ist, etwa $f_1 = z$, in welchem Falle die Gleichung (24) *möglich wird für* $N_2 = N_3 = \cdots = N_s = 0$, $N_1 = -N_0$.

Dieser Satz wiederum führt zu folgendem Resultate:

Versteht man unter den z_i beliebige rationale oder algebraisch irrationale, von einander verschiedene Zahlen, und unter den N_i ebensolche Zahlen, die nicht sämmtlich gleich Null sind, so kann keine Gleichung der Form bestehen:

$$0 = N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + N_2 e^{z_2} + \cdots + N_r e^{z_r}.$$

Bildet man nämlich das Product aller Ausdrücke, welche aus der rechten Seite dadurch entstehen, dass man die N_i auf alle Weisen unter einander vertauscht, die z_i aber mit denjenigen Grössen vertauscht, die mit ihnen zusammen Wurzeln irreducibler Gleichungen sind, so ist dieses Product eben ein Ausdruck, wie er auf der rechten Seite von (23) bez. (24) erscheint; es kann also keiner seiner Factoren verschwinden. An der paarweisen Verschiedenheit der z_i, die beim Beweise vorausgesetzt wird, muss festgehalten werden; denn wäre z. B. $z_1 = z_2$, so wäre die Relation

$$N_1 e^{z_1} + N_2 e^{z_2} = 0$$

erfüllt, sobald $N_1 = -N_2$.

Eine genauere Darlegung der hier nur angedeuteten Beweise behalte ich mir für eine spätere Veröffentlichung vor.

Freiburg i. Br., April und Juni 1882.

Anmerkung. Litteraturnachweise über die Zahl π findet man auch in Baltzer's Elementen der Mathematik (Arithmetik, § 31., Planimetrie, § 13.). Den älteren Beweisen für die Irrationalität von π^2 hat Herr Hermite einen neuen hinzugefügt: Borchardt's Journal, Bd. 76, p. 342, 1873.

Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation fünften Grades.

Von

MARTIN KRAUSE in Rostock.

Im 16ten Bande der Annalen ist gezeigt worden, wie sich unter Zugrundelegung eines bestimmten Repräsentantensystems die Constanten bestimmen lassen, die bei der Transformation fünften Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung auftreten. Zu gleicher Zeit finden sich daselbst einige Relationen zwischen den Differentialquotienten der ursprünglichen und transformirten ungeraden Thetafunctionen. Es soll nun im folgenden zunächst ein neues Repräsentantensystem eingeführt werden. Dasselbe schliesst sich näher an die Repräsentantensysteme der elliptischen Functionen an und bietet den Vorzug, dass die Argumente und die Moduln der transformirten Thetafunctionen sich einfacher durch die entsprechenden Grössen der ursprünglichen Thetafunctionen ausdrücken lassen.

Zweitens aber soll gezeigt werden, wie auf Grund der am angegebenen Orte gefundenen Resultate eine Reihe von Modulargleichungen für die Transformation fünften Grades aufgestellt werden kann.

§ 1.

Hermite führt für eine Primzahltransformation $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades als Repräsentanten die Grössen ein:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varkappa \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varkappa \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \varkappa & i & 0 & i' \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa & -i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \varkappa & 0 & i & i' \\ 0 & \varkappa & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

wobei die Zahlen i alle Werthe $0, 1, \cdots, \varkappa - 1$ durchlaufen können.

Es kann nun zunächst gezeigt werden, dass an ihrer Stelle auch die Grössen:

$$\begin{vmatrix} \varkappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \varkappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & \varkappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i' & 0 & -i & \varkappa \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i & i'' & \varkappa & 0 \\ i' & i & 0 & \varkappa \end{vmatrix}$$

als Repräsentanten eingeführt werden können.

Hierzu würde es genügen, nachzuweisen, dass ein jeder der von Hermite eingeführten Repräsentanten durch lineare Transformation aus den zuletzt aufgestellten Grössen abgeleitet werden kann. Die Art dieses Nachweises soll an einem Beispiele gezeigt, der Nachweis selbst dagegen nicht ausführlich gebracht werden.

Wenn

$$i^2 - i'i'' \equiv r \bmod. \varkappa$$

gesetzt wird und es ist r von Null verschieden, so folgt:

$$\begin{vmatrix} \varkappa & 0 & i & i' \\ 0 & \varkappa & i'' & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ j & j'' & \varkappa & 0 \\ j' & j & 0 & \varkappa \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varkappa & 0 & i & i' \\ 0 & \varkappa & i'' & i \\ -j & -j'' & c_2 & c_3 \\ -j' & -j & d_2 & d_3 \end{vmatrix},$$

wobei die zweite Determinante rechts eine lineare Transformation darstellt.

Die Grössen $j, j', j'', c_2, c_3, d_2, d_3$ sind aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \varkappa(c_2 i - c_3 i'') + j\,(i^2 - i'i'') &= i, \\ \varkappa(c_2 i' - c_3 i) + j''(i'i'' - i^2) &= i', \\ \varkappa(d_2 i' - d_3 i) + j\,(i'i'' - i^2) &= -i, \\ \varkappa(d_2 i - d_3 i'') + j'\,(i^2 - i'i'') &= -i''. \end{aligned}$$

Die Bestimmung ist eine eindeutige, wenn die Annahme hinzugefügt wird, dass die Grössen j, j', j'' positiv — die Null einbegriffen — und kleiner als $\varkappa$ sein sollen.

Wenden wir ferner die oben definirten Repräsentanten beziehungsweise die Transformationen ersten Grades an:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ai & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ai & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ai' & 0 & -ai & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ ai & ai'' & 1 & 0 \\ ai' & ai & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

wo a eine Lösung der Congruenz ist:*)

$$a\varkappa \equiv -1 \bmod. 8$$

*) Siehe Crelle 67, pag. 99.

so folgt, dass als Repräsentanten der $1 + \varkappa + \varkappa^2 + \varkappa^3$ nicht äquivalenten Classen die Grössen gewählt werden können:

$$\text{I} \quad \begin{vmatrix} \varkappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{II} \quad \begin{vmatrix} \varkappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i(a\varkappa+1) & \varkappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{III} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i(a\varkappa+1) & \varkappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i''(a\varkappa+1) & 0 & -i(a\varkappa+1) & \varkappa \end{vmatrix}$$

$$\text{IV} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ i(a\varkappa+1) & i''(a\varkappa+1) & \varkappa & 0 \\ i''(a\varkappa+1) & i(a\varkappa+1) & 0 & \varkappa \end{vmatrix}.$$

§ 2.

Wir gehen jetzt zu dem speciellen Falle $\varkappa = 5$ über. In demselben kann $a = 3$, mithin $a\varkappa + 1 = 16$ gesetzt werden. Für die auf diese Weise definirten Repräsentanten bleiben sämmtliche Gleichungen bestehen, die sich in der citirten Arbeit vorfinden.

Unter diesen heben wir die Gleichungen (7) hervor, die mit der Zahl (1) versehen werden mögen.

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{D_{04}^{(24)} - D_{24}^{(04)}}{\pi^2 \vartheta_4 \vartheta_{14} \vartheta_{24} \vartheta_5} &= \frac{0_4}{\vartheta_4} + \frac{0_{14}}{\vartheta_{14}} + \frac{0_{24}}{\vartheta_{24}} - \frac{0_5}{\vartheta_5}, \\ \frac{D_{02}^{(1)} - D_1^{(02)}}{\pi^2 \vartheta_{23} \vartheta_{03} \vartheta_4 \vartheta_{14}} &= \frac{0_{23}}{\vartheta_{23}} + \frac{0_{03}}{\vartheta_{02}} - \frac{0_4}{\vartheta_4} - \frac{0_{14}}{\vartheta_{14}}, \\ \frac{D_{13}^{(3)} - D_3^{(13)}}{\pi^2 \vartheta_{34} \vartheta_5 \vartheta_{23} \vartheta_{03}} &= \frac{0_{34}}{\vartheta_{34}} - \frac{0_5}{\vartheta_5} + \frac{0_{23}}{\vartheta_{23}} + \frac{0_{03}}{\vartheta_{03}}. \end{aligned}$$

Nennen wir nun einen beliebigen Repräsentanten $(v_0 w_1 x_2 z_3)$, verstehen ferner unter $(r_0 s_1 t_2 u_3)$ die zu ihm supplementäre Transformation, so findet stets eine Gleichung von der Form statt:

$$(r_0 s_1 t_2 u_3) = (v_0' w_1' x_2' z_3')\,(a_0 b_1 c_2 d_3),$$

wo die erste Determinante rechts ein Repräsentant ist, während die zweite eine lineare Transformation darstellt.

Wenden wir dann auf die Ausgangsgleichung, durch welche $\Pi(v_1, v_2)_5$ für die Transformation $(v_0 w_1 x_2 z_3)$ als ganze Function der Grössen $\vartheta_5(v_1, v_2)$, $\vartheta_1(v_1, v_2)$, $\vartheta_{02}(v_1, v_2)$, $\vartheta_{34}(v_1, v_2)$ dargestellt wird, links und rechts die Transformation $(r_0 s_1 t_2 u_3)$ an und ziehen die analogen Schlüsse, wie für die ursprüngliche Gleichung, so folgt, dass für den Repräsentanten $(v_0' w_1' x_2' z_3')$ die Gleichungen bestehen müssen:

$$
\begin{aligned}
&5\,\frac{D_{04}^{(24)}-D_{24}^{(04)}}{\frac{\partial 0_{04}}{\partial v_1}\frac{\partial 0_{24}}{\partial v_2}-\frac{\partial 0_{24}}{\partial v_1}\frac{\partial 0_{04}}{\partial v_2}}=\frac{\vartheta_4}{0_4}+\frac{\vartheta_{14}}{0_{14}}+\frac{\vartheta_{34}}{0_{34}}-\frac{\vartheta_5}{0_5},\\
(2)\quad &5\,\frac{-D_{02}^{(1)}-D_1^{(02)}}{\frac{\partial 0_{02}}{\partial v_1}\frac{\partial 0_1}{\partial v_2}-\frac{\partial 0_1}{\partial v_1}\frac{\partial 0_{02}}{\partial v_2}}=\frac{\vartheta_{23}}{0_{23}}+\frac{\vartheta_{03}}{0_{03}}-\frac{\vartheta_4}{0_4}-\frac{\vartheta_{14}}{0_{14}},\\
&5\,\frac{D_{13}^{(3)}-D_3^{(13)}}{\frac{\partial 0_{13}}{\partial v_1}\frac{\partial 0_3}{\partial v_2}-\frac{\partial 0_3}{\partial v_1}\frac{\partial 0_{13}}{\partial v_2}}=\frac{\vartheta_{34}}{0_{34}}-\frac{\vartheta_5}{0_5}+\frac{\vartheta_{23}}{0_{23}}+\frac{\vartheta_{03}}{0_{03}}.
\end{aligned}
$$

Nun wird für die Repräsentanten I, II, III, IV resp.

$$
\begin{aligned}
&\text{I}\quad v_1'=5v_1 &&;\ v_2'=5v_2,\\
&\text{II}\quad v_1'=5v_1 &&;\ v_2'=v_2,\\
&\text{III}\quad v_1'=v_1+16iv_2 &&;\ v_2'=5v_2,\\
&\text{IV}\quad v_1'=v_1 &&;\ v_2'=v_2.
\end{aligned}
$$

Verstehen wir daher unter g_r eine Grösse, die für die Repräsentanten I, II, III, IV — oder was dasselbe sagen soll für $r=1,2,3,4$ — resp. gleich 5, 1, 1, $\frac{1}{5}$ wird, so folgt ganz allgemein die Gleichung:

$$
\frac{\partial 0_\alpha}{\partial v_1}\frac{\partial 0_\beta}{\partial v_2}-\frac{\partial 0_\beta}{\partial v_1}\frac{\partial 0_\alpha}{\partial v_2}=5g_r\left[0'_\alpha(v_1')\,0'_\beta(v_2')-0'_\beta(v_1')\,0'_\alpha(v_2')\right].
$$

Die Klammer auf der rechten Seite kann nach bekannten Formeln durch die transformirten Thetafunctionen ausgedrückt werden.

Setzen wir diese Werthe in das Gleichungssystem (2) ein, so ergeben sich durch Vergleichung mit (1) für die verschiedenen Arten von Repräsentanten die Relationen:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{0_4}{\vartheta_4}+\frac{0_{14}}{\vartheta_{14}}+\frac{0_{34}}{\vartheta_{34}}-\frac{0_5}{\vartheta_5}\right)\vartheta_4\,\vartheta_{14}\,\vartheta_{34}\,\vartheta_5\\
&=g_r\left(\frac{\vartheta_4}{0_4}+\frac{\vartheta_{14}}{0_{14}}+\frac{\vartheta_{34}}{0_{34}}-\frac{\vartheta_5}{0_5}\right)0_4\,0_{14}\,0_{34}\,0_5,\\
&-\left(\frac{0_{23}}{\vartheta_{23}}+\frac{0_{03}}{\vartheta_{03}}-\frac{0_4}{\vartheta_4}-\frac{0_{14}}{\vartheta_{14}}\right)\vartheta_{23}\,\vartheta_{03}\,\vartheta_4\,\vartheta_{14}\\
(3)\qquad &=g_r\left(\frac{\vartheta_{23}}{0_{23}}+\frac{\vartheta_{03}}{0_{03}}-\frac{\vartheta_4}{0_4}-\frac{\vartheta_{14}}{0_{14}}\right)0_{23}\,0_{03}\,0_4\,0_{14},\\
&\left(\frac{0_{34}}{\vartheta_{34}}-\frac{0_5}{\vartheta_5}+\frac{0_{23}}{\vartheta_{23}}+\frac{0_{03}}{\vartheta_{03}}\right)\vartheta_{34}\,\vartheta_5\,\vartheta_{23}\,\vartheta_{03}\\
&=g_r\left(\frac{\vartheta_{34}}{0_{34}}-\frac{\vartheta_5}{0_5}+\frac{\vartheta_{23}}{0_{23}}+\frac{\vartheta_{03}}{0_{03}}\right)0_{34}\,0_5\,0_{23}\,0_{03}.
\end{aligned}
$$

Mithin folgen für alle Repräsentanten die Modulargleichungen:

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_{34}\vartheta_5 + \vartheta_{14}\vartheta_4\vartheta_{34}\vartheta_5 + \vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_5 - \vartheta_5\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_{34}}{\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_{34}\vartheta_5 + \vartheta_{14}\vartheta_4\vartheta_{34}\vartheta_5 + \vartheta_{34}\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_5 - \vartheta_5\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_{34}} \\ &= -\frac{\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_4\vartheta_{14} + \vartheta_{03}\vartheta_{23}\vartheta_4\vartheta_{14} - \vartheta_4\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_{14} - \vartheta_{14}\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_4}{\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_4\vartheta_{14} + \vartheta_{03}\vartheta_{23}\vartheta_4\vartheta_{14} - \vartheta_4\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_{14} - \vartheta_{14}\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_4} \\ &= \frac{\vartheta_{34}\vartheta_5\vartheta_{23}\vartheta_{03} - \vartheta_5\vartheta_{34}\vartheta_{23}\vartheta_{03} + \vartheta_{23}\vartheta_{34}\vartheta_5\vartheta_{03} + \vartheta_{03}\vartheta_{34}\vartheta_5\vartheta_{23}}{\vartheta_{34}\vartheta_5\vartheta_{23}\vartheta_{03} - \vartheta_5\vartheta_{34}\vartheta_{23}\vartheta_{03} + \vartheta_{23}\vartheta_{34}\vartheta_5\vartheta_{03} + \vartheta_{03}\vartheta_{34}\vartheta_5\vartheta_{23}}. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen:

$$(5)\quad \begin{aligned} &\frac{D_{04}^{(24)} - D_{24}^{(04)}}{\vartheta_4\vartheta_{14}\vartheta_{34}\vartheta_5} + \frac{D_{02}^{(1)} + D_1^{(02)}}{\vartheta_{23}\vartheta_{03}\vartheta_4\vartheta_{14}} + \frac{D_3^{(13)} - D_{13}^{(3)}}{\vartheta_{34}\vartheta_5\vartheta_{23}\vartheta_{03}} = 0, \\ &\frac{D_{04}^{(24)} - D_{24}^{(04)}}{0_4 0_{14} 0_{34} 0_5} - \frac{D_{02}^{(1)} + D_1^{(02)}}{0_{23} 0_{03} 0_4 0_{14}} + \frac{D_3^{(13)} - D_{13}^{(3)}}{0_{34} 0_5 0_{23} 0_{03}} = 0 \end{aligned}$$

die für alle Repräsentanten gelten und aus den Gleichungen (1) und (2) unmittelbar herzuleiten sind, folgen unter Zuhülfenahme der Gleichungen (1) und (2) andere Formen der Modulargleichungen, die aber nicht so symmetrisch sind, wie die vorstehenden. Aus diesem Grunde möge von ihrer Aufstellung abgesehen werden.

§ 3.

Durch lineare Transformation folgen aus den aufgestellten Gleichungssystemen vierzehn weitere Systeme. Dieselben entstehen aus denselben durch einen Wechsel der Zeichen und der Indices. Wir können diese Vertauschungen durch folgende Tabelle anschaulich machen:

5, 34;	03, 23;	4, 14.	2, — 23;	5, — 12; 14, 01.
12, — 2;	5, — 23;	03, 34.	5, 01;	03, 0; 12, 14.
5, 03;	0, 01;	34, 23.	12, — 23;	5, — 2; 0, 4.
12, — 01;	5, — 14;	4, 34.	03, — 01;	5, — 0; 2, 4.
5, 4;	0, 2;	34, 14.	23, 14;	— 2, 01; — 03, 4.
	03, 14;	— 0,	12; — 23,	4.
	0, 34;	23, — 01;	14,	— 2.
	0, 23;	12, — 4;	34,	— 01.
	34, 2;	12, — 03;	0,	— 14.
	12, 34;	4, — 01;	03,	— 2.

Aus den Relationen, die in der citirten Arbeit angegeben sind, können noch andere Modulargleichungen abgeleitet werden. Dieselben haben nicht die einfache Form, wie die hier angeführten. Unter solchen Umständen sieht der Verfasser von ihrer Aufstellung ab.

Rostock, den 27. März 1882.

Ueber cyklisch-projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen.

Von

H. Schroeter in Breslau.

In der Untersuchung von Herrn J. Lüroth: „Ueber cyklisch-projective Punktgruppen in der Ebene und im Raume“ (Math. Annalen Bd. XIII, S. 305) wird der Fall ausgeschlossen, dass im Raume die Anzahl der Punkte einer Gruppe $n < 6$ sei. Es scheint mir aber der Fall $n = 4$ von besonderem Interesse zu sein, weil die dabei auftretenden räumlichen Configurationen eine gewisse Analogie darbieten mit bekannten Figuren in der Ebene. Da sich in jüngster Zeit die Aufmerksamkeit einiger Geometer auf jene räumliche Figur gelenkt hat, so erlaube ich mir, meine älteren Untersuchungen, deren Resultate ich bei Gelegenheit der Breslauer Naturforscher-Versammlung im Septemer 1874 mitgetheilt habe, hier im Zusammenhange darzustellen und eine allgemeine, übrigens wohl bekannte, Construction zweier collinearen Räume vorauszuschicken, welche etwas abweichend von der Reye'schen (Geometrie der Lage II. Abth. S. 19) sich mehr an an die Moebius'sche (Barycentrischer Kalkul S. 329) anschliesst.

1. Nehmen wir zur Bestimmung zweier collinearen Räume R und R_1 fünf Punkte

$$a \quad b \quad c \quad d \quad e$$

des ersteren willkürlich an, doch so, dass keine vier derselben in einer Ebene liegen und lassen denselben im anderen Raume R_1 fünf beliebige Punkte

$$a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad d_1 \quad e_1,$$

von denen ebenfalls keine vier in einer Ebene liegen, entsprechen, dann ist die collineare Beziehung der beiden Räume R und R_1 durch diese fünf Paare entsprechender Punkte vollständig und eindeutig bestimmt, und man kann jetzt zu jedem Punkte x des Raumes R den entsprechenden Punkt x_1 des Raumes R_1 auf folgende Weise construiren:

Man wähle die drei Geraden:

$$|ab| \quad |ac| \quad bc|$$

zu Axen dreier Ebenenbüschel im Raume R und

$$|a_1 b_1| \quad |a_1 c_1| \quad |b_1 c_1|$$

zu Axen dreier Ebenenbüschel im Raume R_1, und stelle drei projective Beziehungen her zwischen den

beiden Ebenenbüscheln, deren Axen $|ab|$ und $|a_1 b_1|$ sind, den
„ „ „ „ $|ac|$ und $|a_1 c_1|$ „ , „
„ „ „ „ $|bc|$ und $|b_1 c_1|$ „ ;

diese projectiven Beziehungen sind jedesmal durch drei Paare entsprechend angenommener Ebenen fixirt; als entsprechende Ebenen in den beiden ersten Büscheln wähle man:

$$[abc] \text{ und } [a_1 b_1 c_1]$$
$$[abd] \text{ und } [a_1 b_1 d_1]$$
$$[abe] \text{ und } [a_1 b_1 e_1]$$

als entsprechende Ebenen in den beiden andern Büscheln:

$$[acb] \text{ und } [a_1 c_1 b_1]$$
$$[acd] \text{ und } [a_1 c_1 d_1]$$
$$[ace] \text{ und } [a_1 c_1 e_1]$$

und endlich als entsprechende Ebenen in dem dritten Paar von Büscheln:

$$[bca] \text{ und } [b_1 c_1 a_1]$$
$$[bcd] \text{ und } [b_1 c_1 d_1]$$
$$[bce] \text{ und } [b_1 c_1 e_1].$$

Dadurch sind die drei Projectivitäten vollständig und eindeutig bestimmt, und das Ebenenpaar $[abc]$ und $[a_1 b_1 c_1]$ ist allen drei Projectivitäten gemeinschaftlich. Um nun zu einem beliebigen Punkte x des Raumes R den entsprechenden x_1 des Raumes R_1 zu construiren, bestimme man in den drei Paaren projectiver Ebenenbüschel die entsprechenden Elemente:

$$|ab|\,(cdex) \barwedge |a_1 b_1|\,(c_1 d_1 e_1 x_1)$$
$$|ac|\,(bdex) \barwedge |a_1 c_1|\,(b_1 d_1 e_1 x_1)$$
$$|bc|\,(adex) \barwedge |b_1 c_1|\,(a_1 d_1 e_1 x_1);$$

ist mithin x gegeben, so sind durch diese Projectivitäten die drei Ebenen $[a_1 b_1 x_1]$ $[a_1 c_1 x_1]$ $[b_1 c_1 x_1]$ zu construiren, also ihr Schnittpunkt x_1 ist gefunden.

Durch diese Construction kann zu jedem Punkte x des Raumes R der entsprechende x_1 des Raumes R_1 gefunden werden mit Ausnahme der Punkte, die in der Ebene $[abc]$ liegen und denen die Punkte in der Ebene $[a_1 b_1 c_1]$ entsprechen müssen; diese beiden Ebenen sind aber

die Träger zweier collinearen Felder, und zur collinearen Beziehung derselben haben wir bereits die drei Paare entsprechender Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$; setzen wir noch fest, dass dem Schnittpunkte

$$([\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}], |\mathfrak{b}\mathfrak{c}|) \text{ der Punkt } ([\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1], |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|)$$

entsprechen soll, so haben wir ein viertes Paar entsprechender Punkte, und durch diese vier Paare ist die collineare Beziehung der beiden Felder vollständig und eindeutig bestimmt*), so dass nun auch zu jedem Punkte $\mathfrak{x}$ der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]$ der entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ der Ebene $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1]$ in bekannter Weise construirt werden kann.

Aus dieser Construction entsprechender Punkte der beiden collinearen Räume R und R_1 geht unmittelbar hervor, dass, wenn $\mathfrak{x}$ eine Punktreihe auf einer Geraden g durchläuft, der entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_1$ eine projective Punktreihe auf einer Geraden g_1 durchlaufen muss. Denn sobald $\mathfrak{x}$ auf der Geraden g sich bewegt, beschreiben die beiden Ebenen $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}]$ und $[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{x}]$ zwei projective Büschel, folglich auch die beiden ihnen entsprechenden Ebenen $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{x}_1]$ und $[\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{x}_1]$, welche bez. mit jenen beiden, also auch unter einander projectiv sind; diese beiden projectiven Ebenenbüschel, deren Axen sich in $\mathfrak{a}_1$ treffen, haben in der Verbindungsebene ihrer Axen zwei entsprechende Ebenen vereinigt, mithin liegen ihre Schnittlinien in einer Ebene (da die Büschel perspective Lage haben); der Punkt $\mathfrak{x}_1$ bewegt sich also in einer festen Ebene. Da ferner in gleicher Weise die Ebenen $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}]$ und $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}]$ zwei projective Ebenenbüschel beschreiben, so liegt $\mathfrak{x}_1$ noch in einer zweiten festen Ebene, mithin auf einer Geraden g_1, auf welcher er, wie ersichtlich ist, eine mit der von $\mathfrak{x}$ beschriebenen projective Punktreihe durchläuft.

Es entspricht also einer Geraden g in dem Raume R eine Gerade g_1 in dem Raume R_1; nehmen wir zwei Gerade g und h, die sich in $\mathfrak{x}$ begegnen, so entsprechen ihnen zwei Gerade g_1 und h_1, die sich in $\mathfrak{x}_1$ treffen müssen, also in einer Ebene liegen. Es entspricht daher jeder Geraden, die in der Ebene $[gh] = \xi$ liegt, wieder eine Gerade, die in der Ebene $[g_1h_1] = \xi_1$ liegen muss; die Ebenen ξ und ξ_1 sind daher einander entsprechende Elemente der beiden collinearen Räume und, wie unmittelbar aus der Construction folgt, die Träger zweier collinearen Felder rücksichtlich ihrer Punkte oder Strahlen; der Geraden g als Axe eines Ebenenbüschels entspricht die Gerade g_1 als Axe eines projectiven Ebenenbüschels, den Geraden einer Regelschaar die Geraden einer mit jener projectiven Regelschaar u. s. w., wie es die Natur der beiden collinearen Räume erheischt.

(Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass sich in durchaus analoger Weise die Construction zweier in reciproker Verwandtschaft

*) Siehe H. Schroeter, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumcurven dritter Ordnung, Leipzig 1880, Seite 346.

stehender Räume bewerkstelligen lässt, bei denen ungleichartige Elemente, Punkt und Ebene, u. s. w. einander entsprechen.)

Da zwei Räume R und R_1 als einander durchdringend angesehen werden müssen, indem beide nur denselben dreifach ausgedehnten unendlichen Raum erfüllen, so bietet sich sogleich die Hauptaufgabe dar, die *Doppelelemente* der beiden collinearen Räume R und R_1 zu finden und zwar zunächst solche Punkte des Raumes R, die mit ihren entsprechenden des Raumes R_1 zusammenfallen d. h. incident sind.

Drehen wir um $|ab|$ eine veränderliche Ebene ξ, so wird die entsprechende Ebene ξ_1 sich um $|a_1 b_1|$ drehen, und die beiden von ξ und ξ_1 beschriebenen Ebenenbüschel werden projectiv sein, also die Schnittlinie $|\xi\xi_1|$ wird eine Regelschaar eines Hyperboloides $H_1^{(2)}$ durchlaufen, welcher die Erzeugende $|[abc], [a_1 b_1 c_1]| = s$ angehört. Drehen wir in gleicher Weise um $|ac|$ eine veränderliche Ebene η, deren entsprechende η_1 sich um $|a_1 c_1|$ dreht und ein projectivisches Ebenenbüschel beschreibt, so wird $|\eta\eta_1|$ eine Regelschaar eines zweiten Hyperboloids $H_2^{(2)}$ durchlaufen, welcher ebenfalls s als Erzeugende angehört. Die beiden Hyperboloide $H_1^{(2)}$ und $H_2^{(2)}$, welche die Erzeugende s gemeinschaftlich haben, schneiden sich daher in einer Raumcurve dritter Ordnung $C_{12}^{(3)}$, für welche s eine Secante ist.

Drehen wir endlich um $|bc|$ eine dritte Ebene ζ, deren entsprechende ζ_1 sich um $|b_1 c_1|$ drehen und ein mit dem von ζ beschriebenen projectives Ebenenbüschel beschreibt, so durchläuft $|\zeta\zeta_1|$ eine Regelschaar eines dritten Hyperboloids $H_3^{(2)}$, welcher ebenfalls s angehört. Die beiden Hyperboloide $H_1^{(2)}$ und $H_3^{(2)}$ schneiden sich daher ausser in s noch in einer Raumcurve dritter Ordnung $C_{13}^{(3)}$, für welche s Secante ist. Wir haben nun auf dem Hyperboloid $H_1^{(2)}$ zwei Raumcurven $C_{12}^{(3)}$ und $C_{13}^{(3)}$, die beide derjenigen Regelschaar von $H_1^{(2)}$, welcher s angehört in je zwei Punkten begegnen, folglich haben die beiden Raumcurven $C_{12}^{(3)}$ und $C_{13}^{(3)}$ im Allgemeinen *vier* Punkte gemeinschaftlich (a. o. a. O. S. 249), die auch imaginär sein können. Jeder solche Punkt muss die Eigenschaft besitzen, dass durch ihn 6 Ebenen $\xi\eta\zeta\ \xi_1\eta_1\zeta_1$ gehen, folglich muss er ein sich selbst entsprechender Punkt der beiden collinearen Räume sein. Durch diese vier Punkte muss natürlich auch die Raumcurve $C_{23}^{(3)}$, die Schnittcurve der beiden Hyperboloide $H_2^{(2)}$ und $H_3^{(2)}$, welche s zur gemeinsamen Erzeugenden haben, hindurchgehen.

Wir haben also gesehen, dass zwei collineare Räume R und R_1 im Allgemeinen *vier Doppelpunkte* haben und wie dieselben gefunden werden können. Sind alle vier Doppelpunkte reell, so sind die vier Ebenen, welche je drei von ihnen verbinden, Doppelebenen der beiden

collinearen Räume (d. h. solche Ebenen, die sich selbst entsprechen) und die sechs Geraden, welche je zwei von ihnen verbinden, Doppelgerade der beiden collinearen Räume.

Durch diese vier Doppelpunkte der beiden collinearen Räume gehen offenbar alle Hyperboloide, welche von irgend zwei entsprechenden Ebenenbüscheln erzeugt werden. Jede Schnittlinie zweier entsprechenden Ebenen ist aber gleichzeitig Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte der collinearen Räume; denn wird die Schnittlinie $|\xi\xi_1| = s = t_1$ als im Raume R und im Raume R_1 liegend aufgefasst, so entspricht ihr s_1 im Raume R_1 und t im Raume R; da aber s in der Ebene ξ liegt, so muss s_1 in der Ebene ξ_1 liegen, also t_1 treffen und ebenso muss t die Gerade s treffen; es entsprechen sich also die Punkte (st) und $(s_1 t_1)$, deren Verbindungslinie die Gerade $s = t_1$ ist.

Alle Hyperboloide, welche von irgend zwei entsprechenden Punktreihen der beiden collinearen Räume erzeugt werden, fallen daher mit den vorhin aufgefassten Hyperboloiden zusammen.

Nachdem diese allgemeinen Betrachtungen vorausgeschickt sind, gehen wir nun dazu über, zwei collineare Räume herzustellen durch besondere Annahme von Elementenpaaren, welche die collineare Beziehung bestimmen.

2. Nehmen wir vier Punkte im Raume an, die nicht in einer Ebene liegen und bezeichnen dieselben in doppelter Weise folgendermassen:

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1, \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{d}_1, \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{a}_1,$$

so können wir die vier Punktepaare:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1, \quad \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1, \quad \mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$$

als entsprechende Punkte zweier collinearen Räume auffassen und ein beliebiges fünftes Paar:

$$\mathfrak{y} \text{ und } \mathfrak{y}_1,$$

(die mit keinen drei der früheren Punkte in einer Ebene liegen) hinzufügen; durch diese fünf Punktepaare ist alsdann die collineare Beziehung der Räume R und R_1 vollständig und eindeutig bestimmt, und die obige Construction verstattet uns, beliebig viele andere Paare entsprechender Punkte herzustellen.

Benennen wir zunächst den Punkt

$$\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}$$

und construiren den dem Punkt $\mathfrak{x}$ entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}_1$, so gilt die Projectivität:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\,(\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{y}\mathfrak{x}) \barwedge |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|\,(\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1)$$

oder wegen der obigen Identitäten:

$$\barwedge |\mathfrak{d}\mathfrak{a}|\,(\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1);$$

es folgt also:

$$|\mathfrak{ab}|\,(\mathfrak{bcxy}) \barwedge |\mathfrak{da}|\,(\mathfrak{bcxx}_1),$$

und da die Axen der beiden projectiven Büschel sich im Punkte $\mathfrak{a}$ treffen, die Verbindungsebene ihrer Axen $[\mathfrak{abb}]$ ferner zwei entsprechende Ebenen der Büschel vereinigt, haben die beiden Büschel perspective Lage; es müssen daher die drei Geraden:

$$|[\mathfrak{abc}],\ [\mathfrak{abc}]| = |\mathfrak{ac}|$$
$$|[\mathfrak{abx}],\ [\mathfrak{abx}]| = |\mathfrak{ax}|$$
$$|[\mathfrak{aby}],\ [\mathfrak{abx}_1]|$$

in einer Ebene liegen, oder was dasselbe sagt, die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{acx}]\quad [\mathfrak{aby}]\quad [\mathfrak{abx}_1]$$

müssen sich in einer durch $\mathfrak{a}$ gehenden Geraden schneiden; nun sind aber die beiden ersten Ebenen gegeben, also auch ihre Schnittlinie:

$$|[\mathfrak{acx}]\quad [\mathfrak{aby}]| = d.$$

Die Ebene $[\mathfrak{b}d]$ muss daher durch den gesuchten Punkt $\mathfrak{x}_1$ gehen. In gleicher Weise finden wir zur Bestimmung von $\mathfrak{x}_1$ eine zweite Bedingung durch die Projectivität:

$$|\mathfrak{bc}|\,(\mathfrak{bayx}) \barwedge |\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1|\,(\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{x}_1)$$
$$\barwedge |\,\mathfrak{ab}\,|\,(\mathfrak{cbxx}_1)$$
$$|\mathfrak{bc}|\,(\mathfrak{abxy}) \barwedge |\,\mathfrak{ab}\,|\,(\mathfrak{cbxx}_1),$$

woraus in gleicher Weise folgt, dass die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{bbx}]\quad [\mathfrak{bcy}]\quad [\mathfrak{bax}_1]$$

sich in einer durch $\mathfrak{b}$ gehenden Geraden schneiden müssen.

Die beiden ersten Ebenen sind wiederum bekannt, also auch ihre Schnittlinie:

$$|[\mathfrak{bbx}],\ [\mathfrak{bcy}]| = a$$

die Ebene $[\mathfrak{a}a]$ muss daher durch den gesuchten Punkt $\mathfrak{x}_1$ gehen. Wenn wir in dieser Weise fortfahren, so brauchen wir nur die Buchstaben $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{b}$ cyklisch fortzusetzen und erhalten dadurch schon vier Ebenen in welchen $\mathfrak{x}_1$ liegen muss, also mehr als zu seiner Bestimmung nothwendig ist. Wir erhalten nämlich die vier Geraden:

$$|[\mathfrak{bbx}],\ [\mathfrak{bcy}]| = a$$
$$|[\mathfrak{cax}],\ [\mathfrak{cby}]| = b$$
$$|[\mathfrak{bbx}],\ [\mathfrak{bay}]| = c$$
$$|[\mathfrak{acx}],\ [\mathfrak{aby}]| = d$$

und die vier Ebenen $[\mathfrak{a}a]$ $[\mathfrak{b}b]$ $[\mathfrak{c}c]$ $[\mathfrak{b}d]$, welche sich in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{x}_1$ treffen müssen.

Wir haben hierdurch beiläufig folgenden elementar-stereometrischen Satz gefunden:

Hat man irgend sechs Punkte im Raume

$$a\ b\ c\ b\ x\ y$$

von denen keine vier in einer Ebene liegen, und bestimmt man die Schnittlinien der Ebenen:

$$\begin{aligned} |[bbx],\ [bcy]| &= a \\ |[cax],\ [cby]| &= b \\ |[bbx],\ [bay]| &= c \\ |[acx],\ [aby]| &= d, \end{aligned}$$

so schneiden sich die vier Ebenen:

$$[aa]\quad [bb]\quad [cc]\quad [bd]$$

in einem Punkte.

Wir können aber noch andere Bedingungen zur Bestimmung des Punktes x_1 aufstellen; es findet nämlich wegen der collinearen Beziehung auch die Projectivität statt:

$$\begin{aligned} |ac|\,(bbyx) &\barwedge |a_1c_1|\,(b_1b_1y_1x_1) \\ &\barwedge |\,bb\,|\,(a\,c\,x\,x_1) \\ |ac|\,(bbxy) &\barwedge |\,bb\,|\,(a\,c\,x\,x_1); \end{aligned}$$

folglich haben die vier Schnittlinien entsprechender Ebenen dieser beiden projectiven Büschel hyperboloidische Lage (oder gehören einer Regelschaar an); diese vier Geraden sind:

$$|ab|\quad |bc|\quad |[acx],\ [bbx]|\quad |[acy],\ [bbx_1]|$$

und da der Punkt x auf der dritten dieser Geraden liegt, so muss der durch x gezogene Strahl, welcher den beiden ersten gleichzeitig begegnet, auch der vierten begegnen, d. h. die beiden Geraden:

$$|[abx],\ [bcx]| \text{ und } |[acy],\ [bbx_1]|$$

müssen sich begegnen, folglich die vier Ebenen:

$$[abx]\quad [bcx]\quad [acy]\quad [bbx_1]$$

durch einen und denselben Punkt gehen; derselbe ist bereits bestimmt durch die drei ersten Ebenen, welche bekannt sind; verbinden wir ihn mit bb, so erhalten wir eine neue Ebene, welche den gesuchten Punkt x_1 enthalten muss.

Wir haben endlich noch eine letzte Projectivität zur Bestimmung von x_1, nämlich:

$$\begin{aligned} |bb|\,(acyx) &\barwedge |b_1b_1|\,(a_1c_1y_1x_1) \\ &\barwedge |\,ac\,|\,(b\,b\,x\,x_1) \\ |bb|\,(caxy) &\barwedge |\,ac\,|\,(b\,b\,x\,x_1) \end{aligned}$$

woraus folgt, dass die vier Geraden:

$$|cb|\quad |ab|\quad |[bbx],\ [acx]|\quad |[bby],\ [acx_1]|$$

einer Regelschaar angehören und daher die beiden Geraden:

$$|[c\mathfrak{d}\mathfrak{x}],\ [a\mathfrak{b}\mathfrak{x}]|\quad|[\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{y}],\ [a c \mathfrak{x}_1]|$$

sich begegnen, d. h. die vier Ebenen:

$$[c\mathfrak{d}\mathfrak{x}]\quad[a\mathfrak{b}\mathfrak{x}]\quad[\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{y}]\quad[a c \mathfrak{x}_1]$$

durch einen und denselben Punkt gehen; dieser ist bereits bestimmt durch die drei ersten Ebenen, verbinden wir ihn mit $|a c|$, so erhalten wir eine neue Ebene, welche den gesuchten Punkt $\mathfrak{x}_1$ enthalten muss. Es kommen demgemäss zu den früheren vier Ebenen noch zwei neue, im Ganzen sechs Ebenen, welche den gesuchten Punkt $\mathfrak{x}_1$ enthalten, und von denen drei schon zu seiner Bestimmung ausreichen.

Wir können nunmehr in ähnlicher Weise den Punkt $\mathfrak{y}$ gleichzeitig als dem Raume R_1 angehörig bezeichnen:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{z}_1$$

und den ihm entsprechenden Punkt $\mathfrak{z}$ des Raumes R aufsuchen; auch für diesen werden wir sechs Bedingungen ermitteln, von denen drei zu seiner Bestimmung ausreichen. Aus den Projectivitäten:

$$|a_1 \mathfrak{b}_1|\,(c_1 \mathfrak{d}_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{z}_1) \barwedge |a\mathfrak{b}|\,(c\mathfrak{d}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$$

oder

$$|\mathfrak{d}a|\,(\mathfrak{b}c\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \barwedge |a\mathfrak{b}|\,(\mathfrak{d}c\mathfrak{z}\mathfrak{y})$$

folgt, dass die drei Ebenen:

$$[ac\mathfrak{y}]\quad[a\mathfrak{b}\mathfrak{x}]\quad[a\mathfrak{b}\mathfrak{z}]$$

sich in einer durch a gehenden Geraden schneiden und in gleicher Weise

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{y}]\quad[\mathfrak{b}a\mathfrak{x}]\quad[\mathfrak{b}c\mathfrak{z}]$$

in einer durch $\mathfrak{b}$ gehenden Geraden, ferner

$$[ca\mathfrak{y}]\quad[c\mathfrak{b}\mathfrak{x}]\quad[c\mathfrak{d}\mathfrak{z}]$$

in einer durch c gehenden Geraden und endlich

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{y}]\quad[\mathfrak{d}c\mathfrak{x}]\quad[\mathfrak{d}a\mathfrak{z}]$$

in einer durch $\mathfrak{d}$ gehenden Geraden; bezeichnen wir daher die vier Schnittlinien:

$$|[\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{x}],\ [\mathfrak{b}c\mathfrak{x}]| = a'$$
$$|[ac\mathfrak{y}],\ [a\mathfrak{b}\mathfrak{x}]| = b'$$
$$|[\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{y}],\ [\mathfrak{b}a\mathfrak{x}]| = c'$$
$$|[ca\mathfrak{y}],\ [c\mathfrak{b}\mathfrak{x}]| = d'$$

so schneiden sich die vier Ebenen:

$$[aa']\quad[\mathfrak{b}b']\quad[cc']\quad[\mathfrak{d}d']$$

in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{z}$, wodurch dieser schon mehr als bestimmt wird.

Indessen können wir zur Bestimmung des Punktes $\mathfrak{z}$ noch zwei weitere Bedingungen angeben. Es gilt die Projectivität:

$$|a_1 c_1|\,(b_1 b_1 \mathfrak{y}_1 \mathfrak{z}_1) \curlywedge |ac|\,(bb\mathfrak{y}\mathfrak{z})$$

oder

$$|bb|\,(ac\mathfrak{x}\mathfrak{y}) \curlywedge |ac|\,(bb\mathfrak{z}\mathfrak{y})$$

woraus folgt, dass die vier Geraden:

$$|ab| \quad |bc| \quad |[bb\mathfrak{y}],\,[ac\mathfrak{y}]| \quad |[bb\mathfrak{x}],\,[ac\mathfrak{z}]|$$

einer Regelschaar angehören, also die vier Ebenen:

$$[ab\mathfrak{y}] \quad [bc\mathfrak{y}] \quad [bb\mathfrak{x}] \quad [ac\mathfrak{z}]$$

durch einen und denselben Punkt gehen; dieser ist durch die drei ersten bekannten Ebenen bereits bestimmt; verbinden wir ihn mit $|ac|$, so erhalten wir eine neue durch $\mathfrak{z}$ gehende Ebene. In gleicher Weise erkennen wir endlich, dass die vier Ebenen:

$$[ba\mathfrak{y}] \quad [cb\mathfrak{y}] \quad [ac\mathfrak{x}] \quad [bb\mathfrak{z}]$$

durch einen Punkt gehen müssen, welcher durch die drei ersten Ebenen schon bestimmt wird und mit $|bb|$ verbunden eine neue durch $\mathfrak{z}$ gehende Ebene liefert.

Nachdem wir auf diese Weise die den gegebenen Punkten

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{z}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}$$

entsprechenden Punkte $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{x}_1$ ermittelt haben, wollen wir weiter den dem Punkte

$$\mathfrak{z} = t_1$$

entsprechenden Punkt t construiren. Zu diesem Zwecke erinnern wir uns, dass die vorigen drei Ebenen:

$$[ac\mathfrak{y}] \quad [ab\mathfrak{x}] \quad [ab\mathfrak{z}]$$

sich in einer durch a gehenden Geraden schnitten, also, wenn wir die Buchstaben durch die mit ihnen identischen gestrichenen ersetzen:

$$[b_1 b_1 \mathfrak{z}_1] \quad [b_1 a_1 \mathfrak{y}_1] \quad [b_1 c_1 t_1]$$

sich in einer durch b_1 gehenden Geraden schneiden, mithin die ihnen collinear entsprechenden

$$[bb\mathfrak{z}] \quad [ba\mathfrak{y}] \quad [bct]$$

sich in einer durch b gehenden Geraden schneiden müssen. In gleicher Weise erhalten wir noch drei andere Bedingungen zur Bestimmung von t, also im Ganzen folgende vier:

$[bb\mathfrak{z}]$	$[ba\mathfrak{y}]$	$[bct]$	schneiden sich in einer durch					b	gehenden Geraden
$[ca\mathfrak{z}]$	$[cb\mathfrak{y}]$	$[cbt]$	„	„	„	„	„	c	„ „
$[bb\mathfrak{z}]$	$[bc\mathfrak{y}]$	$[bat]$	„	„	„	„	„	b	„ „
$[ac\mathfrak{z}]$	$[ab\mathfrak{y}]$	$[abt]$	„	„	„	„	„	a	„ „

Nun haben wir aber andererseits gesehen, dass die vier Ebenen:

$$[bb\mathfrak{z}] \quad [ba\mathfrak{y}] \quad [cb\mathfrak{y}] \quad [ac\mathfrak{x}]$$

durch einen Punkt gehen, woraus folgt, dass die Ebene $[bct]$ auch

durch diesen Punkt gehen muss, welcher von c verschieden ist. Da nun die drei Ebenen

$$[c\mathfrak{b}\mathfrak{y}] \quad [c\mathfrak{a}\mathfrak{x}] \quad [c\mathfrak{b}\mathfrak{t}]$$

durch den eben genannten Punkt gehen und ausserdem einen zweiten Punkt c gemeinschaftlich haben, so gehen sie durch eine und dieselbe Gerade. Wir haben also gefunden, dass die Ebenen:

$[c\mathfrak{b}\mathfrak{y}]$ $[c\mathfrak{a}\mathfrak{x}]$ $[c\mathfrak{b}\mathfrak{t}]$ sich in einer durch c gehenden Geraden schneiden
$[\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{y}]$ $[\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{x}]$ $[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{t}]$ „ „ „ „ $\mathfrak{b}$ „ „ „
$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{y}]$ $[\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{x}]$ $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{t}]$ „ „ „ „ $\mathfrak{a}$ „ „ „
$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{y}]$ $[\mathfrak{b}\mathfrak{b}\mathfrak{x}]$ $[\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{t}]$ „ „ „ „ $\mathfrak{b}$ „ „ „ „,

wodurch der Punkt t mehr als bestimmt ist.

Vergleichen wir aber diese Bedingungen, welche den Punkt t bestimmen mit den anfänglichen, welche zur Bestimmung des Punktes $\mathfrak{x}_1$ dienten, so erkennen wir, dass sie mit ihnen identisch sind, folglich coincidirt der Punkt t mit $\mathfrak{x}_1$ und wir haben

$$t = \mathfrak{x}_1.$$

Nunmehr stellt sich ein dem ursprünglich angenommenen gleichbedeutendes Quadrupel heraus:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1 \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{z}_1 \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{t}_1 \quad \mathfrak{t} = \mathfrak{x}_1,$$

dessen Ecken ebenfalls aus vier Paaren entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{t}\mathfrak{t}_1$ der beiden collinearen Räume bestehen, die in cyklischer Weise einander folgend incident sind.

Wir schliessen hieraus, weil das zur Bestimmung der collinearen Beziehung gewählte fünfte Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ ein durchaus willkürliches war, folgendes Resultat:

Wenn zwei collineare Räume derart liegen, dass einmal von den vier Paaren entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ *die Punkte*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}_1 \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1 \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{d}_1 \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{a}_1$$

incident sind, so ist dies immer der Fall d. h. wenn man mit einem beliebigen Punkte in beiderlei Sinn der collinearen Beziehung aufgefasst

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$$

beginnt, den entsprechenden $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}_1$, *den zu* $\mathfrak{z}_1$ *entsprechenden* $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}_1$ *und den zu* $\mathfrak{t}_1$ *entsprechenden* t *ermittelt, so coincidirt dieser mit* $\mathfrak{x}_1$, *d. h.* $t = \mathfrak{x}_1$.

Dass in ähnlicher Weise der allgemein gültige Satz erwiesen werden kann, soll hier nur beiläufig bemerkt werden.

3. Nennen wir zur Abkürzung zwei in dieser besonderen Lage befindliche collineare Räume in „Quadrupellage", so zeigen zwei beliebig herausgenommene Quadrupel derselben, wie die obigen

$$\begin{matrix} a\ b\ c\ d \\ b_1\ c_1\ d_1\ a_1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} x\ y\ z\ t \\ y_1\ z_1\ t_1\ x_1 \end{matrix}$$

eine eigenthümliche Beziehung zu einander.

Wir haben nämlich oben (2.) gesehen, um nur eines der erhaltenen Resultate herauszunehmen, dass die drei Ebenen:

$$[abz] \quad [acy] \quad [adx]$$

sich in einer durch a gehenden Geraden schneiden müssen. Aus diesem einzigen Resultat können wir alle übrigen gleichartigen abschreiben, indem wir einmal die Buchstaben $a\ b\ c\ d$ und zweitens auch die Buchstaben $x\ y\ z\ t$ cyklisch fortschreiten lassen; wir erhalten dadurch 16 gerade Linien, in denen je drei Ebenen sich schneiden, und wir können diese Geraden folgendermassen zusammenstellen:

$[abz]$	$[acy]$	$[adx]$	schneiden	sich	in	g_{a4}
$[abt]$	$[acz]$	$[ady]$	„	„	„	g_{a1}
$[abx]$	$[act]$	$[adz]$	„	„	„	g_{a2}
$[aby]$	$[acx]$	$[adt]$	„	„	„	g_{a3}
$[bcz]$	$[bdy]$	$[bax]$	„	„	„	g_{b1}
$[bct]$	$[bdz]$	$[bay]$	„	„	„	g_{b2}
$[bcx]$	$[bdt]$	$[baz]$	„	„	„	g_{b3}
$[bcy]$	$[bdx]$	$[bat]$	„	„	„	g_{b4}
$[cdz]$	$[cay]$	$[cbx]$	„	„	„	g_{c2}
$[cdt]$	$[caz]$	$[cby]$	„	„	„	g_{c3}
$[cdx]$	$[cat]$	$[cbz]$	„	„	„	g_{c4}
$[cdy]$	$[cax]$	$[cbt]$	„	„	„	g_{c1}
$[daz]$	$[dby]$	$[dcx]$	„	„	„	g_{d3}
$[dat]$	$[dbz]$	$[dcy]$	„	„	„	g_{d4}
$[dax]$	$[dbt]$	$[dcz]$	„	„	„	g_{d1}
$[day]$	$[dbx]$	$[dct]$	„	„	„	g_{d2}.

Aus dieser Zusammenstellung lesen wir nun sofort ab, dass die vier Geraden:

$$g_{a1} \quad g_{b1} \quad g_{c1} \quad g_{d1}$$

gleichzeitig den vier Geraden:

$$|ax| \quad |bt| \quad |cz| \quad |dy|$$

begegnen. Diese vier Paare von Geraden gehören also den beiden Regelschaaren eines Hyperboloids $H_1^{(2)}$ an; ebenso begegnen

$$g_{a2} \quad g_{b2} \quad g_{c2} \quad g_{d2}$$

gleichzeitig allen vier Geraden:

$$|a\mathfrak{y}|\ |b\mathfrak{x}|\ |c\mathfrak{t}|\ |d\mathfrak{z}|;$$

diese gehören also den beiden Regelschaaren eines zweiten Hyperboloids $H_2^{(2)}$ an; ferner begegnen

$$g_{a3}\ g_{b3}\ g_{c3}\ g_{d3}$$

gleichzeitig den vier Geraden:

$$|a\mathfrak{z}|\ |b\mathfrak{y}|\ |c\mathfrak{x}|\ |d\mathfrak{t}|;$$

diese acht Geraden gehören also den beiden Regelschaaren eines dritten Hyperboloides $H_3^{(2)}$ an und endlich begegnen

$$g_{a4}\ g_{b4}\ g_{c4}\ g_{d4}$$

gleichzeitig den vier Geraden:

$$|a\mathfrak{t}|\ |b\mathfrak{z}|\ |c\mathfrak{y}|\ |d\mathfrak{x}|;$$

diese acht Geraden gehören also den beiden Regelschaaren eines vierten Hyperboloids $H_4^{(2)}$ an.

Wir können also folgendes Resultat aussprechen:

Irgend zwei Quadrupel zweier in Quadrupellage befindlichen collinearen Räume bilden allemal zwei Tetraeder, die gleichzeitig auf vier verschiedene Arten hyperboloidisch liegen und zwar gehören, wenn

$$a\ b\ c\ d \quad \textit{und} \quad \mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z}\ \mathfrak{t}$$

die beiden Quadrupel sind, je vier Verbindungslinien der Ecken:

$$\begin{array}{cccc} |a\mathfrak{x}| & |b\mathfrak{t}| & |c\mathfrak{z}| & |d\mathfrak{y}| \\ |a\mathfrak{y}| & |b\mathfrak{x}| & |c\mathfrak{t}| & |d\mathfrak{z}| \\ |a\mathfrak{z}| & |b\mathfrak{y}| & |c\mathfrak{x}| & |d\mathfrak{t}| \\ |a\mathfrak{t}| & |b\mathfrak{z}| & |c\mathfrak{y}| & |d\mathfrak{x}| \end{array}$$

immer einer Regelschaar an, wobei diese vier Fälle in einander übergehen durch cyklische Fortsetzung der Punkte des einen oder des andern Quadrupels.

Wenn man von dem ersten Hyperboloid $H_1^{(2)}$, auf welchem die vier Geraden liegen:

$$|a\mathfrak{x}|\ |b\mathfrak{t}|\ |c\mathfrak{z}|\ |d\mathfrak{y}|$$

die collinear entsprechende Figur aufsucht, so erhält man ein Hyperboloid, dessen einer Regelschaar die vier Geraden:

$$|a_1\mathfrak{x}_1|\ |b_1\mathfrak{t}_1|\ |c_1\mathfrak{z}_1|\ |d_1\mathfrak{y}_1|$$

oder

$$|d\mathfrak{t}|\ |a\mathfrak{z}|\ |b\mathfrak{y}|\ |c\mathfrak{x}|$$

angehören, also das Hyperboloid $H_3^{(2)}$; fassen wir dagegen die vier Geraden:

$$|a\mathfrak{x}|\ |b\mathfrak{t}|\ |c\mathfrak{z}|\ |d\mathfrak{y}|$$

als dem Raume R_1 angehörig auf und schreiben sie demgemäss so:

$$|b_1\mathfrak{y}_1|\ |c_1\mathfrak{x}_1|\ |d_1\mathfrak{t}_1|\ |a_1\mathfrak{z}_1|$$

dann entsprechen ihnen im Raume R die vier Geraden:

$$|\mathfrak{b}\mathfrak{y}| \quad |\mathfrak{c}\mathfrak{x}| \quad |\mathfrak{d}\mathfrak{t}| \quad |\mathfrak{a}\mathfrak{z}|$$

welche wiederum auf dem Hyperboloid $H_3^{(2)}$ liegen.

Die beiden Hyperboloide $H_1^{(2)}$ und $H_3^{(2)}$ sind daher entsprechende Figuren der collinearen Räume in beiderlei Sinn der Beziehung.

Dasselbe zeigt sich für die beiden Hyperboloide $H_2^{(2)}$ und $H_4^{(2)}$. Die acht Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\;\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{t}$, durch welche die vier Hyperboloide $H_1^{(2)}\,H_2^{(2)}\,H_3^{(2)}\,H_4^{(2)}$ gehen, bilden entweder eine Gruppe von acht associirten Punkten, durch welche unendlich viele Raumcurven vierter Ordnung und erster Species hindurchgehen, oder es geht nur eine einzige solche Raumcurve $C^{(4)}$ durch dieselben, welche sie bestimmen.

In der That ist das letztere der Fall, wie wir leicht auf folgende Art erkennen: Bildeten nämlich die acht Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\;\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{t}$ eine Gruppe von acht associirten Punkten, so müsste, wenn wir durch die sechs Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}$ eine Raumcurve dritter Ordnung $C^{(3)}$ hindurchlegten, die Verbindungslinie $|\mathfrak{y}\mathfrak{t}|$ eine Secante derselben sein (a. o. a. O. S. 705); die beiden Secanten $|\mathfrak{x}\mathfrak{z}|$ und $|\mathfrak{y}\mathfrak{z}|$ der Raumcurve $C^{(3)}$ mit den vier Punkten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ derselben verbunden, müssten daher zwei projective Ebenenbüschel liefern, d. h. es müsste

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{z}|\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) \barwedge |\mathfrak{y}\mathfrak{t}|\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d})$$

sein; da aber

$$|\mathfrak{y}\mathfrak{t}|\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) \barwedge |\mathfrak{y}_1\mathfrak{t}_1|\,(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1)$$

wegen der Collinearität ist und

$$|\mathfrak{y}_1\mathfrak{t}_1|\,(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1) = |\mathfrak{x}\mathfrak{z}|\,(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$$

identisch ist, so müsste

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{z}|\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}) \barwedge |\mathfrak{x}\mathfrak{z}|\,(\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c})$$

sein, was offenbar im Allgemeinen nicht der Fall ist, folglich werden auch die acht Punkte $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{t}$ im Allgemeinen *nicht* eine Gruppe von acht associirten Punkten bilden, sondern eine einzige Raumcurve $C^{(4)}$ bestimmen. Diese muss daher auf allen vier Hyperboloiden $H_1^{(2)}\,H_2^{(2)}\,H_3^{(2)}\,H_4^{(2)}$ gleichzeitig liegen und wir haben das Resultat:

Die vier Hyperboloide $H_1^{(2)}\,H_2^{(2)}\,H_3^{(2)}\,H_4^{(2)}$ gehören einem Büschel an, d. h. sie schneiden sich in einer und derselben Raumcurve vierter Ordnung und erster Species $C^{(4)}$, welche durch die acht Punkte der beiden Quadrupel gerade bestimmt wird. Diese Raumcurve $C^{(4)}$ entspricht sich selbst in beiderlei Sinn der collinearen Beziehung, d. h. der irgend einem Punkte derselben entsprechende Punkt in dem einen oder dem andern Sinne der collinearen Beziehung liegt wieder auf ihr.

Nehmen wir daher irgend einen Punkt der Raumcurve $C^{(4)}$ etwa $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1$, so liegen auch die entsprechenden Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}$ auf ihr,

und betrachten wir $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}_1$, so muss, wenn der entsprechende $\mathfrak{r} = \mathfrak{s}_1$ ist, der Punkt $\mathfrak{s}$ wie wir wissen, mit $\mathfrak{p}_1$ incident sein, aber auch auf $C^{(4)}$ liegen, weil $\mathfrak{s}_1$ auf $C^{(4)}$ liegt.

Wir können also auf der Raumcurve $C^{(4)}$ unendlich viele neue Quadrupel

$$\mathfrak{p}\ \mathfrak{q}\ \mathfrak{r}\ \mathfrak{s}$$
$$\mathfrak{q}_1\ \mathfrak{r}_1\ \mathfrak{s}_1\ \mathfrak{p}_1$$

herstellen, indem wir von irgend einem Punkte $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1$ derselben ausgehen.

Dies lässt sich auch anders ausdrücken:

Legen wir durch die Raumcurve $C^{(4)}$, welche durch zwei Quadrupel der collinearen Räume bestimmt wird, ein beliebiges Hyperboloid und trifft eine durch $\mathfrak{a}$ gehende Erzeugende desselben die $C^{(4)}$ zum andern Mal in $\mathfrak{p}$, so erhalten wir ein von dem Punkte $\mathfrak{p}$ ausgehendes Quadrupel $\begin{pmatrix}\mathfrak{p}\ \mathfrak{q}\ \mathfrak{r}\ \mathfrak{s}\\ \mathfrak{q}_1\mathfrak{r}_1\mathfrak{s}_1\ \mathfrak{p}_1\end{pmatrix}$ zu dem von dem Punkte $\mathfrak{a}$ ausgehenden Quadrupel $\begin{pmatrix}\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\\ \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1\ \mathfrak{a}_1\end{pmatrix}$ und beide liegen auf $C^{(4)}$; die vier Verbindunglinien

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{p}|\quad |\mathfrak{b}\mathfrak{s}|\quad |\mathfrak{c}\mathfrak{r}|\quad |\mathfrak{d}\mathfrak{q}|$$

liegen aber auf einem durch $C^{(4)}$ gehenden Hyperboloid; da es nun durch $|\mathfrak{a}\mathfrak{p}|$ und die Raumcurve $C^{(4)}$ nur ein einziges Hyperboloid giebt, so müssen auf demselben auch die drei Geraden $|\mathfrak{b}\mathfrak{s}|$, $|\mathfrak{c}\mathfrak{r}|$, $|\mathfrak{d}\mathfrak{q}|$ liegen. Wir schliessen also:

Wenn man durch eine Raumcurve $C^{(4)}$, die durch zwei Quadrupel der collinearen Räume bestimmt wird, ein beliebiges Hyperboloid legt und durch die vier Punkte des einen Quadrupels vier Erzeugende derselben Regelschaar des Hyperboloids zieht, so treffen sie die $C^{(4)}$ zum andern Male in je vier Punkten eines neuen Quadrupels.

Hieraus folgt z. B., dass die vier Geraden, welche oben bezeichnet waren

$$g_{\mathfrak{a}1}\quad g_{\mathfrak{b}1}\quad g_{\mathfrak{c}1}\quad g_{\mathfrak{d}1},$$

und die einer Regelschaar des Hyperboloids $H_1^{(2)}$ angehören, der $C^{(4)}$ in vier neuen Punkten eines Quadrupels begegnen müssen, auf die wir sogleich noch näher eingehen wollen.

4. Wir haben oben (2.) gesehen, dass die vier Ebenen:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{x}]\quad [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}]\quad [\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{y}]\quad [\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{t}]$$

durch einen Punkt laufen, (wo der Buchstabe t an Stelle des incidenten $\mathfrak{x}_1$ gesetzt ist); da wir ferner wissen (3.), dass die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{x}]\quad [\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{t}]\quad [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{z}]$$

sich in einer Geraden $g_{\mathfrak{d}1}$ schneiden und die drei Ebenen:

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}]\quad [\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{t}]\quad [\mathfrak{b}\mathfrak{a}\mathfrak{z}]$$

sich in einer Geraden $g_{\mathfrak{b}3}$ schneiden, so folgt, dass die sechs Ebenen:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{x}]\quad [\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{x}]\quad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{z}]\quad [\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{z}]\quad [\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{y}]\quad [\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{t}]$$

sämmtlich durch einen und denselben Punkt laufen.

Wir erhalten hieraus, wenn wir entweder mit den Punkten $abcd$ oder mit den Punkten $xyzt$ cyklisch fortfahren, vier neue Punkte:

$[abx]$ $[bcx]$ $[abz]$ $[cdz]$ $[acy]$ $[bdt]$ gehen durch einen Punkt p
$[aby]$ $[bcy]$ $[abt]$ $[cdt]$ $[acz]$ $[bdx]$ „ „ „ „ s
$[abz]$ $[bcz]$ $[abx]$ $[cdx]$ $[act]$ $[bdy]$ „ „ „ „ r
$[abt]$ $[bct]$ $[aby]$ $[cdy]$ $[acx]$ $[bdz]$ „ „ „ „ q.

Wenn wir zu diesen vier Punkten die entsprechenden aufsuchen, so finden wir z. B. p_1 als den Durchschnittspunkt der sechs Ebenen:

$$[a_1b_1x_1]\ [b_1c_1x_1]\ [a_1b_1z_1]\ [c_1b_1z_1]\ [a_1c_1y_1]\ [b_1b_1t_1]$$

oder in den gleichwerthigen Buchstaben:

$$[bct]\ [abt]\ [bay]\ [bcy]\ [bbx]\ [acz]$$

d. h. der Punkt s, also

$$p_1 = s$$

und in gleicher Weise finden wir

$$s_1 = r \qquad r_1 = q \qquad q_1 = p$$

also haben wir ein neues Quadrupel:

$$p\ q\ r\ s$$
$$q_1\ r_1\ s_1\ p_1$$

aus den beiden ersten Quadrupeln abgeleitet; ferner erkennen wir aus der obigen Tabelle 3., dass die je vier Geraden:

g_{a4} g_{b3} g_{c2} g_{b1} durch den Punkt p gehen
g_{a3} g_{b2} g_{c1} g_{b4} „ „ „ q „
g_{a2} g_{b1} g_{c4} g_{b3} „ „ „ r „
g_{a1} g_{b4} g_{c3} g_{b2} „ „ „ s „.

Wir haben also identisch:

$$g_{a1} = |as| \quad g_{a2} = |ar| \quad g_{a3} = |aq| \quad g_{a4} = |ap|$$
$$g_{b1} = |br| \quad g_{b2} = |bq| \quad g_{b3} = |bp| \quad g_{b4} = |bs|$$
$$g_{c1} = |cq| \quad g_{c2} = |cp| \quad g_{c3} = |cs| \quad g_{c4} = |cr|$$
$$g_{b1} = |bp| \quad g_{b2} = |bs| \quad g_{b3} = |br| \quad g_{b4} = |bq|$$

und da die vier Geraden $g_{a1}\ g_{b1}\ g_{c1}\ g_{b1}$ einer Regelschaar des Hyperboloids $H_1^{(2)}$ angehören, so liegen auch die vier Punkte $p\ q\ r\ s$ auf demselben; da aber auch die Geraden $g_{a2}g_{b2}g_{c2}g_{b2}$ einer Regelschaar des Hyperboloids $H_2^{(2)}$ angehören, so liegen gleichzeitig $pqrs$ auf dem Hyperboloid $H_2^{(2)}$, also auf der Durchschnittslinie beider Hyperboloide, d. h. auf der Raumcurve $C^{(4)}$. Wir können also sagen:

Irgend zwei Quadrupel der collinearen Räume liegen auf vierfache Weise hyperboloidisch; durch die Punkte des einen Quadrupels gehen in jedem der vier Hyperboloide je vier Erzeugende der jedesmaligen andern

Regelschaar. Diese sechszehn Erzeugenden laufen zu je vieren durch vier Punkte, welche ein neues Quadrupel bilden auf derjenigen Raumcurve $C^{(4)}$, welche durch die beiden gegebenen Quadrupel bestimmt wird.

In gleicher Weise können wir von dem Quadrupel $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}$ ausgehend zu einem neuen Quadrupel auf $C^{(4)}$ gelangen. Aus der collinearen Beziehung der beiden Räume R und R_1 folgt die Projectivität:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) \barwedge |\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1|\,(\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1\mathfrak{t}_1|,$$

oder $\quad \barwedge |\mathfrak{b}\mathfrak{a}|\,(\mathfrak{t}\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$

also auch $\quad \barwedge |\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1|\,(\mathfrak{t}_1\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_1)$

oder $\quad \barwedge |\mathfrak{c}\mathfrak{b}|\,(\mathfrak{z}\mathfrak{t}\mathfrak{x}\mathfrak{y})$

woraus folgt $\quad |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) \barwedge |\mathfrak{c}\mathfrak{b}|\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t})$;

diese Projectivität liefert vier Strahlen einer Regelschaar; da aber die beiden Ebenen $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{x}]$ und $[\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{x}]$, welche den Punkt $\mathfrak{x}$ gemein haben, gleichzeitig, wie wir oben gesehen haben, durch den Punkt $\mathfrak{x}$ gehen und analog für die übrigen Ebenenpaare, so folgt, dass die beiden projectiven Ebenenbüschel:

$$|\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) \barwedge |\mathfrak{c}\mathfrak{b}|\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t})$$

ein Hyperboloid erzeugen, auf welchem die vier Geraden:

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{x}| \quad |\mathfrak{y}\mathfrak{q}| \quad |\mathfrak{z}\mathfrak{p}| \quad |\mathfrak{t}\mathfrak{s}|$$

einer Regelschaar angehören, was auch daraus folgt, dass die Punkte $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}$ zwei Quadrupel bilden.

In gleicher Weise erhalten wir noch ein zweites Hyperboloid durch die Projectivität:

$$|\mathfrak{b}\mathfrak{c}|\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}) \barwedge |\mathfrak{a}\mathfrak{b}|\,(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}),$$

auf welchem die vier Geraden:

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{p}| \quad |\mathfrak{y}\mathfrak{s}| \quad |\mathfrak{z}\mathfrak{r}| \quad |\mathfrak{t}\mathfrak{q}|$$

einer Regelschaar angehören. Diese beiden Hyperboloide schneiden sich natürlich, da sie durch alle drei Quadrupel $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{t}$, $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\mathfrak{r}\mathfrak{s}$ hindurchgehen, in der Raumcurve $C^{(4)}$ und sind, wie unmittelbar einzusehen ist, entsprechende Figuren der collinearen Räume in beiderlei Sinn der Beziehung.

Wir können dies Resultat so aussprechen:

Ein Quadrupel der beiden collinearen Räume liefert ein in bestimmtem Sinne zu durchlaufendes windschiefes Viereit, dessen Seiten je zwei entsprechende Punkte der collinearen Räume verbinden. Dieses Viereit hat zwei Paar Gegenseiten. Verbindet man ein Paar Gegenseiten mit denselben vier Punkten eines zweiten Quadrupels durch Ebenenpaare, so erhält man zwei projective Ebenenbüschel, die ein Hyperboloid erzeugen. Verbindet man das andere Paar Gegenseiten mit denselben vier Punkten des zweiten Quadrupels, so erhält man

zwei projective Ebenenbüschel, die ein zweites Hyperboloid erzeugen. Diese beiden Hyperboloide sind entsprechende Figuren der collinearen Räume in beiderlei Sinn der Beziehung und die Raumcurve vierter Ordnung $C^{(4)}$, in welcher sie sich durchschneiden, entspricht sich selbst.

Wenn wir dagegen die beiden Diagonalen des windschiefen Vierseits auffassen, dessen Ecken die aufeinanderfolgenden Punkte eines Quadrupels sind, also bei dem Quadrupel $abcd$ die beiden Geraden:

$$|ac| \quad \text{und} \quad |bd|$$

so erkennen wir sofort, dass die ihnen collinear entsprechenden Strahlen:

$$|a_1c_1| = |bd| \quad \text{und} \quad |b_1d_1| = |ac|$$

sind, dass also *die beiden Diagonalen eines Quadrupels zwei in doppeltem Sinne der collinearen Beziehung einander entsprechende Strahlen* sind.

Wir haben vermöge der collinearen Beziehung die Projectivität:

$$|ac|\,(b\,x\,y\,z) \barwedge |a_1c_1|\,(b_1x_1y_1z_1)$$

oder
$$\barwedge |bd|\,(a\,t\,x\,y)$$

also auch
$$\barwedge |b_1d_1|\,(a_1t_1x_1y_1)$$

oder
$$\barwedge |ca|\,(b\,z\,t\,x).$$

Da die beiden coaxialen projectiven Ebenenbüschel mit der gemeinschaftlichen Axe $|ac|$ das Paar entsprechender Ebenen:

$$[acx] \quad \text{und} \quad [acz]$$

verkehrt auf einander fallend haben, so liegen sie involutorisch und wir folgern, dass die drei Ebenenpaare:

$[acb]$ und $[acd]$ $\quad$ $[acx]$ und $[acz]$ $\quad$ $[acy]$ und $[act]$

einer Involution angehören. Wir haben also folgendes Ergebniss:

Jedes von einem Quadrupel zweier collinearen Räume gebildete windschiefe Vierseit hat zwei Paar Gegenecken, deren Verbindungslinien Diagonalen heissen. Legt man durch eine Diagonale eines Quadrupels drei Ebenenpaare, einmal nach dem übrigen Paar Gegenecken dieses Quadrupels und dann nach den beiden Paaren von Gegenecken eines beliebigen zweiten Quadrupels, so erhält man drei Paare einer Ebeneninvolution.

Dies lässt sich noch verallgemeinern; sind nämlich irgend drei Quadrupel der beiden collinearen Räume:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 & a_1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & z & t \\ y_1 & z_1 & t_1 & x_1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} p & q & r & s \\ q_1 & r_1 & s_1 & p_1 \end{array},$$

so gelten die Projectivitäten:

$$|ac|\,(b\,x\,p\,r) \barwedge |a_1c_1|\,(b_1x_1p_1r_1)$$
$$\barwedge |b\,d|\,(a\,t\,s\,q)$$
$$\barwedge |b_1d_1|\,(a_1t_1s_1q_1)$$
$$|ac|\,(b\,x\,p\,r) \barwedge |c\,a|\,(d\,z\,r\,p),$$

also liegen auch diese beiden projectiven Ebenenbüschel involutorisch, oder die drei Ebenenpaare:

[acb] und [acb] [acx] und [acz] [acy] und [acx]

gehören einer Involution an. Da aber die Ebeneninvolution mit der vorigen zwei Ebenenpaare gemeinschaftlich hat, durch welche sie schon bestimmt ist, so ist sie mit der ersteren identisch und wir können den vorigen Satz folgendermassen erweitern:

Legt man durch eine Diagonale eines Quadrupels Ebenenpaare nach irgend welchen Paaren von Gegenecken anderer Quadrupel, so gehören diese sämmtlich einer und derselben Ebeneninvolution an.

Vermöge der collinearen Beziehung der Räume R und R_1 haben wir die Projectivität:

$$|ac|\,(bbxyzt) \barwedge |a_1c_1|\,(b_1b_1x_1y_1z_1t_1)$$

oder indem wir rechts die mit ihnen incidenten Punkte des ersten Raumes substituiren:

$$|ac|\,(bbxyzt) \barwedge |bb|\,(actxyz),$$

zwei projective Büschel, die ein Hyperboloid erzeugen, von welchem $|ac|$ und $|bb|$ zwei Erzeugende der einen Regelschaar, $|ab|$ und $|cb|$ zwei Erzeugende der andern Regelschaar sind, welches daher durch das windschiefe Vierseit, dessen Seiten sind:

$$|ab| \quad |bb| \quad |bc| \quad |ca|$$

hindurchgeht. Die collinear entsprechende Figur im Raume R_1 ist ein Hyperboloid, welches durch die beiden projectiven Ebenenbüschel:

$$|a_1c_1|\,(b_1b_1x_1y_1z_1t_1) \barwedge |b_1b_1|\,(a_1c_1t_1x_1y_1z_1|$$

oder in die Buchstaben des ersten Raumes R umgesetzt:

$$|bb|\,(actxyz| \barwedge |ac|\,(bbztxy)$$

erzeugt wird, und bei dem $|ac|$ und $|bb|$ zwei Erzeugende der einen Regelschaar, $|ab|$ und $|bc|$ zwei Erzeugende der andern Regelschaar sind, welches daher durch das windschiefe Vierseit, dessen Seiten sind:

$$|bc| \quad |ca| \quad |ab| \quad |bb|$$

hindurchgeht. Diese beiden Hyperboloide haben die beiden im Raume sich nicht treffenden Geraden

$$|ac| \text{ und } |bb|$$

gemeinschaftlich, folglich im Allgemeinen noch zwei andere Gerade

$$s \text{ und } s'$$

(die auch imaginär sein können) gemein. Denn drehen wir um $|ac|$ eine veränderliche Ebene $\xi = \eta_1$ und betrachten dieselbe als den beiden Räumen R und R_1 angehörig, so beschreiben die entsprechenden Ebenen ξ_1 und η zwei coaxiale Ebenenbüschel um die gemeinsame

Axe $|\mathfrak{bb}|$; diese beiden Ebenenbüschel sind projectiv, weil beide mit dem von $\xi = \eta_1$ beschriebenen Ebenenbüschel projectiv sind. Jede ihrer beiden (reellen oder imaginären) Doppelebenen hat also eine und dieselbe ihr in beiderlei Sinn der collinearen Beziehung entsprechende Ebene. Die Schnittlinie eines solchen Ebenenpaares muss daher eine sich selbst entsprechende Gerade der beiden collinearen Räume sein; wir erhalten also zwei Gerade

$$s \text{ und } s',$$

deren jede eine sich selbst entsprechende Gerade ist, und die daher den beiden vorigen Hyperboloiden gemeinschaftlich sind; beide schneiden die Geraden

$$|\mathfrak{ac}| \text{ und } |\mathfrak{bb}|$$

und zwar, da diese in beiderlei Sinn der Beziehung einander entsprechende Gerade sind, in Punkten, die einander ebenfalls in doppeltem Sinne der Beziehung entsprechen.

Da die Gerade s (und ebenso s') zwei entsprechende Gerade der beiden collinearen Räume vereinigt, so ist sie der Träger zweier projectiven entsprechenden Punktreihen und diese liegen involutorisch, weil die Schnittpunkte von s mit $|\mathfrak{ac}|$ und $|\mathfrak{bb}|$ einander in beiderlei Sinn der Beziehung entsprechen. Wir erhalten also auf s und auf s' zwei Punktinvolutionen, deren (reelle oder imaginäre) Doppelpunkte offenbar die vier Doppelpunkte der beiden collinearen Räume (1.) sind. Wir gelangen also hier zur Construction der Doppelpunkte der beiden collinearen Räume auf wesentlich einfachere Weise, als in dem allgemeinen Falle der Collinearität, nämlich so:

Um für zwei in Quadrupellage befindliche collineare Räume die Doppelpunkte zu construiren, nehmen wir irgend zwei Quadrupel:

$$\mathfrak{abcd} \text{ und } \mathfrak{xyzt}$$

construiren die beiden Hyperboloide, welche durch die beiden projectiven Ebenenbüschelpaare:

(I) $\quad |\mathfrak{ac}|(\mathfrak{xzyt}) \barwedge |\mathfrak{bb}|(\mathfrak{tyxz})$

(II) $\quad |\mathfrak{ac}|(\mathfrak{xzyt}) \barwedge |\mathfrak{bb}|(\mathfrak{ytzx})$

bestimmt werden; diese beiden Hyperboloide haben ausser den beiden Erzeugenden $|\mathfrak{ac}|$ und $|\mathfrak{bb}|$ der einen Regelschaar, noch zwei Erzeugende der andern Regelschaar:

$$s \text{ und } s'$$

gemein; jede derselben ist eine sich selbst entsprechende Gerade der beiden collinearen Räume und der Träger einer Punktinvolution, welche von den Paaren der einander collinear entsprechenden Punkte gebildet wird. Die Doppelpunkte beider Involutionen sind die gesuchten Doppelpunkte der collinearen Räume. Diese Involutionen selbst werden bestimmt durch

je zwei Punktepaare, in welchen die Geraden $|ac|$ *und* $|bb|$, *sowie* $|xz|$ *und* $|yt|$ *den Geraden s und s' begegnen.* Denn da die entsprechenden Punkte auf s' zwei involutorisch liegende projective Punktreihen bilden, so wird, wenn $m = n_1$ irgend ein Punkt von s' ist, auch der entsprechende $m_1 = n$ incident sein auf s'. Legen wir daher eine Ebene $[sm]$, so muss die entsprechende Ebene auch durch s gehen und durch m_1; die vorige Ebene aber, als im Raume R_1 liegend aufgefasst, hat zu ihrer entsprechenden $[sn]$, welche mit $[sm_1]$ incident ist; folglich liegen auch die beiden Ebenenbüschel, welche diese Doppelgerade zur gemeinsamen Axe haben und einander collinear entsprechen, involutorisch. Hieraus folgt, dass, wenn wir die Ebene $[sx]$ legen, welche mit $[sy_1]$ incident ist, auch ihre in beiderlei Sinn entsprechenden Ebenen, nämlich $[sx_1] = [st]$ und $[sy]$ incident sein müssen, also die Gerade $|ty|$ der Doppelgeraden s begegnen muss, und in gleicher Weise erkennen wir, dass auch die Gerade $|xz|$ der Doppelgeraden s begegnet. Da aber $|xz|$ und $|yt|$ zwei einander in beiderlei Sinn der Beziehung entsprechende Gerade der collinearen Räume sind, so treffen sie s in einem Punktepaar der auf s befindlichen Punktinvolution.

Wir haben hierdurch zugleich folgendes Ergebniss erhalten:

Die beiden Doppelgeraden s und s' begegnen jedem Paar von Diagonalen eines Quadrupels der in Quadrupellage befindlichen collinearen Räume. Wir wissen (1.) dass es im Allgemeinen in zwei collinearen Räumen sechs Doppelgerade giebt, welche die drei Paar Gegenkanten eines Tetraeders bilden. In unserem Falle der in Quadrupellage befindlichen collinearen Räume kann nur *ein reelles Paar* von Doppelgeraden, ein Paar Gegenkanten des vorigen Tetraeders, s und s', existiren; denn wären zwei Paare reell, so müsste es auch das dritte sein und alle vier Doppelpunkte wären reell, was nicht der Fall sein kann. Denn sonst müsste es zwei zusammenfallende entsprechende Ebenen ε und ε' geben (eine Seitenfläche des vorigen Tetraeders) und diese wären Träger von zwei collinearen in Quadrupellage befindlichen ebenen Feldern und hätten drei reelle Doppelpunkte. Dies ist aber nicht möglich (siehe a. a. O. S. 411), sondern in solchen zwei incidenten in Quadrupellage befindlichen ebenen Feldern ist immer nur ein Doppelpunkt reell und die beiden andern auf einer reellen Geraden befindlichen sind conjugirt-imaginär. Es können daher von den vier Doppelpunkten entweder nur zwei oder keiner reell sein; ob auch der erste Fall für die Quadrupellage auszuschliessen ist und ob das einzige Paar von Doppelgeraden s und s', welches nur reell sein kann, immer reell sein muss, lasse ich dahingestellt.

Bei zwei in Quadrupellage befindlichen collinearen Räumen tritt gleichzeitig ein *geschaart-involutorisches System* auf, wie leicht zu erkennen ist. Denn sei ein beliebiges Quadrupel:

$$\begin{matrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{y}_1 & \mathfrak{z}_1 & \mathfrak{t}_1 & \mathfrak{x}_1 \end{matrix}$$

so durchlaufen die Punkte $\mathfrak{x}(=\mathfrak{y}_1)$ und $\mathfrak{y}$ als entsprechende Punkte die collinearen Räume; die Punkte $\mathfrak{y}(=\mathfrak{z}_1)$ und $\mathfrak{z}$ ebenfalls als entsprechende Punkte collineare Räume, folglich können wir eine *neue* collineare Beziehung herstellen, bei welcher die Punkte

$$\mathfrak{x} \text{ und } \mathfrak{z}$$

als entsprechende aufgefasst werden, denn da die von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ beschriebenen Räume collinear sind und die von $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ beschriebenen Räume ebenfalls collinear sind, so müssen auch die von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ beschriebenen Räume collinear sein. Diese bilden aber ein geschaart-involutorisches System. Denn suchen wir durch die vorige Construction zu $\mathfrak{x}$ des einen Raumes den entsprechenden des andern, so finden wir $\mathfrak{z}$; suchen wir aber zu $\mathfrak{z}$ des ersten Raumes den entsprechenden des andern, so zeigt die Quadrupellage, dass derselbe wieder $\mathfrak{x}$ ist. *Die beiden von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ beschriebenen collinearen Räume liegen also involutorisch*, weil jeder Punkt zu seinem entsprechenden in beiderlei Sinn denselben Punkt hat. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{z}| \text{ und ebenso } |\mathfrak{y}\mathfrak{t}|$$

sind sämmtlich sich selbst entsprechende Strahlen und treffen zwei feste Gerade s und s', wie wir gesehen haben. Dies sind die Axen des geschaart-involutorischen Systems. Jeder Punkt einer Axe ist ein sich selbst entsprechender Punkt des geschaart-involutorischen Systems. Denn da s der Träger einer Punktinvolution ist in der ursprünglichen collinearen Beziehung, indem auf s irgend zwei entsprechende Punkte sich in doppeltem Sinne entsprechen, so löst sich hier das Quadrupel in Paare auf: nehmen wir auf s zu einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x}(=\mathfrak{y}_1)$ den entsprechenden $\mathfrak{y}$ und zu $\mathfrak{y}(=\mathfrak{z}_1)$ den entsprechenden Punkt $\mathfrak{z}$, so muss wegen der Punktinvolution auf s, der Punkt $\mathfrak{z}$ wieder mit $\mathfrak{x}$ coincidiren. Also ist jeder Punkt $\mathfrak{x}$ der Geraden s ein Doppelpunkt für das geschaart-involutorische System $[\mathfrak{x}\mathfrak{z}]$. Hieraus folgt weiter, dass auf der Verbindungslinie irgend zweier entsprechender Punkte des geschaart-involutorischen Systems zwei entsprechende Punkte $\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}$ harmonisch getrennt werden durch die Treffpunkte dieser Geraden mit den beiden Axen ss'. Denn eine solche Verbindungslinie $|\mathfrak{x}\mathfrak{z}|$ ist der Träger einer Punktinvolution, die aus den Paaren sich in beiderlei Sinn der Beziehung entsprechender Punkte gebildet wird, und deren Doppelpunkte die Treffpunkte mit ss' sind. Wir können also folgendes Resultat aussprechen: *Bei zwei in Quadrupellage befindlichen collinearen Räumen gehören sämmtliche Paare gegenüberliegender Ecken jedes Quadrupels einem geschaart-involutorischen Systeme an.*

5. Schliesslich soll nur noch die eine Frage beantwortet werden:

Lassen sich zwei gegebene collineare Räume immer in Quadrupellage bringen und wenn dies der Fall ist, auf welche Weise?

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir die unendlich entfernten Ebenen der beiden Räume:

$$\varepsilon^\infty \text{ und } \varphi_1^\infty,$$

welche immer incident bleiben, wie auch die Räume ihre Lage verändern mögen, und suchen die ihnen collinear entsprechenden Ebenen:

$$\varepsilon_1 \text{ und } \varphi$$

auf, welche im Allgemeinen nicht ganz in die Unendlichkeit fallen (indem wir ausschliessen, dass die gegebenen collinearen Räume affin seien), dann wird die Schnittlinie $|\varphi, \varepsilon^\infty|$ im Raume R zur entsprechenden Geraden im Raume R_1 die Schnittlinie $|\varphi_1^\infty \varepsilon_1|$ haben, und beide Geraden liegen in der unendlich-entfernten Ebene; ihr Schnittpunkt, den wir in doppeltem Sinne der Collinearität bezeichnen wollen:

$$\mathfrak{x}^\infty = \mathfrak{y}_1^\infty = (\varepsilon^\infty, \varphi|, |\varepsilon_1, \varphi_1^\infty|),$$

ist nichts anderes, als der unendlich-entfernte Punkt der Geraden $|\varphi, \varepsilon_1|$. Die diesem Punkte $\mathfrak{x}^\infty = \mathfrak{y}_1^\infty$ in beiderlei Sinn entsprechenden Punkte müssen beide auch in der unendlich-entfernten Ebene liegen, denn da $\mathfrak{x}^\infty$ in der Ebene φ liegt, so muss $\mathfrak{x}_1^\infty$ in φ_1^∞ liegen, und da auch $\mathfrak{y}_1^\infty$ in der Ebene ε_1 liegt, so muss $\mathfrak{y}^\infty$ in der Ebene ε^∞ liegen. Wir bezeichnen diese beiden bestimmten Punkte $\mathfrak{x}_1^\infty$ und $\mathfrak{y}^\infty$ als in dem jedesmaligen zweiten Raume liegend durch

$$\mathfrak{y}^\infty = \mathfrak{z}_1^\infty, \quad \mathfrak{x}_1^\infty = \mathfrak{t}^\infty$$

und suchen die ihnen entsprechenden Punkte

$$\mathfrak{z}^0 \text{ und } \mathfrak{t}_1^0$$

auf, welche im Allgemeinen nicht im Unendlichen, weil die Räume nicht affin sind, sondern irgendwo im Endlichen liegen.

Wir können jetzt die beiden Räume R und R_1 so verschieben, dass die Ebenen φ und ε_1 ihre Stellung im Raume nicht ändern, d. h. sich beständig parallel bleiben, so dass also auch die drei unendlich entfernten Punkte

$$\mathfrak{x}^\infty = \mathfrak{y}_1^\infty, \quad \mathfrak{y}^\infty = \mathfrak{z}_1^\infty, \quad \mathfrak{x}_1^\infty = \mathfrak{t}^\infty$$

ihre Richtung nicht ändern (oder im Unendlichen dieselben bleiben) und können durch diese Verschiebung die beiden im Endlichen liegenden Punkte $\mathfrak{z}^0$ und $\mathfrak{t}_1^0$ zur Incidenz bringen; dann haben wir die beiden gegebenen collinearen Räume in Quadrupellage gebracht, denn wir haben in denselben ein Quadrupel:

$$\begin{matrix} \mathfrak{x}^\infty & \mathfrak{y}^\infty & \mathfrak{z}^0 & \mathfrak{t}^\infty \\ \mathfrak{y}_1^\infty & \mathfrak{z}_1^\infty & \mathfrak{t}_1^0 & \mathfrak{x}_1^\infty \end{matrix}$$

und wenn in zwei collinearen Räumen sich ein solches Quadrupel findet, so giebt es, wie wir oben (2.) gesehen haben, unendlich viele,

d. h. der Cyklus schliesst sich immer, sobald er sich einmal schliesst.

Wir haben also gesehen, *dass sich zwei gegebene collineare Räume immer in Quadrupellage bringen lassen* und auf welche Weise dies geschehen kann; ebenso wie sich zwei gegebene projective Punktreihen immer in involutorische Lage zur Incidenz bringen lassen, dadurch dass man ihre Träger und auf diesen die den unendlich entfernten Punkten entsprechenden Punkte zur Incidenz bringt, und wie sich zwei gegebene collineare ebene Felder immer in Tripellage zur Incidenz bringen lassen (a. a. O. S. 408).

Die der vorhergehenden dual gegenüberstehende Untersuchung führt zu keinem neuen, sondern zu demselben räumlichen Gebilde, denn es ist unmittelbar einzusehen, dass wenn zwei collineare Räume rücksichtlich ihrer entsprechenden Punkte sich in Quadrupellage befinden, dies auch rücksichtlich ihrer entsprechenden Ebenen der Fall ist. Ist nämlich in den collinearen Räumen R und R_1 ein Quadrupel

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 & a_1 \end{matrix}$$

vorhanden, und wir bezeichnen die Ebenen:

$$[abc] = \delta, \quad [bcd] = \alpha, \quad [cda] = \beta, \quad [dab] = \gamma,$$

so werden die ihnen entsprechenden sein:

$$\begin{aligned} [a_1 b_1 c_1] &= \delta_1 = [dab] = \gamma, \\ [b_1 c_1 d_1] &= \alpha_1 = [abc] = \delta, \\ [c_1 d_1 a_1] &= \beta_1 = [bcd] = \alpha, \\ [d_1 a_1 b_1] &= \gamma_1 = [cda] = \beta, \end{aligned}$$

es coincidiren also $\alpha = \beta_1$, $\beta = \gamma_1$, $\gamma = \delta_1$, $\delta = \alpha_1$, und wir haben ein Quadrupel entsprechender Ebenen in cyklischer Lage incident. Wenn aber *ein* solches vorhanden ist, so giebt es unendlich viele, oder der Cyklus schliesst sich immer nach viermaligem Fortgange, was man in ganz analoger Weise für Ebenen in zwei collinearen Räumen erweisen kann, wie es oben (2.) für Punkte geschehen ist, also:

Zwei rücksichtlich ihrer Punkte in Quadrupellage befindliche collineare Räume sind auch rücksichtlich ihrer Ebenen in Quadrupellage.

Breslau, den 18. April 1882.

Ueber eine besondre Classe von Flächen vierter Ordnung.

Von

Friedrich Schur in Leipzig.

Unsere augenblicklichen analytischen und geometrischen Hülfsmittel dürften kaum dazu ausreichen, schon jetzt eine genauere Untersuchung der allgemeinen Flächen 4. Ordnung mit einiger Aussicht auf Erfolg in Angriff nehmen zu können. Sieht man in der That von Eigenschaften der Flächen 4. Ordnung ab, die sich ebenso leicht für Flächen $n$ter Ordnung ableiten lassen, so sind bis jetzt detaillirte Untersuchungen nur über specielle Classen von solchen Flächen angestellt worden, besonders über solche mit Doppelpunkten und Doppelcurven. In meiner Habilitationsschrift*) habe ich nun auch auf eine besondere Classe von Flächen 4. Ordnung hingewiesen, nämlich auf solche, welche sich durch vier collineare räumliche Ebenensysteme erzeugen lassen, und ich habe dort von diesen Flächen gezeigt, dass sie immer eine eindeutige Transformation in sich zulassen. Nun sind diese Flächen 4. Ordnung — sie hängen von 33 Constanten ab — noch viel zu allgemein, um einer genaueren Untersuchung zugänglicher zu sein als die wirklich allgemeinen Flächen 4. Ordnung, aber vielleicht führt die Specialisirung ihrer Erzeugungsweise auf besondre, der Beachtung werthe Classen von Flächen 4. Ordnung. Hierzu kommt man wohl am besten von den diesen Flächen analogen ebenen Gebilden aus, nämlich den ebenen Curven 3. Ordnung. Nun findet hier freilich der principielle Unterschied statt, dass jede ebene Curve 3. Ordnung immer unendlich viel collineare Erzeugungen zulässt, während eine Fläche 4. Ordnung, wenn überhaupt eine, i. A. nur diese eine zulässt; aber diejenigen collinearen Erzeugungen, welche hier der besondern Beachtung werth schienen, führen vielleicht auch dort auf specielle beachtenswerthe Flächen 4. Ordnung. Nun hat man von den collinearen Erzeugungen einer ebenen Curve 3. Ordnung einmal diejenigen hervorgehoben, für welche die zugehörige eindeutige Trans-

*) Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen, diese Ann. Bd. XVIII, p. 1–32; ich werde diese Abh. immer mit H. S. citiren.

formation der Curve in sich involutorisch, und dann diejenigen, für welche sie linear wird; die erste Art hängt mit den Kegelschnittnetzen zusammen, als deren Tripelcurve die Curve betrachtet werden kann, die zweite mit der Gruppirung der Wendepunkte. Flächen 4. Ordnung der ersten Art, welche sich also so collinear erzeugen lassen, dass die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich involutorisch wird, sind nun die besonders von Herrn Reye genauer untersuchten Kernflächen von Flächengebüschen 2. Grades; ihr enger Zusammenhang mit den Kummer'schen Flächen zeigt, wie man von unserm Gesichtspunkte aus auch zu diesen Flächen kommt. Aber noch nicht angeregt ist die Frage *nach solchen collinear erzeugten Flächen 4. Ordnung, für welche die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich eine collineare wird.* Ich werde nun in dem Folgenden zeigen, dass diese Frage auf eine wohl umgrenzte und geometrisch leicht construirbare Classe von Flächen 4. Ordnung führt. Man erhält dieselben nämlich folgendermassen: Man nehme zwei Tetraeder, welche in einer später näher zu erörternden Weise vierfach hyperboloidisch liegen; legt man dann durch die 16 Schnittlinien der Seitenflächen derselben irgend eine Fläche 4. Ordnung, so ist diese von der gesuchten Art, und umgekehrt lässt sich jede Fläche 4. Ordnung der gesuchten Art in dieser Weise construiren, wobei allerdings die geradlinigen Flächen als genügend bekannt von der Untersuchung ausgeschlossen sind. Hieran schliesst sich nun die Frage nach solchen Flächen 4. Ordnung, welche diese Eigenschaften mehrfach besitzen; dieselbe wird beantwortet durch die Construction von Tetraedern, welche möglichst oft hyperboloidisch liegen. Dies führt zu zwei wesentlich verschiedenen Unterarten. Die eine erhält man durch zwei Tetraeder, welche neunfach hyperboloidisch liegen und einander gleichzeitig um- und eingeschrieben sind, die andre durch zwei Tetraeder, welche achtfach hyperboloidisch liegen; diese beiden Tetraeder sind aber nichts anderes als zwei Quadrupel harmonischer Ebenen. Beide Classen lassen 12 collineare Erzeugungen der erwähnten Art zu. Als eine Unterclasse der ersten ergiebt sich endlich die Fläche 4. Ordnung durch die 16 Schnittlinien zweier Quadrupel äquianharmonischer Ebenen, welche 144 solche Erzeugungen zulässt und zu 24 neunfach hyperboloidisch liegenden Tetraederpaaren gehört. Diese Fläche enthält 64 gerade Linien, welches die grösste Anzahl**) von geraden Linien ist, welche bisher auf einer nicht gerad-

*) Reye, Geometrie der Lage. 2. Aufl. Bd. II, p. 234 ff. und Borchardt's Journal f. r. u. a. Math., Bd. 82, p. 54.

**) In Salmon-Fiedlers Raumgeometrie 3. Aufl. Bd. II, p. 634 ist zwar angegeben, dass eine Fläche 4. Ordnung bis zu 80 geraden Linien besitzen darf, ohne geradlinig zu sein, es bedarf aber wohl kaum des Hinweises darauf, dass es nicht ausgemacht ist, dass wirklich eine Fläche 4. O. mit 80 Geraden existirt.

linigen Fläche 4. Ordnung nachgewiesen ist. So darf ich wohl hoffen, durch diese Zeilen die Aufmerksamkeit der Geometer auf eine neue Classe von Flächen 4. Ordnung gelenkt zu haben.

§ 1.

Ueber die allgemeinsten Eigenschaften unserer Flächenclasse.

Für die Behandlung derjenigen Flächen 4. Ordnung, welche sich durch vier collineare räumliche Ebenensysteme erzeugen lassen, sind die dadurch auf der Fläche bedingten Raumcurven 6. Ordnung mit 7 scheinbaren Doppelpunkten von besonderer Wichtigkeit; es mag hierbei gleichzeitig erwähnt werden, dass die Zahl von 7 scheinbaren Doppelpunkten ein dauerndes Kennzeichen dieser Raumcurven ist, auch wenn sie zerfallen, wie man sich nach der Aufzählung ihrer Unterarten von Herrn Nöther*) leicht überzeugen kann. Von diesen Raumcurven 6. Ordnung habe ich nun in meiner H. S. gezeigt, dass ihre Punkte eindeutig auf ihre dreifachen Secanten bezogen sind, und zwar ist die Natur dieser Beziehung in folgendem Satze enthalten:**)

Die dreifachen Secanten durch einen Punkt c *einer* c^6 *sind die Kanten eines solchen Trieders, dass jede Seitenfläche desselben die* c^6 *zum sechsten Male in einem Punkte* g *trifft, dessen conjugirte Secante die gegenüberliegende Kante* c *ist.*

Solcher Raumcurven 6. Ordnung giebt es nun auf unserer Fläche 4. Ordnung F^4 zwei dreifach unendliche Systeme $[c^6]$ und $[g^6]$ so, dass jede c^6 mit jeder g^6 auf einer Fläche 3. Ordnung liegt, also jede c^6 resp. g^6 durch drei Punkte auf F^4 i. A. eindeutig bestimmt ist. Die F^4 lässt nun selbst eine eindeutige Transformation in sich zu.***) *Ist* g *ein Punkt von* F^4 *und* c *die ihm für irgend eine durch ihn gehende* c^6 *conjugirte dreifache Secante, so schneidet diese* F^4 *zum vierten Male in dem dem Punkte* g *nach dieser Transformation entsprechenden Punkte* c. Hiernach entspricht also jeder c^6 resp. g^6 die Schnittcurve der Fläche ihrer dreifachen Secanten mit der F^4, also, da diese von der 8. Ordnung ist und die Raumcurve 6. Ordnung dreifach enthält, i. A. eine Curve 14. Ordnung. Da sie nun Punkt für Punkt der c^6 resp. g^6 entspricht, so kann sie nur zerfallen, wenn diese zerfallen, oder wenn dreifache Secanten der c^6 resp. g^6 in F^4 enthalten sind. Soll nun die Transformation eine lineare sein, so kommt nur der letzte Fall in Betracht, und es müssen dann also, wenn F^4 nicht geradlinig ist,

*) S. Nöther, eindeutige Raumtransformationen, diese Annalen Bd. III, pag. 564.

**) H. S. p. 18.

***) H. S. p. 30.

alle c^6 dieselben 8 auf F^4 liegenden Geraden $a_1, a_2, \cdots, a_8$ und ebenso alle g^6 dieselben 8 auf F^4 gelegenen Geraden $b_1, b_2, \cdots, b_8$ zu dreifachen Secanten haben. Den Fall, dass F^4 geradlinig ist, wollen wir als von geringerem Interesse von unserer Betrachtung ausschliessen.

Zunächst ist nun zu zeigen, dass keine Gerade a_i mit einer Geraden b_i identisch sein darf. Soll nämlich etwa a_1 auch dreifache Secante aller g^6 sein, so muss sie ein Theil aller dieser sein. Denn schneidet eine g^6 die a_1 in den drei Punkten $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$, so schneidet jede Fläche 3. Ordnung durch g^6 nur dann aus F^4 noch eine c^6 aus, welche a_1 zur dreifachen Secante hat, wenn entweder a_1 ein Theil von g^6 ist, oder $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ Knotenpunkte von F^4 sind, sodass dann alle c^6 und g^6 durch diese drei festen Punkte gehen. Dann müsste aber nach unserer Transformation jedem dieser Punkte jeder beliebige Punkt von F^4 entsprechen, was wir wiederum als uninteressant ausschliessen wollen. Legen wir nämlich irgend eine Gerade durch $\mathfrak{c}$, welche F^4 noch in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ schneidet, und legen durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ und irgend einen in der Ebene $[a, a_1]$ liegenden Punkt $\mathfrak{g}$ von F^4 eine c^6, welche ja dann nach Voraussetzung von selbst durch $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ gehen muss, so schneidet die dritte durch $\mathfrak{c}$ gehende dreifache Secante derselben die F^4 nach unserer Construction zum vierten Male in dem $\mathfrak{g}$ entsprechenden Punkte; dies ist aber $\mathfrak{c}$ selbst, da er ein Knotenpunkt sein soll. Da aber $\mathfrak{g}$ ganz beliebig war, so würde also die von uns ausgeschlossene Folge sich ergeben, dass dem Punkte $\mathfrak{c}$ und ebenso den Punkten $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ jeder beliebige Punkt von F^4 entspräche. Wir haben also nur noch zu prüfen, ob a_1 ein Theil aller g^6 sein kann.

Nun können unsere Raumcurven 6. Ordnung auf zwei wesentlich verschiedene Arten in eine gerade Linie und eine Curve 5. Ordnung zerfallen, nämlich erstens in eine Gerade und eine Curve 5. Ordnung vom Geschlechte eins, welche die Gerade zur dreifachen Secante hat, und zweitens in eine Gerade und eine Curve 5. Ordnung vom Geschlechte zwei, welche die Gerade zweimal schneidet.*) Die Fläche der dreifachen Secanten von g^6 besteht im ersten Falle erstens aus der Fläche der dreifachen Secanten von g^5, welche von der 5. Ordnung ist und g^5 zur Doppelcurve hat, und zweitens aus der Fläche derjenigen Geraden, welche g^5 zweimal und die Gerade g einmal treffen; diese ist von der dritten Ordnung und hat g zur Doppelgeraden. Von diesen schneidet also die erste die F^4 noch in einer Curve 9. Ordnung, die zweite in einer Curve 5. Ordnung. Von den drei durch jeden Punkt von g^5 gehenden dreifachen Secanten sind zwei, c_1 und c_2, dreifache Secanten von g^5 und die dritte, c, eine g^5 zweimal und g einmal schneidende Gerade. Nun schneiden offenbar die Ebenen $[c, c_1]$ und

*) S. Nöther a. a. O.

$[c, c_2]$ die $g^6 = g^5 + g$ zum sechsten Male in einem Punkte von g^5, die Ebene $[c_1, c_2]$ dagegen in einem Punkte von g. Es entspricht daher nach der eindeutigen Transformation der F^4 in sich der g^5 die Curve 9. Ordnung und der g die Curve 5. Ordnung. Soll also die Transformation eine lineare sein, so müssen vier von den 8 Geraden b_i dreifache Secanten von g^5 sein und die andern vier g^5 zweimal und g einmal schneidende Geraden. Dann schneidet die Fläche 3. Ordnung, welche g zur Doppelgeraden hat und durch g^5 geht, die F^4 noch in diesen vier Geraden und in noch einer fünften ebensolchen, welche g entsprechen würde. Diese fünf Geraden aber müssten mit g eine c^6 bilden, weil sie mit $g^5 + g$ auf einer Fläche 3. Ordnung liegen. Nun schneiden diese fünf Geraden sich entweder gar nicht oder zu zweien auf g, sodass die aus ihnen und g bestehende Raumcurve 6. Ordnung im günstigsten Falle immer noch 8 scheinbare Doppelpunkte besitzt, also in dem Falle, dass sich zweimal zwei von den fünf Geraden auf g schneiden. Es folgt also, dass eine g^6 auf die beschriebene Art in unserm Falle nicht zerfallen kann.

Ist nun zweitens g^5 vom Geschlechte zwei und schneidet g sie zweimal, so besteht die Fläche der dreifachen Secanten erstens aus der Fläche der dreifachen Secanten von g^5, welche von der zweiten Ordnung ist, und zweitens aus der Fläche derjenigen Geraden, welche g^5 zweimal und g einmal treffen; diese ist von der sechsten Ordnung, hat g^5 zur Doppelcurve und g zur dreifachen Geraden. Von diesen schneidet die erste die F^4 noch in einer Curve 3. Ordnung und die zweite in einer Curve 11. Ordnung. Von den drei durch jeden Punkt von g^5 gehenden dreifachen Secanten sind zwei, c_1 und c_2, g^5 zweimal und g einmal schneidende Geraden, die dritte, c, eine dreifache Secante von g^5. Nun schneiden offenbar die Ebenen $[c, c_1]$ und $[c, c_2]$ die $g^6 = g^5 + g$ zum sechsten Male in einem Punkte von g^5, die Ebene $[c_1, c_2]$ dagegen in Punkten von g. Es entspricht daher der g^5 die Curve 11. Ordnung und der g die Curve 3. Ordnung. Soll also die Transformation eine lineare sein, so müssen zwei von den Geraden b_i dreifache Secanten von g^5 sein und die übrigen 6 g^5 zweimal und g einmal schneidende Geraden. Ein solches Zerfallen der g^6 ist daher von vornherein nicht ausgeschlossen, dagegen können nicht alle g^6 in dieser Weise zerfallen so, dass g fest bleibt. Denn die Flächen der dreifachen Secanten aller dieser g^5 müssten dann ja alle durch zwei feste b_i und die feste der g entsprechende Gerade gehen, könnten also aus F^4 nicht eine dreifache Mannichfaltigkeit von g^5 ausschneiden. Es ist also nicht möglich, dass alle g^6 eine feste Gerade als Theil enthalten; *folglich kann auch keine Gerade a_i mit einer Geraden b_i zusammenfallen.*

Daraus folgt nun weiter, dass keine zwei a_i und ebenso natürlich

auch keine zwei b_i sich schneiden können. Schnitten sich nämlich etwa a_1 und a_2, so wäre ihr Schnittpunkt ein Punkt aller c^6, deren dreifache Secanten ja a_1 und a_2 sein sollen,*) falls nicht alle c^6 aus einer in der Ebene $[a_1, a_2]$ liegenden ebenen Curve 3. Ordnung und sie dreimal schneidenden Raumcurven 3. Ordnung bestehen; von der ersteren müsste aber a_1 oder a_2 ein Theil sein, was, wie wir soeben gesehen haben, nicht möglich ist. Gehen aber alle c^6 durch einen festen Punkt von a_1, so können wir dadurch, dass wir die drei bestimmenden Punkte einer c^6 auf a_1 annehmen, eine c^6 finden, welche aus a_1 und einer c^5 vom Geschlechte zwei besteht. Die Fläche 2. Ordnung durch diese c^5 schneidet nun aus F^4 noch eine Raumcurve 3. Ordnung aus, welche mit der in irgend einer Ebene durch a_1 gelegenen ebenen Curve 3. Ordnung eine g^6 bildet. Diese hätte also a_1 zur dreifachen Secante, was wiederum dem oben Bewiesenen widerspricht. Es folgt also: *Die durch vier collineare Systeme erzeugte Fläche* 4. *Ordnung, für welche die zugehörige eindeutige Transformation eine collineare wird, enthält zwei Gruppen von* 8 *geraden Linien, und keine zwei Geraden derselben Gruppe schneiden sich.*

Nun können wir auch Weiteres über die gegenseitige Lage dieser 16 geraden Linien erschliessen. Nehmen wir auf a_1 einen eine g^6 bestimmenden Punkt an, so ist a_1 ein Theil aller dieser doppelt unendlich vielen g^6 und der andere Theil ist immer eine g^5 vom Geschlechte 2. Wir sahen nun, dass dann nur zwei von den Geraden b_i, etwa b_7 und b_8, dreifache Secanten von g^5 sind, die übrigen aber, $b_1, b_2, \cdots, b_6$, die g^5 nur zweimal, aber ausserdem a_1 schneiden. Es folgt also, *dass jede Gerade von* 6 *Geraden der andern Gruppe geschnitten wird.* Die durch g^5 gehende Fläche 2. Ordnung F^2 bildet nun mit irgend einer Ebene E durch a_1 eine $a_1 + g^5$ enthaltende Fläche 3. Ordnung, welche aus F^4 noch eine c^6 ausschneidet. Diese besteht nun aus der Curve 3. Ordnung c^3 in E, aus b_7, b_8 und einer b_7, b_8 und c^3 schneidenden Geraden c_1, welche der a_1 entspricht. Diese darf offenbar keine Gerade a_i sein, da eine solche nicht Theil einer c^6 sein darf, wie leicht aus dem Beweise des vorigen Absatzes folgt; weil sie aber b_7 und b_8 schneidet, darf sie auch keine Gerade b_i sein. Schon hieraus sehen wir, dass F^4 noch 16 andre gerade Linien enthält. Nun müssen die Geraden $a_1, a_2, \cdots, a_8$ dreifache Secanten der $c^6 = c^3 + b_7 + b_8 + c_1$ sein; die a_1 ist es von selbst. Die übrigen, $a_2, a_3, \cdots, a_8$, werden also c^3 je einmal und je zwei von den Geraden b_7, b_8 und c_1 schneiden. Nun können b_7 und c_1, da sie sich selbst schneiden, nur von einer Geraden, etwa a_2, gleichzeitig geschnitten werden, da sich sonst entweder zwei Geraden a_i schnitten, oder F^4 im Punkte (b_7, c_1) einen

*) Cfr. H. S. p. 18, 1. Note.

Knotenpunkt hätte, welchem dann wieder jeder Punkt von F^4 entsprechen müsste; ebenso können auch b_8 und c_1 nur von einer Geraden, etwa a_3, gleichzeitig geschnitten werden. Es werden also b_7 und b_8 von den Geraden $a_4, a_5, \cdots, a_8$ gleichzeitig geschnitten. Die Gerade a_1 schneidet nun, wie wir gesehen haben, die Geraden $b_1, b_2, \cdots, b_6$. Da nun a_2 von den Geraden b_7, b_8 nur b_7 schneidet, so muss sie noch fünf von den übrigen Geraden schneiden, also etwa b_1, b_2, b_3, b_4, b_5. Dasselbe gilt von der Geraden a_3, sie muss b_8, b_6 und noch vier von diesen Geraden schneiden, etwa b_1, b_2, b_3, b_4; alle fünf, also auch b_5, kann sie nicht schneiden, weil sonst das durch a_1, a_2, a_3 bestimmte Hyperboloid mit F^4 fünf Geraden derselben Erzeugung gemein hätte, also ein Theil von F^4 wäre. Betrachten wir nunmehr die Geraden a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, so müssen diese von den Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 entweder alle oder höchstens zwei davon schneiden, weil nach dem Bisherigen diese vier Geraden derselben Erzeugung eines Hyperboloids angehören. Da aber jede von den Geraden a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 sechs von Geraden b_i schneiden muss, so muss jede derselben entweder die Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 oder die Geraden b_5, b_6, b_7, b_8 gleichzeitig schneiden. Nun ist klar, dass sie nicht alle, b_5, b_6, b_7, b_8, gleichzeitig schneiden können, aber auch nicht mehr als eine noch die Geraden b_1, b_2, b_3, b_4. Also bleibt nur übrig, dass noch eine, etwa a_4, die Geraden b_1, b_2, b_3, b_4 gleichzeitig schneidet, und die übrigen, a_5, a_6, a_7, a_8, die Geraden b_5, b_6, b_7, b_8 gleichzeitig schneiden. Hiermit ist nun die Gruppirung der 16 geraden Linien ganz klar gelegt. *Die 16 Geraden sind der vollständige Schnitt der F^4 mit zwei Flächen 2. Grades.*

Wir können diese Gruppirung gut durch das folgende Schema zur Anschauung bringen:

a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4
b_5	b_6	b_7	b_8	a_5	a_6	a_7	a_8

Von den nicht mit ihnen auf demselben Hyperboloide liegenden Geraden b_5, b_6, b_7, b_8 schneidet jede der Geraden a_1, a_2, a_3, a_4 noch zwei. In der That schneidet a_1 die Geraden: b_5, b_6; $a_2 : b_5$ und b_7; $a_3 : b_6$ und b_8; a_4 aber muss b_7 und b_8 schneiden. b_7 schneidet nämlich a_2 und darf a_1 oder a_2 nicht schneiden, weil diese sonst b_5, b_6, b_7 resp. b_6, b_7, b_8 schnitten, also in dem zweiten Hyperboloid enthalten wären; also kann b_7 nur noch a_4 schneiden. Ebenso folgt, dass b_8 ausser a_3 noch a_4 schneiden muss. Die 8 Geraden links liegen also in folgenden 8 Ebenen:

$$A = [a_1, b_5], \quad B = [a_2, b_7], \quad C = [a_4, b_5], \quad D = [a_3, b_6];$$
$$A' = [b_5, a_2], \quad B' = [b_7, a_4], \quad C' = [b_8, a_3], \quad D' = [b_6, a_1],$$

sodass wir die acht geraden Linien auch in der Form schreiben können:

$$AA', \quad BB', \quad CC', \quad DD';$$
$$AD', \quad BA', \quad CB', \quad DC'.$$

Ganz ebenso sind natürlich die Geraden rechts zu behandeln. Die Gerade b_1 schneidet etwa a_5 und a_6, die a_5 ebenso b_1 und b_2; dann darf b_2 ausser a_5 nicht auch a_6 schneiden. Denn sonst müssten auch b_3 und b_4 die a_7 und a_8 gleichzeitig schneiden, und legen wir dann durch a_7 eine Ebene E, welche F^4 in einer ebenen Curve 3. Ordnung c^3 schneidet, so bildet diese mit b_1 und b_2 und einer dritten Geraden eine c^6, die a_8 also, welche dreifache Secante derselben sein muss, müsste, da sie weder b_1 noch b_2 trifft, c^3 zweimal schneiden; dies ist aber nicht möglich, weil sich sonst a_7 und a_8 schnitten. Es wird also b_2 ausser a_5 etwa noch a_7 schneiden, a_7 ausser b_2 etwa noch b_3, dann wird b_3 ausser a_7 noch a_8 schneiden, a_8 ausser b_3 noch b_4, b_4 ausser a_8 noch a_6, und a_6 schneidet ausser b_4 noch b_1. Es werden sich also auch diese 8 Geraden als Schnittlinien von zweimal vier Ebenen A_1, B_1, C_1, D_1; A_1', B_1', C_1', D_1' darstellen und zwar in der Form:

$$A_1A_1', \quad B_1B_1', \quad C_1C_1', \quad D_1D_1';$$
$$A_1D_1', \quad B_1A_1', \quad C_1B_1', \quad D_1C_1'.$$

Nun kann man leicht sehen, dass jetzt F^4 noch die 16 weiteren Schnittlinien der Seitenflächen dieser beiden Tetraederpaare enthält. Die vier Ebenen A, B, C, D sowohl als die vier Ebenen A', B', C', D' bilden nämlich zwei Flächen 4. Ordnung, welche sich in 16 geraden Linien schneiden, durch die ein ganzes Büschel von Flächen 4. Ordnung geht. Wählen wir nun den eine Fläche des Büschels bestimmenden Punkt irgendwo auf b_1, so ist diese Fläche 4. Ordnung mit F^4 identisch. Sie geht nämlich erstens durch die Geraden a_1, a_2, a_3, a_4; b_5, b_6, b_7, b_8 und, da b_1 von selbst schon mit diesen vier Punkte gemein hat, auch durch b_1. Weil aber b_1 die a_5 und a_6 schneidet, so enthält sie auch diese beiden Geraden; weil a_5 noch b_2 schneidet, so enthält sie auch b_2 u. s. f., kurz sie enthält alle 16 geraden Linien a_i und b_i. Nun ist ferner die a_1 entsprechende Gerade $c_1 = (B, C')$, liegt also ebenfalls auf dieser Fläche 4. Ordnung, diese hat folglich mit F^4 17 gerade Linien gemeinschaftlich, ist also mit F^4 identisch. Die F^4 enthält also in der That die 8 weiteren Schnittlinien der Seitenflächen der beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$. Ebenso beweist man dasselbe von den 8 übrigen Schnittlinien der Seitenflächen der beiden Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ und $A_1'B_1'C_1'D_1'$. Doch ergiebt sich das Enthaltensein der 16 Schnittlinien der Seitenflächen dieser zweiten Tetraeder schon aus dem der ersten. Um dies deutlich einzusehen, müssen wir näher auf die eindeutigen Transformationen einer Raumcurve 1. Species in

sich eingehen. Als vorläufiges Resultat erhalten wir, *dass die gesuchte Fläche 4. Ordnung die 32 Schnittlinien der Seitenflächen von zweimal zwei Tetraedern enthält.*

§ 2.

Ueber die eindeutigen Transformationen einer Raumcurve 4. Ordnung 1. Species in sich.

Obwohl wir für unsre Zwecke eigentlich die gemeinsamen Tangentialebenen zweier Flächen 2. Grades behandeln müssten, so betrachten wir doch der einfachen Terminologie wegen die Schnittcurve c^4 zweier Flächen 2. Grades. Wir können die eindeutigen Transformationen derselben in sich aus denen einer ebenen Curve 3. Ordnung c^3 ableiten, da wir die c^4 immer in eine solche projiciren können. Hierbei ist besonders hervorzuheben, dass Punktepaare, deren Verbindungslinien die Erzeugung einer Fläche 2. Grades bilden, sich in Punktepaare projiciren, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt der c^3 gehen; und umgekehrt. Was nun die Transformationen der c^3 in sich betrifft, so giebt es zwei wesentlich verschiedene Arten derselben*). Bei der Transformation erster Art gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt der c^3; diese können wir *Projectionen* der c^3 in sich nennen. Mit Hülfe solcher Projectionen der c^3 der in sich kann man leicht den Satz von den Steiner'schen Polygonen beweisen:

I. *Ist einer Curve 3. Ordnung ein $2n$-Eck eingeschrieben, dessen Seiten abwechselnd durch zwei feste Punkte der Curve gehen, so sind ihr unendlich viel solche $2n$-Ecke eingeschrieben, deren Seiten abwechselnd durch dieselben beiden festen Punkte gehen.*

Sind nämlich S und T die beiden festen Punkte und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_{2n}$ die Ecken des $2n$-Ecks so, dass $\mathfrak{a}_{2i-1}\mathfrak{a}_{2i}$ immer durch S und $\mathfrak{a}_{2i}\mathfrak{a}_{2i+1}$ immer durch T geht, und $\mathfrak{c}_1$ und X zwei beliebige Punkte von c^3, schneiden ferner $\mathfrak{a}_1 X$ die c^3 zum dritten Male in $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_1$ in Y, so projicire man jetzt die ungeraden Eckpunkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_3, \cdots, \mathfrak{a}_{2n-1}$ von X aus und die geraden Eckpunkte $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_4, \cdots, \mathfrak{a}_{2n}$ von Y aus auf c^3. Dieselben projiciren sich dann in die Ecken $\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_{2n}$ eines $2n$-Ecks, dessen Seiten abwechselnd durch zwei feste Punkte S' und T' von c^3

*) Cfr. H. S. p. 6, Note. Die folgenden Zeilen enthalten nur den geometrischen Beweis von Sätzen, die sich leicht aus der Darstellung der c^3 und c^4 durch elliptische Functionen ergeben. Es erschien mir jedoch zweckmässig dieselbe hier nicht vorauszusetzen. Die Zurückführung dieser Sätze auf die eindeutigen Transformationen bringt in der That die Subtraction und Addition der Argumente der elliptischen Functionen vollständig zum Ausdruck, sodass die Beweise bei geringeren Voraussetzungen doch nicht weniger einfach sind.

gehen; schneidet nämlich XY die c^3 zum dritten Male in Z, so liegen Z, S, S' und Z, T, T' in je einer Geraden. Projicirt man jetzt umgekehrt die ungeraden Eckpunkte dieses $2n$-Ecks von Y und die geraden von X aus, so projiciren sich dieselben in die Ecken $\mathfrak{c}_1, \cdots, \mathfrak{c}_{2n}$ eines $2n$-Ecks, dessen Seiten abwechselnd durch S und T gehen; unser Satz ist also bewiesen, da die eine Ecke $\mathfrak{c}_1$ ganz willkürlich war*). Nennen wir S und T ein Paar von Fundamentalpunkten für ein der c^3 eingeschriebenes $2n$-Eck, so folgt gleichzeitig, dass *ein solches Punktepaar durch alle Projectionen in ein ebensolches übergeht;* in der That ist ja Z ein willkürlicher Punkt von c^3.

Was nun die Transformationen der zweiten Art betrifft, so sind dieselben durch folgenden Satz charakterisirt:

II. *Sind* $\mathfrak{c}, \mathfrak{g}$ *und* $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{g}_1$ *zwei Paare entsprechender Punkte, so treffen sich die Geraden* $\mathfrak{c}\mathfrak{g}_1$ *und* $\mathfrak{g}\mathfrak{c}_1$ *in einem Punkte von* c^3.

Wir wollen diese kurz eine *Transformation* der c^3 in sich nennen; jeder derselben gehört ja eine collineare Erzeugung der c^3 zu**). Es ist jetzt leicht, folgende Sätze zu beweisen:

III. *Die Aufeinanderfolge zweier Projectionen sowohl als die zweier Transformationen liefert wieder eine neue Transformation.*

Entspricht in der That bei einer Projection vom Punkte C aus dem Punkte $\mathfrak{g}$ der Punkt $\mathfrak{c}_1$ und bei der andern vom Punkte G aus dem Punkte $\mathfrak{c}_1$ der Punkt $\mathfrak{c}$, so entspricht dem Punkte $\mathfrak{c}$ der Punkt $\mathfrak{g}$ in einer Transformation, bei welcher dem Punkte C der Punkt G entspricht.

Entsprechen zweitens bei einer ersten Transformation den Punkten $C, \mathfrak{c}$ die Punkte G und $\mathfrak{g}$ und bei einer zweiten den Punkten C und $\mathfrak{c}'$ die Punkte G' und $\mathfrak{g}$, so schneiden $\mathfrak{c}G$ und $\mathfrak{c}'G'$ die c^3 in demselben Punkte wie $C\mathfrak{g}$; es entsprechen sich also $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ bei einer Transformation, bei welcher dem Punkte G' der Punkt G entspricht. Denkt man sich also C, G und G' fest, die übrigen Punkte variabel, so ist auch der zweite Theil unseres Satzes bewiesen.

Ebenso folgt der Satz:

IV. *Die Aufeinanderfolge einer Transformation und einer Projection liefert eine Projection.*

Entspricht in der That bei der Transformation dem Punkte $\mathfrak{g}$ der Punkt $\mathfrak{c}$ und bei der Projection vom Punkte G aus dem Punkte $\mathfrak{c}$ der Punkt $\mathfrak{c}_1$, so schneidet die Gerade $\mathfrak{c}, \mathfrak{g}$ die c^3 in dem dem Punkte G für die Transformation entsprechenden Punkte C, also in einem festen Punkte. Hieraus ergiebt sich nun sofort:

---

*) Ich verdanke diesen Beweis einer Mittheilung meines Freundes Hurwitz. Man vergleiche übrigens Küpper, Ueber die Steiner'schen Polygone auf einer Curve 3. Ordnung, aus d. Abh. d. böhm. Ges. d. Wiss. VI. Folge, 6. Bd.

**) Cfr. H. S. p. 6.

V. *Bei einer Transformation verwandeln sich Punktepaare, deren Verbindungslinien durch einen festen Punkt der c^3 laufen, in ebensolche.*

Entspricht in der That einem solchen Punktepaar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ das Paar $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, so geht der Punkt $\mathfrak{b}$ durch die Aufeinanderfolge einer Transformation, einer Projection und der Umkehrung der ersten Transformation, also durch eine Projection in den Punkt $\mathfrak{b}_1$ über. Die dieser Art eindeutig auf einander bezogenen Strahlenbüschel $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1)$ und $(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1)$ müssen offenbar projectivisch sein.

Alle diese Sätze übertragen sich nun leicht auf die c^4. Auch diese lässt eindeutige Transformationen verschiedener Art in sich zu. Die erste, die *Projection*, wird durch die Erzeugenden von c^4 enthaltenden Flächen 2. Grades vermittelt, während sich die eigentliche *Transformation* immer durch zwei Projectionen ersetzen lässt. Als besonders wichtig ist hervorzuheben, dass bei einer Transformation Punktepaare, deren Verbindungslinien auf einer Fläche 2. Grades liegen, in ebensolche übergehen; und zwar sind die Geraden der einen Fläche auf die entsprechenden der andern projectivisch bezogen. Ist also die Transformation im Besondern eine solche, dass den beiden Erzeugungen jeder Fläche 2. Grades durch c^4 in dieser Weise die beiden Erzeugungen einer und derselben zweiten Fläche entsprechen, so ist die Transformation eine lineare. Denn dann ist jede Fläche 2. Grades durch c^4 projectivisch auf die ihr entsprechende bezogen, wenn man jedem Punkte derselben, durch welchen ja zwei Erzeugende gehen, den Schnittpunkt der beiden entsprechenden Erzeugenden zuweist*); es entsprechen also allen Punkten derselben Ebene wieder Punkte derselben Ebene. Da ferner diese Ebene durch die vier Schnittpunkte mit der c^4 eindeutig bestimmt ist, so entspricht derselben Ebene auch wieder dieselbe Ebene, wenn man zu einer andern Fläche 2. Grades übergeht. Wir erhalten also eine eindeutige Transformation des Raumes, bei welcher je drei Punkten in einer Geraden drei ebensolche entsprechen, dieselbe ist also eine collineare.

Aus dem Satze I ergiebt sich nun weiter, dass, wenn einer c^4 ein $2n$-Eck $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_{2n}$ eingeschrieben ist, dessen Seiten abwechselnd zwei Flächen 2. Grades angehören, der c^4 unendlich viel solche $2n$-Ecke eingeschrieben sind. Wählen wir ferner als den dort erwähnten Punkt Z den Punkt, in welchem c^3 von der Tangente der c^4 im Projectionspunkte getroffen wird, so erkennt man leicht, dass der c^4 auch unendlich viel $2n$-Ecke $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \cdots, \mathfrak{b}_{2n}$ eingeschrieben sind, deren Seiten abwechselnd den zweiten Erzeugungen derselben Flächen 2. Grades angehören. Nun vermitteln die Erzeugenden dieser

*) Cfr. Zeuthen, théorie des figures etc. diese Ann. Bd. XVIII, p. 40.

beiden Flächen 2. Grades zwei Projectionen der c^4 in sich, deren Aufeinanderfolge eine Transformation ergiebt, bei welcher a_{2i-1}, a_{2i} in resp. a_{2i+1}, a_{2i-2} übergehen, aber b_{2i+1}, b_{2i-2} in resp. b_{2i-1}, b_{2i}; das Letztere erkennt man leicht, wenn man wieder auf die c^3 zurückgeht, dann entspricht nämlich dem Punkte T der Punkt S, dem Punkte S' aber der Punkt T'. Es folgt hieraus also, dass auch die Geraden $a_{2i+1}\,a_{2i-2}$, $a_{2i-2}\,a_{2i+3}$ u. s. w., je einer Fläche 2. Grades angehören.

Was nun die Transformationen selbst angeht, so sind sie offenbar cyklisch von der Periode n, d. h. wiederholt man dieselbe Transformation n-mal, so kommt man wieder auf den ursprünglichen Punkt zurück.

Ist nun n im Besonderen $= 4$, so wird diese Transformation eine lineare, d. h. den beiden Erzeugungen jeder Fläche 2. Grades durch c^4 entsprechen die Erzeugungen einer und derselben Fläche 2. Grades. Schneiden nämlich die Geraden durch a_1, a_3, a_5, a_7 der einen Erzeugung dieser Fläche die c^4 zum zweiten Male in resp. c_2, c_4, c_6, c_8 und die der zweiten Erzeugung in resp. b_2, b_4, b_6, b_8, so entsprechen den Geraden: a_1c_2, a_3c_4, a_5c_6, a_7c_8; a_1b_2, a_3b_4, a_5b_6, a_7b_8 die resp. Geraden: a_3c_8, a_5c_2, a_7c_4, a_1c_6; a_3b_8, a_5b_2, a_7b_4, a_1b_6. Man bemerkt, dass die Bezeichnung der zweiten Schnittpunkte eine richtige ist; sie könnten nämlich etwa noch mit c_1, c_3, c_5, c_7 bezeichnet werden müssen, dann würde aber jede Erzeugung sich selbst entsprechen, was dem widerspräche, dass die Erzeugung a_1a_2, a_3a_4, a_5a_6, a_7a_8 nicht sich selbst entspricht. Nun gehören die Geraden a_3c_8, a_5c_2, a_7c_4, a_1c_6 sowohl als die Geraden a_3b_8, a_5b_2, a_7b_4, a_1b_6 je einer Fläche 2. Grades an. Weil aber z. B. a_1c_2 und a_5b_6 sich schneiden, so schneiden sich auch a_1b_6 und a_5c_2, und zwar ausserhalb c^4, sodass beide Flächen 2. Grades identisch sind, was zu beweisen war. *Die Transformation also, welche die Punkte* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8 *in die Punkte* a_3, a_8, a_5, a_2, a_7, a_4, a_1, a_6 *überführt, ist gleichzeitig eine collineare des Raumes.*

Es sei beiläufig bemerkt, dass die zu c^4 gehörigen Kegelspitzen nicht in sich, sondern ebenfalls cyklisch in einander übergehen, weil von den Flächen 2. Grades durch c^4 nur zwei in sich übergehen. Sind 1, 2, 3, 4 die in dieser Collineation sich selbst entsprechenden Punkte, so geht die sich selbst entsprechende Fläche 2. Grades durch c^4, welche durch 1 geht, noch etwa durch 2 und berührt in 1 und 2 die Ebenen 134 und 234, ebenso geht die zweite Fläche durch 3 und 4 und berührt dort die Ebenen 134 und 124. Man sieht also, dass die Kanten 12 und 34 des sich selbst entsprechenden Tetraeders ausgezeichnet sind; während die Punkte der übrigen Kanten erst nach viermaliger Wiederholung der Collineation in sich übergehen, gehen die Punkte von 12 und 34 schon nach zweimaliger Wiederholung

derselben in sich über. Sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_4$ vier einander im Cyklus entsprechende Punkte, so werden jene Kanten von allen Geraden $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3$, $\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_4$ getroffen*).

§ 3.

Die Construction der Fläche.

Mit den Resultaten des vorigen Paragraphen ausgerüstet gehen wir nunmehr wieder an die Betrachtung der beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$, indem wir Alles ins Duale übersetzen. Weil:

$$AA',\ BB',\ CC',\ DD'$$

und

$$AD',\ BA',\ CB',\ DC',$$

wie wir gesehen haben, je einer Fläche 2. Grades angehören, so bilden die Ebenen $A, A', B, B', C, C', D, D'$ die Seitenflächen eines Octaeders, welches zwei Flächen 2. Grades gleichzeitig umschrieben ist, und dessen Kanten abwechselnd den Erzeugungen dieser angehören; es sind also denselben beiden Flächen 2. Grades unendlich viel solche Octaeder umgeschrieben, gleichzeitig aber unendlich viel solche, deren Kanten abwechselnd den zweiten Erzeugungen derselben Flächen angehören. Sind nun $A_1, A_1', B_1, B_1', C_1, C_1', D_1, D_1'$ die Seitenflächen eines solchen Octaeders, dass die Geraden:

AA', BB', CC', DD' die Geraden: $A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', D_1D_1'$

und die Geraden:

AD', BA', CB', DC' „ „ : $A_1D_1', B_1A_1', C_1B_1', D_1C_1'$

gleichzeitig schneiden, so wissen wir, dass durch dieselbe Collineation die Ebenen:

(I) $A, B, C, D;\ A', B', C', D';\ A_1, B_1, C_1, D_1;\ A_1', B_1', C_1', D_1'$ in: $B, C, D, A;\ D', A', B', C';\ D_1, A_1, B_1, C_1;\ B_1', C_1', D_1', A_1'$

übergehen. Es schneiden folglich auch die Geraden,

AC', BD', CA', DB' die Geraden: $A_1C_1', B_1D_1', C_1A_1', D_1B_1'$

und die Geraden:

AB', BC', CD', DA' „ „ : $A_1B_1', B_1C_1', C_1D_1', D_1A_1'$,

und diese beiden letzten Flächen 2. Grades gehören mit den ersten beiden derselben Schaar an. Legen wir nun durch die 16 Schnittlinien der Seitenflächen der ersten beiden Tetraeder eine Fläche 4. Ordnung F^4, welche noch einen ausserhalb von AA', BB', CC', DD' gelegenen Punkt von A_1A_1' enthält, so enthält diese F^4 auch die 16 Schnittlinien der Seitenflächen der zweiten beiden Tetraeder; man zeigt nämlich leicht, dass jede dieser Geraden mehr als vier Punkte mit F^4 gemein hat, weil dasselbe ja von A_1A_1' gilt.

*) Bezüglich dieser cyklischen Collineation vergl. die vorhergehende Abhandlung von Herrn H. Schroeter.

Nun haben wir bereits in § 1. gesehen, dass diese F^4 mit der Fläche identisch ist, welche sich durch vier collineare Systeme so erzeugen lässt, dass die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich eine lineare wird. Wir sehen also, dass solche Flächen immer zweimal 16 gerade Linien enthalten, welche die Schnittlinien der Seitenflächen je zweier vierfach hyperboloidisch liegender Tetraeder sind; und zwar gehen die durch die vier hyperboloidischen Lagen der beiden Tetraeder bedingten Beziehungen ihrer Seitenflächen durch cyklische Vertauschung von der Periode 4 aus einander hervor. Aber man kann auch diese F^4 als eine beliebige Fläche 4. Ordnung durch die 16 Schnittlinien der Seitenflächen der ersten beiden Tetraeder betrachten und von ihr beweisen, dass sie sich durch vier collineare Systeme so erzeugen lässt, dass die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich gerade jene oben definirte collineare wird; als Resultat des ersten Paragraphen bleibt nur als wichtig hervorzuheben, dass diese Fläche gleichzeitig die allgemeinste der bezeichneten Art ist.

Schneide nämlich irgend eine Ebene E durch AA' die F^4 in einer ebenen Curve 3. Ordnung c^3, so bildet diese c^3 mit CB', DC' und DB' eine Raumcurve 6. Ordnung mit 7 scheinbaren Doppelpunkten; denn jede dieser drei Geraden trifft, da sie AA' nicht trifft, die c^3, ausserdem aber schneiden sich CB' und DC' nicht. Von dieser c^6 aus kann man nun zwei Systeme von dreifach unendlich vielen Raumcurven 6. Ordnung auf F^4 ableiten, welche zu einer collinearen Erzeugung der F^4 führen*). Nun sind aber:

$$AA',\ BB',\ CC',\ DD';\quad A_1D_1',\ B_1A_1',\ C_1B_1',\ D_1C_1'$$

dreifache Secanten dieser c^6, es sind die Geraden a_i; denn ausser AA', welche c^3 dreimal trifft, schneidet jede dieser Geraden c^3 einmal und je zwei von den Geraden CB', DC', DB'. Ebenso haben die Geraden:

$$A_1A_1',\ B_1B_1',\ C_1C_1',\ D_1D_1';\quad AD',\ BA',\ CB',\ DC'$$

entweder keinen Punkt mit dieser c^6 gemein oder sind Theile derselben, wie CB' und DC'; denn die ersten sechs Geraden schneiden AA', also c^3 nicht. Es schneidet folglich jede Fläche 3. Ordnung durch diese c^6 die F^4 noch in einer g^6, welche mit keiner der ersten 8 Geraden a_i einen Punkt gemein hat, dagegen mit jeder der zweiten 8 Geraden b_i je drei. Dies letztere ist nur für die Geraden CB' und DC' nicht sofort einleuchtend. Wenn aber die Schnittlinie 12. Ordnung einer Fläche 4. Ordnung mit einer Fläche 3. Ordnung in eine Gerade g und eine Curve 11. Ordnung zerfällt, so hat die letztere

*) Cfr. H. S. p. 31.

mit g, wie man aus der Abbildung der Fläche 3. Ordung auf eine Ebene leicht erkennt, noch 5 Punkte gemein. Von diesen fallen nun hier zwei fort, bei CB' sowohl als bei DC', nämlich je ein Schnittpunkt mit c^3 und DB', sodass noch je drei Schnittpunkte der g^6 mit CB' und DC' übrig bleiben. Es sind also die b_i dreifache Secanten aller g^6 und, weil keine der a_i mit einer g^6 einen Punkt gemein hat, die a_i dreifache Secanten aller c^6, welche aus der ursprünglichen $c^6 = c^3 + CB' + DC' + DB'$ entstehen. Es ist folglich die nothwendige Bedingung dafür erfüllt, dass die eindeutige Transformation, welche der definirten collinearen Erzeugung der F^4 zugehört, eine collineare des Raumes wird. Wir beweisen nunmehr, dass sie wirklich eine solche ist.

Zu diesem Zwecke bemerke man, dass nach dem, was in § 1. über die aus einer a_i und einer g^5 bestehende g^6 gesagt ist, der AA' die DB' entspricht. Zu dieser Geraden kommt man nun folgendermassen. Man suche erst die beiden Geraden b_i, CB' und DC', welche AA' nicht treffen, ferner die nicht zu den a_i oder b_i gehörige Gerade der F^4, welche CB' und DC' schneidet, aber nicht AA'; dies ist die einzige Gerade DB'. Macht man für die übrigen Geraden dieselben Schlüsse, so folgt, dass den Geraden

$$AA',\ BB',\ CC',\ DD';\quad A_1D_1',\ B_1A_1',\ C_1B_1',\ D_1C_1'\quad .$$

die Geraden:

$$DB',\ AC',\ BD',\ CA';\quad B_1C_1',\ C_1D_1',\ D_1A_1',\ A_1B_1'$$

entsprechen, und ebenso im umgekehrten Sinne den Geraden:

$$A_1A_1',\ B_1B_1',\ C_1C_1',\ D_1D_1';\quad AD',\ BA',\ CB',\ DC'$$

die Geraden:

$$D_1B_1',\ A_1C_1',\ B_1D_1',\ C_1A_1';\quad BC',\ CD',\ DA',\ AB'.$$

In diesem umgekehrten Sinne entsprechen folglich den Ebenen:

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{llll} A, B, C, D; & A', B', C', D'; & A_1, B_1, C_1, D_1; & A_1', B_1', C_1', D_1'; \\ B, C, D, A; & D', A', B', C'; & D_1, A_1, B_1, C_1; & B_1', C_1', D_1', A_1'. \end{array}$$

Es entsprechen folglich den vorstehenden Ebenen bei der eindeutigen Transformation der F^4 in sich dieselben Ebenen x wie bei der oben definirten Collineation (I). Durch diese geht die F^4 natürlich in sich über, da ihre 32 geraden Linien in einander übergehen. Ja man kann jetzt leicht sehen, dass die eindeutige Transformation der F^4 in sich mit dieser Collineation identisch ist. Zunächst entsprechen nämlich in beiden Correspondenzen den 32 Geraden dieselben Geraden. Weil ferner jede der 32 Geraden von zehn andern geschnitten wird, so entsprechen diesen 10 Schnittpunkten jeder Geraden in beiden Correspondenzen dieselben Punkte. Es entspricht desshalb auch jedem Punkte der 32 geraden Linien in beiden Correspondenzen derselbe

Punkt; denn auch die durch die Transformation vermittelte Beziehung zwischen je zwei Geraden muss, weil sie eindeutig und algebraisch ist, projectivisch sein. Legen wir nun durch irgend eine Gerade b_t eine Ebene, so schneidet diese die F^4 noch in einer Curve 3. Ordnung, welche $31 - 11 = 21$ von den andern Geraden trifft, es entspricht folglich in beiden Transformationen dieser Curve 3. Ordnung dieselbe Curve 3. Ordnung; denn dass ihr auch in der Transformation überhaupt eine Curve 3. Ordnung entspricht, folgt ja daraus, dass sie mit drei Geraden zusammen eine g^6 bildet. Da wir nun jeden Punkt der F^4 als in drei solchen ebenen Curven 3. Ordnung gelegen betrachten können, so folgt, dass jedem Punkte von F^4 in beiden Correspondenzen derselbe Punkt entspricht, dass dieselben also identisch sind.

Ebenso nun wie die ersten zwei auf einander folgenden Gruppen von je 8 geraden Linien derselben Fläche 2. Grades unserer Tabelle auf S. 266 das System der 16 dreifachen Secanten aller g^6 resp. c^6 einer collinearen Erzeugung der F^4 bilden, thun es auch die drei anderen Paare auf einander folgender Gruppen, sodass F^4 auf vierfache Weise so durch collineare Systeme erzeugt werden kann, dass die zugehörige eindeutige Transformation der F^4 in sich eine lineare wird. Jedoch sieht man leicht aus der Beziehung zu den Ebenen A, B, C, D; A', B', C', D', dass allen diesen Erzeugungen dieselbe collineare Transformation entspricht, wovon man sich auch direct überzeugen kann. Es ist also hier der von den analogen Theoremen in der Ebene*) durchaus abweichende Umstand hervorzuheben, dass dieselbe eindeutige Transformation der F^4 in sich zu mehreren collinearen Erzeugungen derselben gehören kann.

Die Resultate unserer bisherigen Untersuchungen können wir folgendermassen zusammenfassen:

Die allgemeinste Fläche 4. *Ordnung, welche sich durch vier collineare räumliche Systeme so erzeugen lässt, dass die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich eine collineare wird, erhält man dadurch, dass man durch die* 16 *Schnittlinien der Seitenflächen zweier vierfach hyperboloidisch liegenden Tetraeder irgend eine Fläche* 4. *Ordnung legt; die durch die vier hyperboloidischen Lagen bedingten Beziehungen der Seitenflächen der beiden Tetraeder gehen dabei durch cyklische Vertauschung aus einander hervor. Die Fläche enthält noch* 16 *andere gerade Linien, welche ebenfalls die Schnittlinien der Seitenflächen zweier vierfach hyperboloidisch liegenden Tetraeder sind. Diese Fläche kann im Ganzen auf vier Arten wie gefordert collinear erzeugt werden, und allen vier Erzeugungen gehört dieselbe collineare Trans-*

*) H. S. p. 7.

formation zu, sie führt die Seitenflächen jener vier Tetraeder cyklisch in einander über.

Ich will zuletzt noch eine von den linearen Transformationen einer c^4 in sich unabhängige Construction solcher vierfach hyperboloidisch liegenden Tetraeder geben, indem ich wieder die duale Aufgabe behandle. Wir gehen zu diesem Zwecke von der Erzeugung einer beliebigen Fläche 2. Grades F^2 aus und nehmen auf dieser vier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ganz beliebig an, jedoch so, dass keine zwei auf derselben Erzeugenden liegen. Nehmen wir ferner auf der durch $\mathfrak{a}$ gehenden Erzeugenden einen Punkt $\mathfrak{a}'$ beliebig an, so ist damit das zu $\mathfrak{abcd}$ gehörige Tetraeder $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ vollständig bestimmt, wenn $\mathfrak{aa}'$, $\mathfrak{bb}'$, $\mathfrak{cc}'$, $\mathfrak{dd}'$ Erzeugende von F^2 sein sollen. Sind nämlich $\mathfrak{ad}'$, $\mathfrak{ba}'$, $\mathfrak{cb}'$, $\mathfrak{dc}'$ die Erzeugenden eines zweiten der vier Hyperboloide, und ist d die Gerade durch $\mathfrak{d}$, welche $\mathfrak{ba}'$ und $\mathfrak{cb}'$ schneidet, so muss d auch $\mathfrak{ad}'$ treffen, die Ebene $\mathfrak{ad}$ muss also durch $\mathfrak{dd}'$ gehen. Schneidet also die Ebene $\mathfrak{add}'$ die Gerade $\mathfrak{ba}'$ im Punkte $\mathfrak{x}$, so ist $\mathfrak{xd} = d$ und und $\mathfrak{cb}'$ ist diejenige Gerade durch $\mathfrak{c}$, welche d und die Erzeugende $\mathfrak{bb}'$ trifft, womit $\mathfrak{b}'$ gefunden ist. Ist ferner a die Gerade durch $\mathfrak{a}$, welche $\mathfrak{ba}'$ und $\mathfrak{cb}'$ trifft, so muss a auch $\mathfrak{dc}'$ schneiden, die Ebene $\mathfrak{d}a$ also schneidet die Erzeugende $\mathfrak{cc}'$ in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{c}'$. Jetzt ist das zweite Hyperboloid durch die Geraden $\mathfrak{ba}'$, $\mathfrak{cb}'$, $\mathfrak{dc}'$ vollkommen bestimmt; weil es aber a und d enthält, so geht es durch $\mathfrak{a}$, und die durch $\mathfrak{a}$ gehende Erzeugende desselben trifft $\mathfrak{dd}'$, weil ja die Ebene $\mathfrak{add}'$ durch d geht. Hiermit ist also auch der letzte Punkt $\mathfrak{b}'$ bestimmt. Man sieht hieraus, dass nachdem F^2 gegeben ist, es noch neunfach, also im Ganzen 18-fach unendlich viel solche Tetraederpaare giebt.. *Unsere Flächen 4. Ordnung bilden also eine 19-fache Mannigfaltigkeit.*

Ausserdem erkennt man aus dieser Construction, dass *alle 32 geraden Linien der F^4 reell sein können.* Denn es können hiernach erstens die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ reell sein. Die zweiten beiden Tetraeder sind aber dadurch fixirt, dass man irgend eine gemeinsame Tangentialebene der vier Hyperboloide als erste Seitenfläche A_1 annimmt; dann sind die übrigen durch lineare Constructionen bestimmt.

Zum Schlusse hebe ich den Satz hervor:

*Liegen zwei Tetraeder zweifach so hyperboloidisch, dass die durch die beiden hyperboloidischen Lagen bedingten Beziehungen der Ecken durch cyklische Vertauschung aus einander hervorgehen, so haben sie im Ganzen vier hyperboloidische Lagen, sodass die durch diese bedingten Beziehungen aus einer durch alle cyklischen Vertauschungen der Ecken hervorgehen. Die vier Hyperboloide gehören demselben Büschel an**).

*) Mit solchen mehrfach hyperboloidisch liegenden Tetraedern hat sich neuerdings auch mein Freund G. Westphal beschäftigt. Er erhielt dieselben Resultate

§ 4.

Ueber zwei neunfach hyperboloidisch liegende Tetraeder.

An die vorstehenden Untersuchungen knüpft sich die Frage, ob eine Fläche 4. Ordnung die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Eigenschaften mehrfach besitzen kann. Es ist mir leider nicht gelungen, die allgemeinsten Flächen dieser Art aufzustellen; jedenfalls aber giebt es ein einfaches Mittel solche Flächen zu finden, und vielleicht führt dasselbe auf alle Flächen dieser Art. Man braucht nämlich nur zwei Tetraeder zu suchen, welche mehrfach vier hyperboloidische Lagen der beschriebenen Art besitzen.

Die vier hyperboloidischen Lagen nun, welche die beiden Tetraeder A, B, C, D und A', B', C', D' darbieten, können wir dadurch andeuten, dass wir unter die Buchstaben:

	A'	B'	C'	D'
1.	A	B	C	D
2.	B	C	D	A
3.	C	D	A	B
4.	D	A	B	C

setzen.

Ebenso kann man alle möglichen übrigen hyperboloidischen Lagen der beiden Tetraeder in Cyklen nach der Periode 4 geordnet andeuten durch:

	A'	B'	C'	D'
5.	A	C	D	B
6.	C	D	B	A
7.	D	B	A	C
8.	B	A	C	D
9.	A	D	B	C
10.	D	B	C	A
11.	B	C	A	D
12.	C	A	D	B

mit Hülfe der elliptischen Functionen, also auf einem Wege, welcher von dem von mir eingeschlagenen principiell nicht verschieden ist.

	A'	B'	C'	D'
13.	C	B	D	A
14.	B	D	A	C
15.	D	A	C	B
16.	A	C	B	D
17.	B	D	C	A
18.	D	C	A	B
19.	C	A	B	D
20.	A	B	D	C
21.	B	A	D	C
22.	A	D	C	B
23.	D	C	B	A
24.	C	B	A	D

Hier ist nun ein wesentlicher Unterschied zu constatiren zwischen der Beziehung der hyperboloidischen Lagen 5—20 und der Lagen 21—24 zu den Lagen 1—4. Jede der Lagen 5—20 geht nämlich aus einer der Lagen 1—4 dadurch hervor, dass man einen Buchstaben festhält und die drei andern cyklisch vertauscht, also z. B. 5 und 9 aus 1:

1. AA', BB', CC', DD';
9. AA', DB', BC', CD';
5. AA', CB', DC', BD';

während die Lagen 1—4 zu den Lagen 21—24 andere später näher zu erörternde Beziehungen haben. Wir untersuchen daher zuerst den Fall, dass ausser den Lagen 1—4 noch eine der Lagen 5—20, also etwa die Lage 9 gegeben sei, ziehen hieraus alle Folgerungen und gewinnen dadurch ein Mittel, solche Tetraeder wirklich zu construiren. Auch hier behandeln wir der einfacheren Terminologie wegen wieder den reciproken Fall.

Zunächst ist wichtig, dass aus den Lagen:

1. aa', bb', cc', bb';
9. aa', bb', bc', cb'

schon die dritte 5. aa', cb', bc', bb'

folgt. Sei nämlich c^3 die Raumcurve 3. Ordnung, welche die Hyperboloide 1 und 9 ausser $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ noch gemein haben, so wird dieselbe durch die Erzeugenden jeder sie enthaltenden Fläche 2. Grades projectivisch in sich bezogen, und zwar involutorisch. So gehen z. B. durch die Fläche 1 die Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ über, und durch die Fläche 9. die Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{b}'$ über. Die Verbindung beider projectivischen Beziehungen liefert nun wiederum eine projectivische Beziehung der c^3 in sich; hierbei gehen die Punkte:

$$\text{(II)} \qquad \begin{matrix} \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}; & \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}' & \text{in:} \\ \mathfrak{d}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}; & \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{b}' & \end{matrix}$$

über. Die sich selbst entsprechenden Punkte sind offenbar die beiden Schnittpunkte der c^3 mit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$; jeder derselben bildet mit $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sowohl als mit $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$ ein äquianharmonisches System.

Nun ist durch jede projectivische Beziehung einer c^3 in sich eine Collineation des Raumes definirt. Jede beliebige Ebene schneidet nämlich die c^3 in drei Punkten, deren entsprechende Punkte die entsprechende Ebene liefern. Nun sieht man weiter, dass allen Ebenen, die durch eine Gerade gehen, wieder solche Ebenen entsprechen. Denn die ersten Ebenen bestimmen auf c^3 eine Involution 3. Ordnung, welcher eben eine solche entspricht, sodass die Ebenen durch jedes Punkttripel derselben wieder durch eine feste Gerade laufen. Die durch die projectivische Beziehung der c^3 vermittelte Transformation der Ebenen des Raumes ist also in der That eine collineare.

In unserm Falle ist diese Collineation cyklisch von der Periode 3. Eine solche Collineation ist immer eine axiale*), d. h. es giebt eine gerade Punktreihe von sich selbst entsprechenden Punkten und ein Ebenenbüschel von sich selbst entsprechenden Ebenen; denn jeder Schnittpunkt dreier sich im Cyklus entsprechenden Ebenen und jede Ebene durch drei sich im Cyklus entsprechende Punkte entspricht sich selbst. Dass dieselben in That eine Gerade resp. ein Büschel erfüllen, erkennt man hier leicht daraus, dass z. B. alle Tripel der sich im Cyklus entsprechenden Punkte auf c^3 eine Involution bilden. Offenbar ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'$ der Ort der sich selbst entsprechenden Punkte, sodass auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ sich selbst entsprechen. Da nun durch diese Collineation die Geraden:

$$1.\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}',\ \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$$

in:

$$5.\ \mathfrak{a}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{d}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{b}'$$

übergehen, so ist unsere obige Behauptung bewiesen, und wir erhalten den Satz:

Liegen zwei Tetraeder zweimal so hyperboloidisch, dass die dadurch

*) Cfr. meine Note in diesen Ann. Bd. XIX, p. 431.

bedingten Beziehungen der Ecken der beiden Tetraeder dadurch aus einander hervorgehen, dass man eine Ecke festhält und die drei andern cyklisch vertauscht, so liegen die beiden Tetraeder im Ganzen dreimal so hyperboloidisch, dass die dadurch bedingten Beziehungen der Ecken der beiden Tetraeder alle aus einer in obiger Weise hervorgehen.

Weiter ergiebt sich Folgendes. Kommt zu den vier hyperboloidischen Lagen:

1. $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, $b\beta'$;
2. $a\beta'$, $b\alpha'$, $c\beta'$, $b\gamma'$;
3. $a\gamma'$, $b\beta'$, $c\alpha'$, $b\beta'$;
4. $a\beta'$, $b\gamma'$, $c\beta'$, $b\alpha'$;

noch die hyperboloidische Lage:

9. $a\alpha'$, $b\gamma'$, $c\beta'$, $b\beta'$

hinzu, so folgen aus der dadurch bedingten Collineation (II) noch die hyperboloidischen Lagen:

5. $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\beta'$, $b\gamma'$;
4. $(a\beta'$, $b\gamma'$, $c\beta'$, $b\alpha';)$
17. $a\beta'$, $b\alpha'$, $c\gamma'$, $b\beta'$;
24. $a\gamma'$, $b\beta'$, $c\alpha'$, $b\beta'$;

9. $a\alpha'$, $b\gamma'$, $c\beta'$, $b\beta'$;
24. $(a\gamma'$, $b\beta'$, $c\alpha'$, $b\beta';)$
15. $a\beta'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, $b\alpha'$;
2. $(a\beta'$, $b\alpha'$, $c\beta'$, $b\gamma');$

wo die sich wiederholenden Lagen eingeklammert sind, sodass die beiden Tetraeder im Ganzen neunfach hyperboloidisch liegen. Diese neun Lagen theilen sich in zwei verschiedene Gruppen. Die eine wird durch die Lagen 2, 4, 24 gebildet, welche durch die cyklische Collineation (II) in einander übergehen. Der zweiten Gruppe gehören die sechs übrigen Lagen an; dieselben gruppiren sich viermal in Cyklen zu je drei, wie 1, 5, 9 einen Cyklus mit Beziehung zu $a\alpha'$ bilden. Die übrigen Cyklen sind: 3, 5, 15; 1, 17, 15; 3, 17, 9 mit Beziehung zu den resp. Geraden $b\beta'$, $c\gamma'$, $b\beta'$. Sie gehen aus dem ersten Cyklus durch die cyklische Collineation (I) von der Periode vier hervor.

Die Zusammenstellung der hyperboloidischen Lagen der ersten Gruppe mit denen der zweiten ergiebt nun die wichtige Folgerung, dass *die beiden Tetraeder einander gleichzeitig um- und eingeschrieben sein müssen.* Die beiden Hyperboloide:

1. $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, $b\beta'$

und

24. $a\gamma'$, $b\beta'$, $c\alpha'$, $b\beta'$

müssen nämlich ausser den Geraden bb' und bb' noch zwei Geraden der andern Erzeugungen gemein haben. Weil diese aber die Geraden aa', cc', ac', ca' gleichzeitig schneiden müssen, so sind ac und $a'c'$ diese beiden Geraden. Es liegen folglich in je einer Ebene die Punkte:

$$a, b, c, b'; \quad a', b', c', b;$$
$$a, c, b, b'; \quad a', c', b', b.$$

Ebenso folgt aus den beiden hyperboloidischen Lagen 24 und 3, dass in je einer Ebene liegen müssen die Punkte:

$$a, b, b, c'; \quad b', c', b', a;$$
$$b, c, b, a'; \quad a', b', b', c.$$

Die beiden Tetraeder sind also einander gleichzeitig um- und eingeschrieben, sie müssten denn aus zweimal vier Punkten in gerader Linie bestehen. Dieser Fall kann aber hier nicht eintreten, weil dann wegen der beiden Collineationen von den Perioden 3 und 4 diese zweimal vier Punkte gleichzeitig äquianharmonisch und harmonisch sein müssten.

Auf Grund dieser Thatsache ist es nun nicht schwer, *wirklich zwei Tetraeder zu construiren, welche neunfach hyperboloidisch liegen.* Zwei Tetraeder nämlich, welche in der oben bezeichneten Weise einander gleichzeitig um- und eingeschrieben sind, haben von selbst die hyperboloidischen Lagen 2, 4 und 24, wie schon Steiner*) in seinen systematischen Entwickelungen bemerkte. Es schneiden dann nämlich:

die Geraden: 2. ab', ba', cb', bc' die Geraden: ab, cb, $a'b'$, $b'c'$;
„ „ : 4. ab', bc', cb', ba' „ „ : ab, bc, $a'b'$, $c'b'$;
„ „ : 24. ac', bb', ca', bb' „ „ : ac, bb, $a'c'$, $b'b'$.

Will man zu dem Tetraeder $abcb$ ein Tetraeder $a'b'c'b'$ finden, welches demselben gleichzeitig um- und eingeschrieben ist, so kann man zunächst in den Seitenflächen abc und acb die Punkte b' und b' resp. ganz beliebig annehmen. Alsdann muss der Punkt a' in der Schnittlinie der Ebenen bcb und $b'b'c$ liegen und der Punkt c' in der Schnittlinie der Ebenen abb und $b'b'a$. Nimmt man a' beliebig auf dieser Linie an, so ist c' dadurch bestimmt, dass es auch in der Ebene $a'b'b$ liegen muss, und es frägt sich nur, ob auch die Ebene $a'c'b'$ durch b geht. Bewegt sich nun aber a' auf seiner Geraden, so beschreiben $bb'a'$ und $bb'a'$ zwei projectivische Ebenenbüschel, welche ein Hyperboloid erzeugen. Dasselbe enthält die Geraden ac, bb und $b'b'$, wie man erkennt, wenn man a' successive mit c, den Schnittpunkten der Geraden ca' mit bb und $b'b'$ zusammenfallen lässt. Folglich ist die ac' in dem Hyperboloide enthalten, weil sie ac, bb und $b'b'$ trifft, deshalb aber auch $a'c'$; denn dieselbe trifft ausser ac' und ca' auch bb'.

*) S. Steiner, ges. Werke, Bd. I, p. 406.

Es liegen also wirklich a', c', b', b stets in einer Ebene. Also erst durch Fixirung des Punktes a' auf ca' ist das Tetraeder $a'b'c'b'$ bestimmt.

Sollen nun auch noch:

$$1.\quad aa',\ bb',\ cc',\ bb'$$

auf einem Hyperboloid liegen, woraus nach § 3. folgt, dass auch:

$$3.\quad ac',\ bb',\ ca',\ bb'$$

auf einem Hyperboloide liegen, so müssen die Ebenen

$$ac(a',\ b',\ c',\ b') \text{ den Punkten } (a,\ x,\ c,\ y)$$

projectivisch sein, wo $x = (ac,\ bb')$ und $y = (ac,\ bb')$. Wegen der Lage 24 müssen aber auch die Ebenen:

$$ac\ (a',\ b',\ c',\ b') \text{ den Punkten } (c,\ x,\ a,\ y)$$

projectivisch sein, d. h. a, c müssen durch x, y harmonisch getrennt sein. Ist dies umgekehrt der Fall, so folgt aus der zweiten Projectivität die erste und aus dieser wiederum die hyperboloidische Lage 1; denn dann schneidet das Ebenenbüschel $ac(a',\ b',\ c',\ b')$ auf $a'c'$ vier Punkte aus, welche mit den ihnen projectivischen vier Punkten (a, x, c, y) verbunden gerade jene vier Geraden liefern. Ist also b' beliebig in der Ebene abc gewählt, so haben wir b' nur auf einer Geraden by so zu wählen, dass a und c durch x und y harmonisch getrennt sind; dann ist a' auf ca' immer noch willkürlich.

Wie den Punkt a' kann man aber auch den Punkt c' zur Bestimmung des Tetraeders ac' willkürlich wählen, woraus dann a' folgt. Wählt man nun c' so, dass die Punkte a und b durch die Schnittpunkte von ab mit bc' und cb' harmonisch getrennt sind, so liegen auch auf einem Hyperboloid:

$$9.\quad aa',\ bc',\ cb',\ bb',$$

sodass die beiden Tetraeder $abcb$ und $a'b'c'b'$ jetzt auf neun Arten hyperboloidisch liegen. Man bemerke, dass diese Construction durchaus eindeutig, also *reell* ist. Es folgt aus ihr, dass *solche neunfach hyperboloidisch liegende Tetraeder eine* 15*-fache Mannichfaltigkeit bilden.* Denn nachdem das Tetraeder $abcb$ beliebig angenommen ist, was ∞^{12} liefert, kann man b' noch beliebig in abc wählen, was ∞^{14} giebt; die noch auf by willkürliche Annahme von b' giebt dann ∞^{15}.

Von solchen Tetraedern kann man sich, worauf mich Herr F. Klein hinwies, eine gute Anschauung bilden durch zwei gleiche reguläre Tetraeder, welche einander gleichzeitig um- und eingeschrieben sind. Der Leser wird leicht die soeben entwickelten Kriterien an diesem Tetraederpaar auffinden können, am besten natürlich mit Hülfe eines leicht zu verfertigenden Modells.

Wir haben gesehen, dass die beiden Tetraeder $abcb$ und $a'b'c'b'$

durch zwei cyklische Collineationen von den Perioden drei und vier in sich übergehen. Daraus folgt schon aus allgemeineren gruppentheoretischen Principien, dass *sie durch die 24 Collineationen in sich übergehen, welche allen möglichen 24 Permutationen ihrer Ecken entsprechen.* Man kann sich hiervon in unserem Falle auch direct überzeugen. Die Collineation (I) wiederholt angewendet liefert nämlich zunächst die Identität mit eingerechnet 4 Collineationen, wendet man auf diese die Collineation (II) ein- und zweimal an, so ergeben sich 8 neue. Wendet man ferner die Collineation (I) zweimal, dann einmal die Collineation (II) und endlich noch einmal die Collineation (I) an, so erhält man eine neue Collineation; auf diese dieselben Processe wie auf die Identität angewendet liefern die noch übrigen 11 Collineationen.

Als Folgerung endlich, daraus, dass die beiden Tetraeder einander gleichzeitig um- und eingeschrieben sind, ergiebt sich, dass sie auch durch die geschaart involutorische Collineation:

(III) $$\begin{matrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{c}, & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & \mathfrak{c}', & \mathfrak{d}' \end{matrix}$$ *in:*

in einander übergehen. Weist man nämlich den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}'$ die Punkte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}$ zu, so sind die Ebenen $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{a'b'c'}$ collinear auf einander bezogen, und es entsprechen den Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Punkte $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$, wenn wir $\mathfrak{x}' = (\mathfrak{a'c'}, \mathfrak{bd'})$ und $\mathfrak{y}' = (\mathfrak{a'c'}, \mathfrak{bd'})$ setzen. $\mathfrak{x}'$ entspricht nämlich dem Punkte $\mathfrak{x}$, also wegen der hyperboloidischen Lage 24 auch dem Punkte $\mathfrak{y}$ der Punkt $\mathfrak{y}'$; denn es ist deshalb:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}, \mathfrak{c}, \mathfrak{y}) \barwedge (\mathfrak{c}', \mathfrak{y}', \mathfrak{a}', \mathfrak{x}') \barwedge (\mathfrak{a}', \mathfrak{x}', \mathfrak{c}', \mathfrak{y}').$$

Weisen wir nun ebenso den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}'$ die Punkte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}$ zu, so sind auch die Ebenen $\mathfrak{acd}$ und $\mathfrak{a'b'c'}$ collinear auf einander bezogen und es entsprechen den Punkten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ wieder die Punkte $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{y}'$, was wie oben folgt. Da also den Punkten der Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{abc}$ und $\mathfrak{acd}$ beide Male dieselben Punkte der Schnittlinie der Ebenen $\mathfrak{a'c'b'}$ und $\mathfrak{a'b'c'}$ entsprechen, so definiren die beiden collinear auf einander bezogenen Ebenenpaare eine Collineation des Raumes. Dieselbe ist geschaart-involutorisch, weil den Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ in geradem wie in umgekehrtem Sinne die Punkte $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ entsprechen, und $\mathfrak{aa}'$ und $\mathfrak{cc}'$ sich nicht schneiden.*)

Die Resultate dieses Paragraphen lassen sich ohne vollständige Wiederholung schwer zusammenfassen, ich habe daher hier bereits im Text das Wichtigste durch gesperrten Druck hervorgehoben.

*) Es ergiebt sich hieraus der Satz, den mir Herr H. Schröter gelegentlich mittheilte:

Sind zwei Tetraeder einander gleichzeitig um- und eingeschrieben, so werden die Verbindungslinien entsprechender Ecken und die Schnittlinien entsprechender Seitenflächen der beiden Tetraeder, also im Ganzen 8 gerade Linien von denselben beiden Geraden gleichzeitig getroffen.

§ 5.

Ueber eine Fläche 4. Ordnung mit 52 geraden Linien.

Wir gehen nun dazu über die Fläche 4. Ordnung zu betrachten, welche durch die 16 Schnittlinien der Seitenflächen der neunfach hyperboloidisch liegenden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ geht; sie lässt sich offenbar im Ganzen zwölfmal so durch collineare Systeme erzeugen, dass die zugehörige eindeutige Transformation derselben in sich eine collineare wird. Weil jedes Hyperboloid, welches vier Geraden derselben Erzeugung mit der F^4 gemein hat, mit ihr noch vier Geraden der andern Erzeugung gemein haben muss, so enthält F^4 $16 + 4 \cdot 9 = 52$ gerade Linien. Wir müssen eigentlich sagen, sie enthält $4 + 48$ gerade Linien, denn die Geraden AA', BD', CC', DB' spielen als Axen der vier cyklischen Collineationen von der Periode drei, durch welche F^4 in sich übergeht, eine ausgezeichnete Rolle. F^4 geht in der That durch die cyklische Collineation (II), für welche AA' die Axe der sich selbst entsprechenden Ebenen ist, in sich über. Denn es gehen durch dieselbe erstens die 16 Schnittlinien der Seitenflächen der beiden Tetraeder in einander über. Ferner aber schneidet die Axe der sich selbst entsprechenden Punkte, $a = (BCD, B'C'D')$, die F^4 noch in zwei Punkten, welche sich selbst entsprechen, aber nicht einer dieser 16 Geraden angehören; die Punkte BCD und $B'C'D'$ liegen ja auf F^4, weil die Ebenen A' und A durch sie hindurchgehen. Die F^4 geht also durch alle 24 Collineationen in sich über, welche den 24 Permutationen der Seitenflächen der beiden Tetraeder entsprechen.

Untersuchen wir nun die Gruppirung der 52 geraden Linien von F^4 näher. Zunächst haben wir die 32 geraden Linien:

1.	AA'	BB'	CC'	DD'	A_1A_1'	B_1B_1'	C_1C_1'	D_1D_1'
2.	AD'	BA'	CB'	DC'	A_1D_1'	B_1A_1'	C_1B_1'	D_1C_1'
3.	AC'	BD'	CA'	DB'	A_1C_1'	B_1D_1'	C_1A_1'	D_1B_1'
4.	AB'	BC'	CD'	DA'	A_1B_1'	B_1C_1'	C_1D_1'	D_1A_1'

Wenden wir hierauf die Collineation (II) von der Periode drei an, so gehen diese, falls:

$$\text{(II)} \qquad \begin{matrix} A_1, B_1, C_1, D_1; & A_1', B_1', C_1', D_1' \text{ in} \\ A_2, B_2, C_2, D_2; & A_2', B_2', C_2', D_2' \end{matrix}$$

übergehen, in folgende 32 gerade Linien über, unter welchen jedoch nur 12 neue sind:

5.	AA'	DC'	BD'	CB'	A_2A_2'	B_2B_2'	C_2C_2'	D_2D_2'
4.	AB'	DA'	BC'	CD'	A_2D_2'	B_2A_2'	C_2B_2'	C_2A_2'
17.	AD'	DB'	BA'	CC'	A_2C_2'	B_2D_2'	C_2A_2'	D_2B_2'
24.	AC'	DD'	BB'	CA'	A_2B_2'	B_2C_2'	C_2D_2'	D_2A_2'

Hier ist:

(IV) $A_2D_2'=B_1'C_1'$, $B_2A_2'=C_1D_1'$, $C_2B_2'=D_1A_1'$, $D_2C_2'=A_1B_1'$.

In der That müssen sich ja diese zweimal vier Geraden decken. Nun kann aber der Geraden A_1D_1' z. B. weder C_1D_1' noch A_1B_1' entsprechen, weil sie A_1D_1' schneiden, A_1D_1' aber AA' nicht trifft, ebenso wenig wie a, weil a das Hyperboloid 2 in den Punkten BCD und $B'C'D'$ schneidet, durch welche ausser A und A' keine gemeinsame Tangentialebene von 1 und 2 mehr hindurchgeht. Ferner kann der Geraden A_1D_1' auch nicht D_1A_1' entsprechen. Denn dann müsste D_1A_1' von der A_1A_1' entsprechenden Geraden A_2A_2' geschnitten werden. Weil aber A_1A_1' die Axe AA' trifft, so liegt A_2A_2' in der Ebene durch AA' und A_1A_1', es müsste folglich D_1A_1' entweder in dieser selben Ebene liegen oder durch den Schnittpunkt von A_1A_1' und A_2A_2' gehen. Das erste ist nicht möglich, weil A_1D_1' die AA' nicht schneidet, und das zweite nicht, weil sonst F^4 in dem Schnittpunkte dieser drei nicht in einer Ebene liegenden Geraden einen Knotenpunkt auf einer b_i hätte, was nach § 1. ausgeschlossen wurde. Es kann folglich der A_1D_1' nur A_1C_1' entsprechen. Ebenso beweist man die übrigen Identitäten. Man erkennt leicht das Gesetz, dass in jeder Identität alle vier Buchstaben vorkommen.

Wendet man nun auf die letzten 32 geraden Linien noch einmal die Collineation (II) an, so gehen dieselben, falls:

(II) $A_2, B_2, C_2, D_2;\ A_2', B_2', C_2', D_2'$ in
$A_3, B_3, C_3, D_3;\ A_3', B_3', C_3'\ D_3'$

übergehen, in folgende Geraden über, worunter jedoch nur 8 neue sind:

9.	AA'	CD'	DB'	BC'	A_3A_3'	B_3B_3'	C_3C_3'	D_3D_3'
24.	AC'	CA'	DD'	BB'	A_3D_3'	B_3A_3'	C_3B_3'	D_3C_3'
15.	AB'	CC'	DA'	BD'	A_3C_3'	B_3D_3'	C_3A_3'	D_3B_3'
2.	AD'	CB'	DC'	BA'	A_3B_3'	B_3C_3'	C_3D_3'	D_3A_3'

Hier ist wieder:

(V) $A_3D_3'=B_2C_2'$, $B_3A_3'=C_2D_2'$, $C_3B_3'=D_2A_2'$, $D_3C_3'=A_2B_2'$;

(VI) $A_1D_1' = B_3C_3'$, $B_1A_1' = C_3D_3'$, $C_1B_1' = D_3A_3'$, $D_1C_1' = A_3B_3'$,

weil ja durch die noch einmal angewendete Collineation (II) diese 32 geraden Linien wieder in die ersten übergehen müssen.

Nun liegen, weil A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', D_1D_1' die Axe AA' schneiden, in je einer Ebene:

$$\begin{array}{llll} AA', & A_1A_1', & A_2A_2', & A_3A_3'; \\ AA', & B_1B_1', & B_2B_2', & B_3B_3'; \\ AA', & C_1C_1', & C_2C_2', & C_3C_3'; \\ AA', & D_1D_1', & D_2D_2', & D_3D_3'. \end{array}$$

Wenden wir hierauf die Collineation (I) dreimal hinter einander an, so erhalten wir 12 neue Ebenen; wir müssen jedoch zunächst untersuchen, wie hierbei die A_2, etc. und A_3, etc. in einander übergehen.

Nun gehen zunächst wegen der Identitäten (IV) und (VI) die Geraden:

$$A_2D_2',\ B_2A_2',\ C_2B_2',\ D_2C_2';\quad B_3C_3',\ C_3D_3',\ D_3A_3',\ A_3B_3'$$

über in:

$$B_3C_3',\ C_3D_3',\ D_3A_3',\ A_3B_3';\quad C_2B_2',\ D_2C_2',\ A_2D_2',\ B_2A_2.$$

Ferner gehen, weil das Hyperboloid 24 in sich übergeht, die Geraden:

(V) $A_3D_3' = B_2C_2'$, $B_3A_3' = C_2D_2'$, $C_3B_3' = D_2A_2'$, $D_3C_3' = A_2B_2'$

in einander über. Nun muss der Geraden A_3D_3', welche A_3B_3' und C_3D_3' schneidet, eine Gerade entsprechen, welche B_2A_2' und D_2C_2' schneidet, also entweder D_2A_2' oder B_2C_2'; das Letztere ist aber nicht möglich, weil sonst A_3D_3' sich selbst entsprechen würde. Das ist aber i. A. nicht der Fall, weil ja zur Bestimmung von F^4 eine Gerade der zweiten Erzeugung irgend eines der neun Hyperboloide willkürlich angenommen werden kann. Man findet so, dass die Geraden:

$$\begin{array}{l} A_2B_2',\ B_2C_2',\ C_2D_2',\ D_2A_2';\quad A_3D_3',\ B_3A_3',\ C_3B_3',\ D_3C_3' \text{ in:} \\ B_3A_3',\ C_3B_3',\ D_3C_3',\ A_3D_3';\quad D_2A_2',\ A_2B_2',\ B_2C_2',\ C_2D_2' \end{array}$$

übergehen. Hieraus folgt in Verbindung mit dem Obigen, dass die Ebenen:

(I) $\begin{array}{l} A_2, B_2, C_2, D_2;\ A_2', B_2', C_2', D_2';\ A_3, B_3, C_3, D_3;\ A_3', B_3', C_3', D_3' \text{ in:} \\ B_3, C_3, D_3, A_3;\ D_3', A_3', B_3', C_3';\ A_2', B_2', C_2', D_2';\ A_2, B_2, C_2, D_2 \end{array}$

übergehen, wo man in der That die Periode 4 wiedererkennt.

Demnach gehen jetzt unsere vier Ebenen über in:

$$\begin{array}{llll} BD', & D_1B_1', & B_3D_3', & A_2A_2'; \\ BD', & A_1C_1', & C_3A_3', & B_2B_2'; \\ BD', & B_1D_1', & D_3B_3', & C_2C_2'; \\ BD', & C_1A_1', & A_3C_3', & D_2D_2'; \end{array}$$

$$
\begin{array}{llll}
CC', & C_1C_1', & D_2B_2', & B_3D_3';\\
CC', & D_1D_1', & A_2C_2', & C_3A_3';\\
CC', & A_1A_1', & B_2D_2', & D_3B_3';\\
CC', & B_1B_1', & C_2A_2', & A_3C_3';
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
DB', & B_1D_1', & A_3A_3', & D_2B_2';\\
DB', & C_1A_1', & B_3B_3', & A_2C_2';\\
DB', & D_1B_1', & C_3C_3', & B_2D_2';\\
DB', & A_1C_1', & D_3D_3', & C_2A_2'.
\end{array}
$$

Man sieht nun, dass jede dieser Geraden in mindestens zwei dieser Ebenen enthalten ist, und findet so bei näherer Prüfung, dass diese 16 Ebenen zwei Tetraederpaare bilden, sodass die Schnittlinien der Seitenflächen jedes Paares auf F^4 liegen. Ich will die Geraden so in zwei Quadrate zu je 16 anordnen, dass je vier derselben Horizontal- resp. Verticalreihe in derselben Ebene liegen und für diese Ebenen gleichzeitig die an der Seite resp. oben stehenden Bezeichnungen einführen.

	A′	B′	Γ′	Δ′
A	AA'	A_3A_3'	A_1A_1'	A_2A_2'
B	C_2C_2'	B_1D_1'	D_3B_3'	BD'
Γ	C_1C_1'	D_2B_2'	CC'	B_3D_3'
Δ	C_3C_3'	DB'	B_2D_2'	D_1B_1'

	α′	β′	γ′	δ′
α	AA'	B_3B_3'	B_1B_1'	B_2B_2'
β	D_2D_2'	C_1A_1'	A_3C_3'	BD'
γ	D_1D_1'	A_2C_2'	CC'	C_3A_3'
δ	D_3D_3'	DB'	C_2A_2'	A_1C_1'

Jedes dieser beiden Tetraederpaare liegt sechsfach hyperboloidisch. Es schneiden nämlich,

1. AA′, BB′, ΓΓ′, ΔΔ′ = $AA', B_1D_1'\ CC', D_1B_1'$ | $AC', B_1B_1', CA', D_1D_1'$;
5. AA′, BΔ′, ΓB′, ΔΓ′ = $AA', D_2B_2', BD', B_2D_2'$ | $AD', B_2B_2', BA', D_2D_2'$;
9. AA′, BΓ′, ΓΔ′, ΔB′ = $AA', B_3D_3', DB', D_3B_3'$ | $AB', B_3B_3', DA', D_3D_3'$;

3. $A\Gamma', B\Delta', \Gamma A', \Delta B' = BD', A_1A_1', DB', C_1C_1' \mid BB', A_1C_1', DD', C_1A_1'$;
17. $A\Delta', BA', \Gamma\Gamma', \Delta B' = CC', A_2A_2', DB', C_2C_2' \mid CB', A_2C_2', DC', C_2A_2'$;
15. $AB', B\Delta', \Gamma\Gamma', \Delta A' = CC', A_3A_3', BD', C_3C_3' \mid BC', A_3C_3', CD', C_3A_3'$.

Ebenso schneiden:

1. $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta' = AA', C_1A_1', CC', A_1C_1 \mid AC', A_1A_1', CA', C_1C_1'$;
5. $\alpha\alpha', \beta\delta', \gamma\beta', \delta\gamma' = AA', A_2C_2', BD', C_2A_2' \mid AD', A_2A_2', BA', C_2C_2'$;
9. $\alpha\alpha', \beta\gamma', \gamma\delta', \delta\beta' = AA', A_3C_3', DB', C_3A_3' \mid AC', A_1A_1', CA', C_1C_1'$;
3. $\alpha\gamma', \beta\delta', \gamma\alpha', \delta\beta' = BD', B_1B_1', DB', D_1D_1' \mid BB', B_1D_1', DD', D_1B_1'$;
17. $\alpha\delta', \beta\alpha', \gamma\gamma', \delta\beta' = CC', B_2B_2', DB', D_2D_2' \mid CB', B_2D_2', DC', D_2B_2'$;
15. $\alpha\beta', \beta\delta', \gamma\gamma', \delta\alpha' = CC', B_3B_3', BD', D_3D_3' \mid CD', B_3D_3', BC', D_3B_3'$.

Jedes der beiden Tetraederpaare besitzt also die 6 hyperboloidischen Lagen, welche sich schon von den neun hyperboloidischen Lagen der beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ als besondre Gruppe absonderten. Es ist diese Gruppe dadurch charakterisirt, dass die durch diese 6 hyperboloidischen Lagen bedingten Beziehungen der beiden Tetraeder unter einander nur zu Cyklen von den Perioden 2 und 3 führen.

Sehen wir nun zu, wie durch die cyklischen Collineationen (I) und (II) die Seitenflächen dieser beiden Tetraederpaare in einander übergehen. Wir können dies, was die Collineation (I) betrifft, sofort aus den Tabellen auf voriger Seite ablesen. Es gehen also durch diese Collineation die Ebenen:

(I) $A, B, \Gamma, \Delta; A', B', \Gamma', \Delta'; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ in:
$\Delta', \Gamma', B', A'; B, A, \Delta, \Gamma; \delta', \gamma', \beta', \alpha'; \beta, \alpha, \delta, \gamma$

über. Ebenso gehen durch die Collineation (II) die Ebenen:

(II) $A, B, \Gamma, \Delta; A', B', \Gamma', \Delta'; \alpha, \beta, \gamma, \delta; \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ in:
$A, \Delta, B, \Gamma; A', \Gamma', \Delta', B'; \alpha, \delta, \beta, \gamma; \alpha', \gamma', \delta', \beta'$

über. Betrachten wir nun endlich die geschaart-involutorische Collineation (III), welche:

(III) $A, B, C, D; A', B', C', D'$ in:
$A', D', C', B'; A, D, C, B$

überführt. Dieselbe führt zwar die 16 Schnittlinien der Seitenflächen der beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ in einander über, aber i. A. nicht die Fläche F^4 in sich. Würde nämlich jede durch die 16 Geraden gehende Fläche 4. Ordnung durch diese Collineation in sich übergeführt, so müsste dasselbe auch von den solche Flächen bildenden Ebenenquadrupeln A, B, C, D und A', B', C', D' gelten; da diese aber nicht in sich, sondern in einander übergehen, so giebt es

nur zwei Flächen 4. Ordnung durch die 16 Geraden, welche durch die geschaart-involutorische Collineation in sich übergehen; wir werden sie im nächsten Paragraphen genau betrachten.

Man bemerke, dass alle 52 geraden Linien unserer F^4 reell sein können. Zunächst haben wir nämlich gesehen, dass die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ reell sein können. Wählen wir dann irgend eine reelle gemeinsame Tangentialebene der Hyperboloide 1 und 2, deren es ja immer noch unendlich viele giebt, als Ebene A_1, so sind auch die Ebenen B_1, C_1, D_1; A_1', B_1', C_1', D_1' reell. Daraus folgt aber, dass auch die Ebenen A, B etc. und α, β etc. reell sind; denn A z. B. ist die Ebene durch die reellen Geraden AA' und A_1A_1'. Daraus wiederum folgt, dass auch die Ebenen A_2, B_2, etc. und A_3, B_3, etc. reell sind, was sich übrigens auch schon daraus ergiebt, dass sie durch eine reelle Collineation (II) aus den Ebenen A_1, B_1, etc. hervorgehen. Es kann also in unserer Configuration in der That Alles reell sein.

Wir fassen die Resultate dieses Paragraphen in folgenden Satz zusammen:

Jede Fläche 4. *Ordnung durch die* 16 *Schnittlinien der Seitenflächen zweier neunfach hyperboloidisch liegender Tetraeder enthalten im Ganzen* 52 *gerade Linien. Dieselben gruppiren sich noch fünfmal zu je* 16 *zu den Schnittlinien der Seitenflächen zweier Tetraeder. Von diesen Tetraedern liegen drei vierfach und zwei sechsfach hyperboloidisch. Die Fläche geht durch* 24 *Collineationen in sich über; drei von ihnen von der Periode vier entsprechen je vier collinearen Erzeugungen der Fläche; vier andern von der Periode drei gehören als Axen vier ausgezeichnete Geraden der Fläche zu. Durch jede dieser* 4 *Geraden gehen* 6 *Ebenen, welche die Fläche in vier Geraden schneiden, durch weitere* 12 *gehen nur* 2 *solche Ebenen und die übrigen* 36 *je vier. Alle diese Geraden und Ebenen können reell sein.*

§ 6.

Ueber die äquianharmonische Fläche 4. Ordnung.

Zu einer besonderen Fläche der im vorigen Paragraphen beschriebenen Art kommen wir auf folgendem Wege. Das Hyperboloid:

1. AA', BB', CC', DD'

schneidet die Axe a der sich selbst entsprechenden Punkte der axialen Collineation (II) in zwei Punkten a und c. Durch a geht eine Gerade der zweiten Erzeugung von 1, welche wir als Gerade A_1A_1' annehmen wollen; durch diese Annahme ist ja F^4 gerade bestimmt. Nun ist $A_1A_1' = A\Gamma'$ und $A\Gamma'$ geht durch die zweimal hinter einander ange-

wendete Collineation (II) in resp. $A\Delta'$ und AB' über. Da nun der Punkt α sich selbst entspricht, so gehen folglich die Ebenen:

$$A;\ B',\ \Gamma',\ \Delta'$$

durch einen Punkt. Wenden wir hierauf die Collineation (I) dreimal hinter einander an, so ergiebt sich, dass durch je einen Punkt gehen:

$$\Delta',\ A,\ \Gamma,\ \Delta;\quad \Gamma,\ A',\ B',\ \Delta';\quad B',\ A,\ B,\ \Gamma.$$

Wendet man auf die letzten vier Ebenen die Collineation (II) an, so folgt, dass auch:

$$\Gamma',\ A,\ B,\ \Delta$$

durch einen Punkt gehen. Wendet man endlich hierauf wieder die Collineation (I) dreimal hinter einander an, so folgt, dass durch je einen Punkt gehen:

$$\Delta,\ A',\ \Gamma',\ \Delta';\quad A',\ B,\ \Gamma,\ \Delta;\quad B,\ A',\ B',\ \Gamma'.$$

Es sind folglich auch die beiden Tetraeder $AB\Gamma\Delta$ und $A'B'\Gamma'\Delta'$ einander gleichzeitig um- und eingeschrieben. Es entsprechen daher in einer geschaart-involutorischen Collineation den Ebenen:

$$A,\ B,\ \Gamma,\ \Delta;\quad A',\ B',\ \Gamma',\ \Delta':$$
$$A',\ \Delta',\ \Gamma',\ B';\quad A,\ \Delta,\ \Gamma,\ B.$$

Da in dieser Collineation die Geraden AA', BD', CC', DB' wiederum sich selbst entsprechen, so sind die dieselben gleichzeitig schneidenden Geraden g und g' auch Axen dieser Collineation, dieselbe ist also identisch mit der Collineation (III). Wir haben hier also eine der beiden Flächen, welche durch diese geschaart-involutorische Collineation in sich übergeführt werden. Uebrigens liefert der Punkt $\mathfrak{c}$ keineswegs eine zweite Fläche dieser Art. Denn der Punkt $B\Gamma\Delta$, durch welchen $C_1C_1' = \Gamma A'$ geht, ist ebenfalls ein Punkt von a und jedenfalls von α verschieden, also der Punkt $\mathfrak{c}$.

Jetzt werden durch die Collineation (III) die Geraden $A\Gamma' = A_1A_1'$ und $BB' = B_1D_1'$ in C_1C_1' und D_1B_1' übergeführt. Es entsprechen folglich den Ebenen:

(III)
$$A_1,\ B_1,\ C_1,\ D_1;\quad A_1',\ B_1',\ C_1',\ D' \text{ entweder:}$$
$$C_1',\ B_1',\ A_1',\ D_1';\quad C_1,\ B_1,\ A_1,\ D_1 \text{ oder:}$$
$$(C_1,\ D_1,\ A_1,\ B_1;\quad C_1',\ D_1',\ A_1',\ B').$$

Das Letzte aber ist nicht möglich, weil diese Collineation durch die zweimal angewendete Collineation (I) entsteht. Ebenso entsprechen den Ebenen:

(III)
$$A_2, B_2, C_2, D_2;\ A_2', B_2', C_2', D_2';\ A_3, B_3, C_3, D_3;\ A_3', B_3', C_3', D_3':$$
$$C_2', B_2', A_2', D_2';\ C_2, B_2, A_2, D_2;\ C_3', B_3', A_3', D_3';\ C_3, B_3, A_3, D_3.$$

Die α, β, γ, δ; α', β', γ', δ' aber entsprechen sich selbst. Hieraus folgt,

dass die Ebenen α, β, γ, δ durch g und die Ebenen α', β', γ', δ' durch g' gehen. Da nun diese Quadrupel durch Collineationen von der Periode 3 in sich übergehen, *so sind sie Quadrupel äquianharmonischer Ebenen.* Die beiden Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ liegen folglich zwölffach hyperboloidisch; doch werden wir uns hiervon direct überzeugen. Natürlich dürfen jetzt diese Ebenen nicht reell sein, ja wenn die Ausgangstetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ reell waren, so dürfen schon g und g' nicht reell sein. Weil aber α und α' jetzt diejenigen beiden Ebenen sind, welche A, A' und A, A' gleichzeitig harmonisch trennen, so muss dann auch A und A' reell sein; es sind also die Tetraeder $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ und $\mathsf{A'B'\Gamma'\Delta'}$ reell. Sind also die Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ reell, so schneidet die Axe a das Hyperboloid 1 immer in zwei reellen Punkten; dagegen dürfen natürlich durch A_1A_1', C_1C_1' keine reellen gemeinsamen Tangentialebenen der Hyperboloide 1 und 2 gehen.

Nun bemerke man, dass durch Verbindung der Collineationen (I) und (III), durch welche ja:

(VII) $A, B, C, D;\ A', B', C', D'$ in:
$D', C', B', A';\ B, A, D, C$

übergehen, die Ebenen:

(VII) $\mathsf{A, B, \Gamma, \Delta};\ \mathsf{A', B', \Gamma', \Delta'}$ in:
$\mathsf{B, \Gamma, \Delta, A};\ \mathsf{\Delta', A', B', \Gamma'}$

übergehen. Durch dieselbe Collineation gehen:

(VII) $A_1, B_1, C_1, D_1;\ A_1', B_1', C_1', D_1'$ in:
$D_1', C_1', B_1', A_1';\ B_1, A_1, D_1, C_1$

über.

Weil nun die beiden Tetraeder $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ und $\mathsf{A'B'\Gamma'\Delta'}$ einander gleichzeitig um- und eingeschrieben sind, so haben sie noch folgende drei hyperboloidischen Lagen:

2. $\mathsf{A\Delta', BA', \Gamma B', \Delta\Gamma'} = A_2A_2', C_2C_2', D_2B_2', B_2D_2'$;
4. $\mathsf{AB', B\Gamma', \Gamma\Delta', \Delta A'} = A_3A_3', D_3B_3', B_3D_3', C_3C_3'$;
24. $\mathsf{A\Gamma', BB', \Gamma A', \Delta\Delta'} = A_1A_1', B_1D_1', C_1C_1', D_1B_1'$,

sodass die beiden Tetraeder ebenfalls neunfach hyperboloidisch liegen. Es liegen folglich auf F^4 noch 12 neue Geraden, sodass dieselbe im Ganzen 64 gerade Linien besitzt.

Um deren Lage genauer zu untersuchen bemerke man, dass nun zu dem Tetraederpaar $\mathsf{AB\Gamma\Delta}$ und $\mathsf{A'B'\Gamma'\Delta'}$ noch drei neue Tetraederpaare gehören, sodass also z. B. folgende 32 gerade Linien auf F^4 liegen:

1.	AA'	BB'	$\Gamma\Gamma'$	$\Delta\Delta'$	A_1A_1'	B_1B_1'	$\Gamma_1\Gamma_1'$	$\Delta_1\Delta_1'$
2.	$A\Delta'$	BA'	$\Gamma B'$	$\Delta\Gamma'$	$A_1\Delta_1'$	B_1A_1'	Γ_1B_1'	$\Delta_1\Gamma_1'$
3.	$A\Gamma'$	$B\Delta'$	$\Gamma A'$	$\Delta B'$	$A_1\Gamma_1'$	$B_1\Delta_1'$	Γ_1A_1'	Δ_1B_1'
4.	AB'	$B\Gamma'$	$\Gamma\Delta'$	$\Delta A'$	A_1B_1'	$B_1\Gamma_1'$	$\Gamma_1\Delta_1'$	Δ_1A_1'

Setzen wir nun (cfr. p. 281/82), was ja rein Sache der Bezeichnung ist, $A_1A_1' = AC'$, sodass wir etwa $A_1C_1' = A_1\Gamma_1'$, folglich $C_1A_1' = B_1A_1'$ setzen werden, so ist also die Ebene:

$$A_1 = [AC',\ A_1C_1'] \quad \text{und} \quad A_1' = [AC',\ C_1A_1'].$$

Bedenken wir nun, dass durch die letztgenannte Collineation (VII), welche ja gerade aus dieser Gruppe von vier hyperboloidischen Lagen folgt:

(VII)
$$\begin{array}{l} A_1,\ B_1,\ \Gamma_1,\ \Delta_1;\ A_1',\ B_1',\ \Gamma_1',\ \Delta_1' \quad \text{in:} \\ \Delta_1,\ A_1,\ B_1,\ \Gamma_1;\ B_1',\ \Gamma_1',\ \Delta_1',\ A_1' \end{array}$$

übergehen müssen, so folgt, dass:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= [DD',\ D_1D_1'], & B_1' &= [DD,\ B_1B_1']; \\ \Gamma_1 &= [CA',\ C_1A_1'], & \Gamma_1' &= [CA',\ A_1C_1']; \\ B_1 &= [BB',\ B_1B_1'], & \Delta_1' &= [BB',\ D_1D_1']. \end{aligned}$$

Hieraus ist zu ersehen, welche von den alten Geraden die neuen auf 2 und 4 schneiden. Man sieht so auch, wie man aus den alten Geraden die neuen construiren kann; freilich sind sie alle imaginär.

Wenden wir auf die vorstehenden Ebenen die Collineation (II) an, so erhalten wir die beiden andern zu $AB\Gamma\Delta$ und $A'B'\Gamma'\Delta'$ gehörigen Tetraederpaare, und es ist:

$$\begin{aligned} A_2 &= [AD',\ A_2C_2'], & A_2' &= [AD',\ C_2A_2'], \\ B_2 &= [DC',\ B_2B_2'], & B_2' &= [CB',\ B_2B_2'], \\ \Gamma_2 &= [BA',\ C_2A_2'], & \Gamma_2' &= [BA',\ A_2C_2'], \\ \Delta_2 &= [CB',\ D_2D_2'], & \Delta_2' &= [DC',\ D_2D_2']. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= [AB',\ A_3C_3'], & A_3' &= [AB',\ C_3A_3'], \\ B_3 &= [CD',\ B_3B_3'], & B_3' &= [BC',\ B_3B_3'], \\ \Gamma_3 &= [DA',\ C_3A_3'], & \Gamma_3' &= [DA',\ A_3C_3'], \\ \Delta_3 &= [BC',\ D_3D_3'], & \Delta_3' &= [DA',\ A_3C_3'], \end{aligned}$$

wo wiederum die den Identitäten (IV)—(VI) analogen Identitäten bestehen; man braucht nur an Stelle der lateinischen die griechischen Buchstaben zu setzen.

Hieraus ergeben sich nun die 6 übrigen hyperboloidischen Lagen der beiden Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Es schneiden nämlich die Geraden:

7. $\alpha\gamma', \beta\beta', \gamma\delta', \delta\alpha' = B_1B_1', C_1A_1', C_3A_3', D_3D_3' | \mathsf{B_1A_1'}, \mathsf{\Gamma_1B_1'}, B_1A_1', C_1B_1'$;
11. $\alpha\gamma', \beta\alpha', \gamma\beta', \delta\delta' = B_1B_1', D_2D_2', A_2C_2', A_1C_1' | \mathsf{A_1B_1'}, \mathsf{B_1\Gamma_1'}, A_1B_1', B_1C_1'$;
13. $\alpha\delta', \beta\beta', \gamma\alpha', \delta\gamma' = B_2B_2', C_1A_1', D_1D_1', C_2A_2' | \mathsf{\Gamma_1\Delta_1'}, \mathsf{\Delta_1A_1'}, C_1D_1', D_1A_1'$;
19. $\alpha\beta', \beta\gamma', \gamma\alpha', \delta\delta' = B_3B_3', A_3C_3', D_1D_1', A_1C_1' | \mathsf{A_1\Delta_1'}, \mathsf{\Delta_1\Gamma_1'}, A_1D_1', D_1C_1'$;
21. $\alpha\beta', \beta\alpha', \gamma\delta', \delta\gamma' = B_3B_3', D_2D_2', C_3A_3', C_2A_2' | \mathsf{\Gamma_2\Delta_2'}, \mathsf{\Delta_2A_2'}, C_2D_2', D_2A_2'$;
23. $\alpha\delta', \beta\gamma', \gamma\beta', \delta\alpha' = B_2B_2', A_3C_3', A_2C_2', D_3D_3' | \mathsf{A_2B_2'}, \mathsf{B_2\Gamma_2'}, A_2B_2', B_2C_2'$.

Ich will den Beweis für das Hyperboloid 7 kurz andeuten. Weil B_1B_1' in den Ebenen $\mathsf{B_1}$ und $\mathsf{B_1'}$, C_1A_1' in den Ebenen $\mathsf{\Gamma_1}$ und $\mathsf{A_1'}$ liegt, so werden B_1B_1' und C_1A_1' von den Geraden $\mathsf{B_1A_1'}$ und $\mathsf{\Gamma_1B_1'}$ geschnitten. Nun ist aber $\mathsf{B_1A_1'} = \mathsf{\Gamma_3\Delta_3'}$, $\mathsf{\Gamma_1B_1'} = \mathsf{\Delta_3A_3'}$; weil also C_3A_3' in den Ebenen $\mathsf{\Gamma_3}$ und $\mathsf{A_3'}$, D_3D_3' in den Ebenen $\mathsf{\Delta_3}$ und $\mathsf{\Delta_3'}$ liegt, so werden auch C_3A_3' und D_3D_3' von $\mathsf{B_1A_1'}$ und $\mathsf{\Gamma_1B_1'}$ geschnitten. Das B_1A_1' und C_1B_1' die Geraden links schneiden, folgt sofort aus den Identitäten.

Weil wir nun die drei hyperboloidischen Lagen:

3. $\alpha\gamma', \beta\delta', \gamma\alpha', \delta\beta'$;
7. $\alpha\gamma', \beta\beta', \gamma\delta', \delta\alpha'$;
11. $\alpha\gamma', \beta\alpha', \gamma\beta', \delta\delta'$

haben, so geht nach § 4. die F^4 durch die cyklische Collineation von der Periode drei in sich über, welche:

(VIII) $\alpha, \beta, \gamma, \delta; \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ in:
$\alpha, \gamma, \delta, \beta; \delta', \alpha', \gamma', \beta'$

überführt. Nun ist die eine Axe dieser Collineation $\alpha\gamma' = B_1B_1' = \mathsf{B_1B_1'}$, es gehen folglich durch dieselbe auch die Ebenen B_1, B_1' $\mathsf{B_1}$, $\mathsf{B_1'}$ in sich über. Es muss folglich die Gerade B_1A_1' z. B. in eine der Geraden B_1C_1' oder B_1D_1' übergehen; nun geht die sie schneidende Gerade $C_1A_1' = \beta\beta'$ in $\gamma\alpha' = D_1D_1'$ über, folglich geht B_1A_1' in B_1D_1' über, also A_1' in D_1'. So beweist man, dass die Ebenen:

(VIII) $A_1, B_1, C_1, D_1; A_1', B_1', C_1', D_1'$ in:
$C_1, B_1, D_1, A_1; D_1', B_1', A_1', C_1'$

übergehen, und ebenso die Ebenen:

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{matrix} \mathsf{A}_1,\ \mathsf{B}_1,\ \Gamma_1,\ \Delta_1;\ \ \mathsf{A}_1',\ \mathsf{B}_1',\ \Gamma_1',\ \Delta_1' \text{ in:} \\ \Gamma_1,\ \mathsf{B}_1,\ \Delta_1,\ \mathsf{A}_1;\ \ \Delta_1',\ \mathsf{B}_1',\ \mathsf{A}_1',\ \Gamma_1' \end{matrix}$$

übergehen. Nun entspricht hiernach der Geraden $AC' = \mathsf{A}_1\mathsf{A}_1'$ die Gerade $\Gamma_1\Delta_1' = \mathsf{B}_2\mathsf{A}_2'$; da nun der Geraden $AA' = \alpha\alpha'$ die Gerade $\alpha\delta' = B_2B_2' = \mathsf{B}_2\mathsf{B}_2'$ entspricht, so folgt, dass der Ebene A die Ebene B_2 entspricht. So beweist man, dass die Ebenen:

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{matrix} A,\ B,\ C,\ D;\ \ A',\ B',\ C',\ D' \\ \text{in: } \mathsf{B}_2,\ \mathsf{A}_2,\ \Gamma_2,\ \Delta_2;\ \ \mathsf{B}_2',\ \Delta_2',\ \mathsf{A}_2',\ \Gamma_2' \end{matrix}$$

übergehen, und ebenso die Ebenen:

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{matrix} \mathsf{A},\ \mathsf{B},\ \Gamma,\ \Delta;\ \ \mathsf{A}',\ \mathsf{B}',\ \Gamma',\ \Delta' \\ \text{in: } B_2,\ A_2,\ C_2,\ D_2;\ \ B_2',\ D_2',\ A_2',\ C_2' \end{matrix}$$

Weil hiernach nun $A_2A_2' = \mathsf{A}\Delta'$ in $B_2C_2' = A_3D_3'$ und $A_2C_2' = \gamma\beta'$ in $\delta\alpha' = D_3D_3'$ übergeht, so geht A_2 in D_3' über. So beweist man, dass:

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{matrix} A_2,\ B_2,\ C_2,\ D_2;\ \ A_2',\ B_2',\ C_2',\ D_2' \\ \text{in: } D_3',\ B_3',\ C_3',\ A_3';\ \ A_3,\ B_3,\ D_3,\ C_3 \end{matrix}$$

übergehen; ebenso:

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{matrix} \mathsf{A}_2,\ \mathsf{B}_2,\ \Gamma_2,\ \Delta_2;\ \ \mathsf{A}_2',\ \mathsf{B}_2',\ \Gamma_2',\ \Delta_2' \\ \text{in: } \Delta_3',\ \mathsf{B}_3',\ \Gamma_3',\ \mathsf{A}_3';\ \ \mathsf{A}_3,\ \mathsf{B}_3,\ \Delta_3,\ \Gamma_3. \end{matrix}$$

In ganz analoger Weise, aber schon daraus, dass die Collineation cyklisch von der Periode drei ist, folgt, dass die Ebenen:

$$\text{(VIII)}\qquad \begin{matrix} A_3, B_3, C_3, D_3;\ A_3', B_3', C_3', D_3';\ \mathsf{A}_3, \mathsf{B}_3, \Gamma_3, \Delta_3;\ \mathsf{A}_3', \mathsf{B}_3', \Gamma_3', \Delta_3' \\ \text{in: } \Gamma',\ \mathsf{A}',\ \mathsf{B}',\ \Delta';\ \ \Delta,\ \mathsf{A},\ \Gamma,\ \mathsf{B};\ C', A', B', D';\ D,\ A,\ C,\ B \end{matrix}$$

übergehen. Hieraus ergiebt sich nun ein bemerkenswerthes Resultat; um kürzer sein zu können, wollen wir jedes Tetraederpaar nur mit seinem Anfangsbuchstaben, also z. B. das Paar $ABCD$, $A'B'C'D'$ mit (A) bezeichnen. Wir sehen jetzt daraus, wie durch die Collineation (VIII) die 8 Tetraederpaare in einander übergehen, dass sie alle neunfach hyperboloidisch liegen. Denn (A_2), (A_3); (A_2), (A_3) gehen ja durch dieselbe aus (A) resp. (A) hervor. Da aber (A_1) und (A_1) in sich übergehen, so müssen auch die Tetraederpaare (A) und (A), welche ja als Schnittlinien ihrer Seitenflächen die Geraden der zweiten Erzeugungen derjenigen vier Hyperboloide liefern, deren erste

Erzeugungen die Schnittlinien der Seitenflächen der Paare (A_1) und (A_1) enthalten, in ebensolche Tetraederpaare übergehen; d. h. die Paare (A_2), (A_2) und (A_2), (A_3) haben zu resp. (A_1) und (A_1) dieselbe Beziehung wie (A) und (A); es liegen folglich (A_1) und (A_1) ebenfalls neunfach hyperboloidisch. Wir sehen hieraus weiter, dass wir die 8 Tetraederpaare in zwei Reihen:

$$(A),\ (\mathsf{A}_1),\ (\mathsf{A}_2),\ (\mathsf{A}_3);$$
$$(\mathsf{A}),\ (A_1),\ (A_2),\ (A_3)$$

so ordnen können, dass jedes Paar mit den drei nicht unter ihm stehenden Paaren der andern Reihe eine Gruppe wie (A) mit (A_1), (A_2), (A_3) bildet.

Die 64 Seitenflächen dieser 8 Tetraeder gruppiren sich nun aber noch auf zwei andre Arten zu den Seitenflächen zweier Gruppen solcher 8 Tetraederpaare. Je zwei einander wie (A) und (A) entsprechende Tetraederpaare bestimmen nämlich dieselben vier Geraden, hier AA', BD', CC', DB', als Schnittlinien der einander in der geschaart-involutorischen Collineation entsprechenden Seitenflächen. Die vier Paare von Tetraederpaaren bestimmen so folgende Gruppen von je vier geraden Linien:

$$22.\ \alpha\alpha',\ \beta\delta',\ \gamma\gamma',\ \delta\beta';$$
$$24.\ \alpha\gamma',\ \beta\beta',\ \gamma\alpha',\ \delta\delta';$$
$$2.\ \alpha\delta',\ \beta\alpha',\ \gamma\beta',\ \delta\gamma';$$
$$4.\ \alpha\beta',\ \beta\gamma',\ \gamma\delta',\ \delta\alpha',$$

wo die Nummern dem Schema der hyperboloidischen Lagen auf p. 271/72 entnommen sind, obgleich solche nicht gemeint sind. Die Vertauschungen nun, durch welche diese Gruppirungen aus einander hervorgehen, sind von der Periode 2 und entsprechen den Veränderungen, bei welchen ein Doppelverhältniss constant bleibt. Die 8 übrigen, wenn ich so sagen darf, nicht-hyperboloidischen Lagen der beiden Tetraeder $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ ordnen sich nun noch zu zwei solchen Gruppen, nämlich 6, 8, 18, 20 und 10, 12, 14, 16, und jeder dieser beiden Gruppen gehören, ebenso wie der ersten, 8 neunfach hyperboloidisch liegende Tetraederpaare zu. So sind z. B. zwei Tetraederpaare, welche zur ersten Gruppe, und zwar zu 20 gehören, A, C_1, C_2, C_3; A', A_1', A_2', A_3' und A, A_1', A_2', A_3'; A', Γ_1, Γ_2, Γ_3, aus welchen die übrigen sechs Paare durch die wiederholt angewendete Collineation (I) hervorgehen. Zur zweiten Gruppe, und zwar zu 16 gehören die beiden Tetraederpaare A, A_1, A_2, A_3; A', C_1', C_2', C_3' und A, Γ_1', Γ_2', Γ_3'; A', A_1, A_2, A_3, aus welcher die übrigen 6 Paare durch dieselbe Collineation hervorgehen. Den Beweis hierfür übergehe ich, da er aus

den Tabellen leicht zu erbringen ist. Die sechs hyperboloidischen Lagen, welche durch den Cyklus von der Periode drei zusammenhängen, ergeben sich jedesmal leicht aus den mit ihnen verbundenen Collineationen von der Periode drei, welche dieselben bleiben wie bei der ersten Gruppe. Das gleichzeitige Um- und Eingeschrieben-Sein jedes Tetraederpaares nach dem durch die Schreibweise angedeuteten Entsprechen ist leicht unter Berücksichtigung der Identitäten zu beweisen.

Jedem dieser Tetraederpaare entsprechen nun nach § 5. drei Gruppen von je vier collinearen Erzeugungen der F^4, deren zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich linear ist. Nun wird aber dieselbe Gruppe von vier collinearen Erzeugungen jedesmal von 2 Tetraederpaaren geliefert, sodass es im Ganzen $3 \cdot 12$ solche Gruppen oder $4 \cdot 3 \cdot 12 = 144$ collineare Erzeugungen giebt, deren zugehörige eindeutige Transformation der F^4 in sich linear wird; ihnen gehören aber im Ganzen nur 36 Collineationen von der Periode 4 zu.

Collineationen der F^4 in sich giebt es aber eine um vieles grössere Anzahl. Man findet dieselbe durch folgende Methode, welche diese Collineationen selbst bestimmen lehrt. Sind nämlich den Punkten zweier sich nicht treffenden Geraden g und g' des einen Raumes die Punkte zweier eben solchen Geraden g_1 und g_1' des andern Raumes als collinear zugewiesen, so ist die Gerade h_1 bekannt, welche irgend einer g und g' gleichzeitig treffenden Geraden h entspricht. Wird nun noch irgend einem Punkte $\mathfrak{p}$ von h ein Punkt $\mathfrak{p}_1$ von h_1 zugewiesen, so ist die Collineation bestimmt; denn die jeder beliebigen Ebene π entsprechende Ebene π_1 ist jetzt dadurch bestimmt, dass sie durch einen bekannten Punkt und eine bekannte Gerade geht. Nun müssen durch jede Collineation, welche F^4 in sich überführt, die Ebenenquadrupel $\alpha\beta\gamma\delta$ und $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ entweder in sich oder in einander übergehen. Jedes dieser beiden Quadrupel kann aber, weil es äquianharmonisch ist, auf zwölffache Weise sowohl sich, als auch dem andern collinear gesetzt werden. Haben wir so $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ auf irgend eine Weise und ebenso $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$ sich selbst collinear gesetzt, so ist die Collineation nach dem Obigen bestimmt, sobald noch irgend einem Punkte ein passender Punkt zugewiesen ist. Sei nun $\mathfrak{p}$ ein Punkt von F^4 und h die Gerade durch $\mathfrak{p}$, welche g und g' trifft, so muss dem Punkte $\mathfrak{p}$ einer der 4 Schnittpunkte der oben definirten Geraden h_1 mit F^4 entsprechen, und weisen wir umgekehrt dem Punkte $\mathfrak{p}$ irgend einen dieser 4 Punkte zu, so geht durch die dadurch bestimmte Collineation F^4 in sich über. Denn die F^4 entsprechende Fläche hat dann mit derselben erstens die 16 Schnittlinien der Ebenenquadrupel $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ gemein und zweitens den dem Punkte $\mathfrak{p}$ entsprechenden Punkt, ist also mit ihr identisch. Da nun jede collineare

Zuordnung der Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu einander mit jeder der Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ zu einander combinirt werden kann, so erhalten wir in dieser Weise $12 \cdot 12 \cdot 4 = 576$ Collineationen der F^4 in sich. Ordnet man ebenso den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Ebenen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ auf alle mögliche Weise collinear zu, so erhält man 576 weitere Collineationen, sodass F^4 im Ganzen durch 1152 Collineationen in sich übergeht.

Wir sind zu dieser Fläche 4. Ordnung, welche man *die äquianharmonische Fläche 4. Ordnung* nennen kann, von zwei neunfach hyperboloidisch liegenden Tetraedern ausgekommen. Aber man kommt zu ihr offenbar auch von zwei Quadrupeln äquianharmonischer Ebenen aus, nur dass man ohne den von mir entwickelten Ausgangspunkt nicht so leicht die vorstehend abgeleiteten Eigenschaften würde haben finden können. Ich will mich nicht dabei aufhalten, was nach den entwickelten Methoden und den eingeführten Bezeichnungen keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr macht, aber ohne lange Auseinandersetzungen nicht deutlich genug wird, nun wirklich den umgekehrten Weg einzuschlagen und zu beweisen, dass jede Fläche 4. Ordnung durch die 16 Schnittlinien zweier Quadrupel äquianharmonischer Ebenen die eben entwickelten Eigenschaften besitzt. Ich will mich damit begnügen, dieselben in folgenden Satz zusammenzufassen:

Jede Fläche 4. Ordnung durch die 16 Schnittlinien zweier Quadrupel äquianharmonischer Ebenen enthält noch 48 andere, also im Ganzen 64 gerade Linien. Dieselben liegen noch zu je vieren in 64 Ebenen. Diese 64 Ebenen ordnen sich zu je achten zu den Seitenflächen von 24 neunfach hyperboloidisch liegenden Tetraederpaaren, sodass die 16 Schnittlinien der Seitenflächen jedes Paares auf der Fläche liegen. Diese 24 Tetraederpaare ordnen sich in drei Complexe zu je achten und die 8 Paare jedes Complexes theilen sich in zwei Gruppen zu je vier so, dass jedes Paar mit den vier Paaren der andern Gruppe und dem von den Quadrupeln äquianharmonischer Ebenen gebildeten Tetraederpaar zusammen eine Gruppe von 6 Tetraederpaaren der in § 5. beschriebenen Art bildet. Die Fläche lässt sich 144 Mal so durch collineare Systeme erzeugen, dass die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich collinear wird. Die Fläche geht übrigens durch 1152 Collineationen in sich über.

Nach dem Ausgangspunkte, welcher zu diesen Flächen führte, liegt es mir noch ob, diejenige zweite Fläche 4. Ordnung des Büschels durch die 16 Schnitlinien der Seitenflächen der Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zu erwähnen, welche durch die geschaart-involutorische Collineation (III) in sich übergeht. Man erhält dieselbe, wenn man den bestimmenden Punkt einfach auf einer der beiden Axen g oder g' der Collineation annimmt. Weil nur noch eine zweite solche Fläche existiren kann, so muss in der That die g enthaltende Fläche auch

durch g' gehen. Da diese Fläche zu keiner neuen der von uns zu betrachtenden collinearen Erzeugung führt, so will ich mich bei ihrer Behandlung nicht aufhalten. Ich erwähne nur kurz, dass dann jedes der Paare von Tetraedern (A_1), (A_2) und (A_3) einander gleichzeitig um- und eingeschrieben ist; diese Tetraederpaare liegen aber nur fünffach hyperboloidisch. Die Fläche enthält ausser g und g' keine weiteren geraden Linien.

§ 7.

Ueber die tetraedral-symmetrische Fläche 4. Ordnung.

Wenn wir jetzt wieder zu der in § 5. in Angriff genommenen Aufgabe zurückkehren, zwei Tetraeder, welche schon die vier hyperboloidischen Lagen 1 bis 4 haben, in möglichst viele solche zu bringen, so ist zunächst zu bemerken, dass sie mehr als neunfach nicht hyperboloidisch liegen dürfen. Denn nehmen wir noch irgend eine der übrigen hyperboloidischen Lagen an, sei es aus der Gruppe 5 bis 20 oder aus der Gruppe 21 bis 24, so ergiebt sich durch analoge Schlüsse wie in § 5., dass die beiden Tetraeder $ABCD$ und $A'B'C'D'$ einander noch auf andere Weise, als dort angegeben, gleichzeitig um- und eingeschrieben sein müssen, was nicht möglich, ohne dass die Tetraeder zusammenfallen oder degeneriren. Nehmen wir z. B. noch die hyperboloidische Lage

$$6.\quad AD',\ BC',\ CA',\ DB'$$

an, so ergiebt sich aus dieser in Verbindung mit den hyperboloidischen Lagen 2, dass die Tetraeder durch die Collineation:

$$\begin{aligned} &A,\ B,\ C,\ D;\quad A',\ B',\ C',\ D'\\ \text{in:}\ &A,\ C,\ D,\ B;\quad C',\ A',\ B',\ D' \end{aligned}$$

in sich übergehen. Diese aber führt die hyperboloidische Lage 3 in:

$$21.\quad AB',\ BA',\ CD',\ DC'$$

über, woraus in Verbindung mit den hyperboloidischen Lagen 2 und 4 folgt, dass die beiden Tetraeder einander so gleichzeitig um- und eingeschrieben sind, dass den Ebenen:

$$\begin{aligned} &A,\ B,\ C,\ D:\\ &D',\ C',\ B',\ A' \end{aligned}$$

entsprechen. Da nun die beiden Tetraeder einander schon so gleichzeitig ein- und umgeschrieben sind, dass den Ebenen:

$$\begin{aligned} &A,\ B,\ C,\ D:\\ &A',\ D',\ C',\ B' \end{aligned}$$

entsprechen, so müssen gehen durch

den	Punkt:	ABC	die	Ebenen	A'	und	B',
„	„ :	ABD	„	„	B'	„	C',
„	„ :	ACD	„	„	C'	„	D',
„	„ :	BCD	„	„	D'	„	A'.

Diese Forderung kann erstens dadurch erfüllt werden, dass A', B', C', D' resp. durch BC, AB, AD, CD gehen; dann müssen aber ebenso auch A, B, C, D resp. durch $B'C'$, $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$ gehen, was nicht anders möglich, als dass A, B, C, D mit resp. C', B', A', D' zusammenfallen. Sie kann zweitens dadurch erfüllt werden, dass alle 8 Ebenen durch denselben Punkt gehen, was ja nicht zu eigentlichen hyperboloidischen Lagen führen kann, und endlich dadurch, dass A, B, C, D und A', B', C', D' durch je eine Gerade gehen. Dieser Fall ist hier jedoch nicht möglich, weil dann, wie schon früher erwähnt wurde, diese Ebenenquadrupel gleichzeitig harmonisch und äquianharmonisch sein müssten.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, wie wir etwa zu neuen hyperboloidischen Lagen kommen, wenn wir zu den Lagen 1 bis 4 nicht eine aus der Gruppe 5 bis 20 hinzunehmen, sondern aus der Gruppe 21 bis 24. Eine solche Lage, nämlich 24, kam ja bereits in dem schon betrachteten Falle hinzu, und es folgt aus ihr nichts anderes, als dass die beiden Tetraeder einander gleichzeitig um- und eingeschrieben sind. Es könnten daher neue Lagen nur hinzutreten, falls man ausser der hyperboloidischen Lage 24 noch eine aus dieser Gruppe, etwa 21 annimmt. Dann bleibt, wie wir soeben gesehen haben, als einziger Fall, in welchem eigentliche hyperboloidische Lagen eintreten können, der übrig, dass A, B, C, D durch dieselbe Gerade k und A', B', C', D' durch dieselbe Gerade k' gehen. Weil aber durch die Collineation (I) (A, B, C, D) in (B, C, D, A) übergeht, welches Doppelverhältniss gleich (A, D, C, B) ist, so sind A, C durch B, D harmonisch getrennt und ebenso A', C' durch B', D'. In der That ist dann:

$$(A, B, C, D) \barwedge (A', B', C', D') \barwedge (B', A', D', C') \barwedge (C', D', A', B')$$
$$\barwedge (D', C', B', A') \barwedge (A', D', C', B') \barwedge (D', A', B', C') \barwedge (C', B', A', D')$$
$$\barwedge (B', C', D', A'),$$

sodass die 8 hyperboloidischen Lagen 1 bis 4 und 21 bis 24 von selbst eintreten. Die durch die 16 Schnittlinien der Seitenflächen der beiden Tetraeder gelegte Fläche 4. Ordnung besitzt hiernach noch 16 weitere gerade Linien, welche sich ebenfalls als Schnittlinien der Seitenflächen zweier Tetraeder darstellen, sodass wir das neue Schema haben:

21.	AB'	BA'	CD'	DC'	A_2A_2'	B_2B_2'	C_2C_2'	D_2D_2'
22.	AA'	BD'	CC'	DB'	A_2D_2'	B_2A_2'	C_2B_2'	D_2C_2'
23.	AD'	BC'	CB'	DA'	A_2C_2'	B_2D_2'	C_2A_2'	D_2B_2'
24.	AC'	BB'	CA'	DD'	A_2B_2'	B_2C_2'	C_2D_2'	D_2A_2'

Sind E und F die beiden Ebenen, welche A, C und B, D gleichzeitig harmonisch trennen, ebenso E' und F' dieselben Ebenen für A', C' und B', D' so, dass:

$$(A, B, C, D, E, F) \curlywedge (A', B', C', D', E', F'),$$

dagegen:

$$(A, B, C, D, E, F) \curlywedge (B', A', D', C', F', E'),$$

so erkennt man leicht, dass die Hyperboloide 1 bis 4 durch die Geraden EE' und FF', dagegen die Hyperboloide 21 bis 24 durch EF' und FE' gehen. Weil nun k und k' nicht in F^4 enthalten sind, so sind es auch diese 4 Geraden nicht, woraus folgt, dass die Ebenen A_1, B_1, C_1, D_1 etwa durch EE' und die Ebenen A_1', B_1', C_1', D_1' durch FF' gehen. Ebenso gehen die Ebenen A_2, B_2, C_2, D_2 durch EF' und A_2', B_2', C_2', D_2' durch FE'. Natürlich sind nun auch A_1, C_1 durch B_1, D_1; A_1', C_1' durch B_1', D_1'; A_2, C_2 durch B_2, D_2 und A_2', C_2' durch B_2', D_2' harmonisch getrennt. Die 4 hyperboloidischen Lagen 21 bis 24 der beiden Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ und $A_1'B_1'C_1'D_1'$ ergeben nun $4 \cdot 4$ gerade Linien, welche EF' und FE' schneiden müssen, also mit den Schnittlinien der Ebenen A_2, B_2, C_2, D_2 und A_2', B_2', C_2', D_2' identisch sind; man erhält so noch das Schema:

A_1B_1'	B_1A_1'	C_1D_1'	D_1C_1'	A_2B_2'	B_2A_2'	C_2D_2'	D_2C_2'
A_1A_1'	B_1D_1'	C_1C_1'	D_1B_1'	A_2A_2'	B_2D_2'	C_2C_2'	D_2B_2'
A_1D_1'	B_1C_1'	C_1B_1'	D_1A_1'	A_2D_2'	B_2C_2'	C_2B_2'	D_2A_2'
A_1C_1'	B_1B_1'	C_1A_1'	D_1D_1'	A_2C_2'	B_2B_2'	C_2A_2'	D_2D_2'

Man sieht hieraus, dass die Fläche 4. Ordnung $3 \cdot 4 = 12$ collineare Erzeugungen zulässt, deren zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich collinear werden. Als Gesammtzahl der Collineationen der F^4 in sich ermittelt man wie im vorigen Paragraphen leicht $24 \cdot 64 = 1536$.

Hierzu kommt man auch leicht von der besonders einfachen analytischen Darstellung dieser Fläche. In Beziehung auf das Tetraeder

$EFE'F'$ stellt sich diese Fläche nämlich als Summe von vier Biquadraten dar*). Hierbei ist es nun von besonderem Interesse, den analytischen Ausdruck der 12 collinearen Erzeugungen der Fläche zu verfolgen. Es entsprechen nämlich diesen 12 Erzeugungen 12 independente Darstellungen der Summe von vier Biquadraten der Coordinaten in Form einer Determinante 4. Ordnung**), deren Glieder die Coordinaten sind multiplicirt mit vierten Einheitswurzeln. Die ersten Unterdeterminanten dieser Determinanten stellen dann, gleich Null gesetzt, Flächen 3. Ordnung dar, welche die Fläche 4. Ordnung in den 12 Geraden einer Schläfli'schen Doppelsechs schneiden. Eine solche Doppelsechs ist z. B.:

$$AA',\ CC',\ C_1B_1',\ A_1D_1',\ D_2B_2',\ B_2D_2';$$
$$CB',\ AD',\ A_1A_1',\ C_1C_1',\ A_2D_2',\ C_2B_2',$$

wie man aus den Tabellen leicht ersieht. Die sechs Geraden:

$$AA',\ CC',\ C_1B_1',\ A_1D_1',\ A_2D_2',\ C_2B_2'$$

bilden eine g^6 der in § 1. beschriebenen Erzeugung der Fläche; in der That sind die acht Geraden b_i dreifache Secanten dieser speciellen Raumcurve 6. Ordnung. Es giebt im Ganzen 64 solche Doppelsechsen. Ausserdem gruppiren sich die 48 Geraden von F^4 noch zu einer andern Classe von $2 \cdot 64 = 128$ Doppelsechsen; jedoch glaube ich nach dem allgemeinen Gesichtspunkte der collinearen Erzeugung, unter welchem ich diese Fläche hier betrachte, auf diese Specialitäten nicht näher eingehen zu dürfen. Wir erhalten das Resultat:

Legt man durch die 16 *Schnittlinien zweier Quadrupel harmonischer Ebenen eine Fläche* 4. *Ordnung, so enthält dieselbe noch* 32 *andere gerade Linien, welche sich ebenfalls als die Schnittlinien von zweimal zwei Quadrupeln äquianharmonischer Ebenen darstellen; die sechs Axen dieser dreimal zwei Quadrupel bilden die gegenüberliegenden Kanten eines Tetraeders. Diese Fläche* 4. *Ordnung lässt sich zwölfmal so durch collineare ebene Systeme erzeugen, dass die zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sich eine lineare wird.*

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass sich aus der Lösung unserer Aufgabe, Flächen 4. Ordnung zu finden, welche sich möglichst oft auf die mehrfach beschriebene Art collinear erzeugen lassen, gleichzeitig die Lösung der Aufgabe ergeben hat, Tetraeder zu finden, welche mehrfach hyperboloidisch liegen. Denn es finden sich in unsern Bei-

*) S. de la Gournerie, surfaces réglées tétraédralement symmétriques, Paris, 1867, pag. 232.

**) Cfr. H. S. p. 1, 2. Note.

spielen alle Typen mehrfacher hyperboloidischer Lage zweier Tetraeder. Nur der Typus der gleichzeitigen Lagen 1, 3, 21, 23 wird durch den letzten degenerirten Fall nicht deutlich genug; er kann eben mit einem Typus, der zur Periode vier gehört, nicht anders als so gleichzeitig auftreten. Er bedarf daher noch einer besonderen Behandlung, doch liegt dieselbe unserm Thema fern.

Leipzig, im April 1882.

Bemerkung zu Herrn Sturm's Abhandlung: „Ueber die reciproke Verwandtschaft und damit zusammenhängende Verwandtschaften" XIX. Bd., 4. Heft.

Von

S. Kantor in Prag.

In dieser Abhandlung beschäftigt sich Herr Sturm mit dem Büschel von Reciprocitäten in der Ebene und dem Netze von Reciprocitäten im Raume, wie man dies kurz ausdrücken kann. Ferner werden für den Fall der Coincidenz der Räume, namentlich für die Ebene, Betrachtungen über Oerter gegeben.

Ueber diese beiden Gegenstände mögen mir einige Bemerkungen gestattet sein. Mit den linearen Systemen linearer Transformationen — darunter insonderheit den Büscheln in der Ebene und Bündeln im Raume — beschäftige ich mich in einer kürzlich endgültig abgeschlossenen Arbeit, zu der das Material jedoch aus einem Zeitraume von zwei und einhalb Jahren herrührt. Auch bei Verschiedenheit der Räume liegt dort der Schwerpunkt in dem *allgemeinsten, m-fachen unendlichen* Systeme im R_m und es gelingt mir darum, in den von Herrn Sturm (Nr. 1—3) angedeuteten Zusammenhang etwas tiefer einzudringen. Ich finde dabei auch auf eine eigenthümliche Art die Nullsysteme höheren Grades, von denen Herr Sturm spricht (Nr. 15 und 19), sowie andere ebenso interessante speciellen Lagen. Der eingeschlagene Weg führt ebenso zu Nullsystemen beliebigen Grades. Die Resultate über coincidente Träger bleiben hier ausser Betracht. Ich hoffe diese Untersuchungen demnächst in den Denkschriften der Wiener Akademie zu publiciren.

Hinsichtlich der *Correlationen* bei coincidenten Trägern habe ich schon December 1880 und Januar 1881 Untersuchungen angestellt. In der That musste es mir nahe liegen nach den Collineationssystemen nun auch Correlationssysteme im selben Raume ähnlicher Behandlung zu unterwerfen. Ich hatte dabei die Absicht, den einleitenden Theil, in dem sich auch die Sätze des Herrn Sturm finden, von dem, der auch hier die successiven Transformirten behandelt (deren Verwandt-

schaften bei Correlationen bedeutende Complication annehmen), zu trennen. Durch Zufall erhielt ich erst gestern das Annalenheft mit Herrn Sturm's Arbeit zur Ansicht und werde mich nunmehr beeilen, die durch leidige Umstände verhinderte Schlussredaction für die Veröffentlichung vorzunehmen, ohne die in Frage kommenden Stücke zu ändern.

Einstweilen bemerke ich einmal, dass ich eben wieder das Netz (Gebüsch) betrachtete, wo also das von Hrn. Sturm vorausgesetzte Paar der conjugirten Punkte noch in Wegfall gekommen ist. Dabei füge ich hinzu, dass ich die wichtigeren jener Oerter bereits in ihrer Deutung für die quadratische Transformation, welche mit dem Correlationsbüschel äquivalent ist, in der Abhandlung: „Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene" Wiener Sitzungsberichte 81. Bd. 1880, II. Abth. Nr. 1. bis 5. gegeben habe, wo ich sie mit den successiven Transformirten in einen Zusammenhang brachte. Auch besteht ja ein Zusammenhang mit dem Connexe (1, 2). — Anderentheils ist es dadurch möglich, Wesen und Stellung der fraglichen Sätze klar zu erkennen, dass ich nebst dem Büschel (oder bei mir dem Netze) von Correlationen die gleichzeitig entstehenden Netze von Collineationen und des Weiteren gleichzeitig das Netz von quadratischen Transformationen betrachte, von welchen Untersuchungen bisher ebenfalls durch Niemand Erwähnung geschehen. So finde ich z. B.

In dem Netze von Collineationen, das durch die drei festen Punktepaare aa', bb', cc' bestimmt ist, stehen die Doppelpunkte mit den gegenüberliegenden Doppelgeraden, wie man von Vornherein sieht, in rationaler Verwandtschaft. Dieselbe ist quadratisch und hat $(bc, b'c')$, $(ca, c'a')$, $(ab, a'b')$ zum Hauptdreieck und aa', bb', cc' zum Hauptdreiseit.

Durch die drei Paare $a, b'c'$; $b, c'a'$; $c, a'b'$ ist ferner ein Netz von Correlationen bestimmt. Jede derselben besitzt einen Punkt σ [W nach Herrn Sturm] und eine Gerade $\tau_1\tau_2$ [UV nach Herrn Sturm]. Die Verwandtschaft zwischen σ und $\tau_1\tau_2$ ist nun ganz dieselbe wie die bei den Collineationen genannte. —

Giebt es eine quadratische Transformation, welche aa', bb', cc' zu Hauptpunktepaaren hat und in $i_1 i_2$ das involutorische Paar, so giebt es stets eine Collineation, welche aa', bb', cc' als entsprechende Punktepaare enthält und $i_1 i_2$ zu Doppelpunkten hat. —

Das involutorische Paar ist conjugirt bezüglich des von den vier Doppelpunkten gebildeten Viereckes u. s. w.

Ich hoffe, dass mich nichts hindern wird, die erwähnte Abhandlung binnen kürzester Frist zu veröffentlichen.

In Leipzig, den 22. April 1882.

Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn F. Klein.)

Von

F. Schottky in Breslau.

... Da meine Untersuchung *„Ueber conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen"**) neuerdings wiederholt in Ihrem geschätzten Journal erwähnt worden ist, so gestatten Sie mir eine Berichtigung in Bezug auf eine Bemerkung, welche sich Bd. XIX dieser Annalen am Schluss von p. 564 vorfindet und dann Bd. XX, p. 53 wiederholt wird. In meiner ursprünglichen Inauguraldissertation findet sich, pag. 55 und 56, die folgende Stelle:

„Wir gehen jetzt über zu dem Falle, dass jede der Linien L durch eine einzige Kreislinie gebildet wird. Dann existirt kein singulärer Punkt auf der Grenze des Gebiets; und es ist dieser Fall deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil dann u und v nicht nur im Innern des Gebietes A, sondern (mit Ausnahme vereinzelter singulärer Punkte, an welchen diese Functionen unbestimmt werden) in der ganzen Ebene den Charakter eindeutiger rationaler Functionen besitzen. Die Gestalt der Fläche A hängt in diesem Falle von $3n-6$ oder $3\varrho-3$ wesentlichen Constanten ab, da in Bezug auf die Differentialgleichung nichts geändert wird, wenn die Ebene x durch eine lineare Substitution von der Form $x' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ transformirt wird. Die gleiche Anzahl wesentlicher Constanten kommen in der Normalgleichung vor; ausserdem enthält aber der Coefficient $N(u, v)$ noch ebensoviel unbestimmte Constanten. Die durch die Differentialgleichung definirte Function y hängt also von doppelt soviel wesentlichen Parametern ab, wie diejenige, welche durch die Aufgabe selbst definirt ist."

Ich glaube, durch diese Stelle genügend die Wichtigkeit des Gegenstandes betont zu haben. Sie enthält zugleich die Andeutung

---

*) Ausführlich mitgetheilt in Borchardt's Journal Bd. 83, pag. 300—351, (1877), in vorläufiger Form als Berliner Inauguraldissertation 1875 publicirt.

desjenigen Problems, das, um die Untersuchung zum Abschluss zu bringen, noch zu lösen ist.

Dass übrigens Riemann bereits die mit dieser Figur in Zusammenhang stehenden Functionen und ihre Differentialgleichungen entdeckt hat, wird durch die Stelle pag. 413—416 seiner gesammelten Werke bewiesen*). Indess möchte ich betonen, dass meine Dissertation ein Jahr vor der Publication von Riemann's Nachlass erschienen ist. Auch erfuhr ich von Letzterem erst, als meine Arbeit bereits in ihrer zweiten Fassung zum Druck übergeben war. Aber ich bin glücklich, mit Ihnen die Priorität der Entdeckung Riemann's constatiren zu können....

Sie haben in freundlicher Weise den Wunsch geäussert, Genaueres über die Prämissen meiner damaligen Arbeit zu erfahren. Die Anregung zum selbständigen Eindringen in die Potentialtheorie verdanke ich Herrn Helmholtz. Das in der Arbeit behandelte Problem, der ursprünglichen Auffassung nach der Potentialtheorie gehörig, und wesentliche Anschauungen meiner Arbeit sind aus mathematisch-physikalischen Autoren geschöpft. Ich nenne neben den Vorlesungen und Schriften von Herrn Helmholtz insbesondere ein mir gütig von Herrn O. E. Meyer geliehenes Heft noch nicht publicirter Vorlesungen von Herrn F. Neumann, dann ferner ein Buch über Elektrostatik von Herrn Kötteritzsch, etc. Die Durchführung der so gewonnenen Ideen wurde mir sodann wesentlich erleichtert durch Herrn Weierstrass' Vorlesungen über Abel'sche Functionen, sowie besonders durch die von Herrn Schwarz publicirten Untersuchungen über das Abbildungsproblem einfach zusammenhängender Flächen. Mit Rücksicht auf die letzteren wurde auf den Rath meines hochverehrten Lehrers, Herrn Weierstrass, der ursprünglich überreichte Entwurf der Arbeit so abgeändert, dass sich dieselbe in beiden veröffentlichten Fassungen an die Untersuchungen von Herrn Schwarz anschliesst. ...

Breslau, im Mai 1882.

---

*) Gleichgewicht der Electricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen. — Herr Weber fügt als Herausgeber diesem Aufsatze die Bemerkung zu: „Von dieser und den folgenden Abhandlungen [des Riemann'schen Nachlasses] liegen ausgeführte Manuscripte von Riemann nicht vor. Sie sind aus Blättern zusammengestellt, welche ausser wenigen Andeutungen nur Formeln enthalten."

Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist.

Von

H. Weber in Königsberg in Pr.

Der Satz, mit dem sich der vorliegende Aufsatz beschäftigt, wurde zuerst von Dirichlet bewiesen auf Grund der Methoden, die bereits früher zum Beweis des analogen Satzes bezüglich der arithmetischen Progressionen geführt hatten, und dieser Beweis findet sich bis zu einem gewissen Punkte ausgeführt in den Monatsberichten der Berliner Academie vom März 1840 und im Crelle'schen Journal Bd. 21 für den besonderen Fall, dass die Determinante der quadratischen Form eine negative Primzahl $-p$ ist, welche abgesehen vom Zeichen die Form $4n+3$ hat, und ausserdem regulär ist. Von diesen Beschränkungen macht man sich leicht frei durch Anwendung des allgemeinen Satzes über Abel'sche Gruppen (§ 1), der zuerst von Schering, später aber, wie unter dem Text näher angeführt, noch von andern auf verschiedenen Wegen bewiesen wurde, auf den ich mich also einfach hätte berufen können. Trotzdem zog ich es vor, des Zusammenhangs und leichteren Verständnisses wegen noch einen möglichst einfachen und auf das Nothwendige beschränkten Beweis dieses wichtigen Satzes, der in den verschiedensten Theilen der Zahlentheorie und Algebra eine so wichtige Rolle spielt, voranzuschicken.

Abgesehen von dieser Erweiterung für beliebige Determinanten ist es aber noch ein anderer Punkt des Beweises, der der Ergänzung bedarf. Es heisst nämlich in dem citirten Aufsatz von Dirichlet: „Untersucht man nun die unter dem Logarithmenzeichen vorkommenden Ausdrücke in dieser Voraussetzung, so findet man durch sehr einfache Betrachtungen, die jedoch hier nicht ausgeführt werden können, dass L_0 unendlich wird, dass hingegen L_t, wenn t nicht den Werth 0 hat, sich einer endlichen von Null verschiedenen Grenze nähert." Dieser Punkt, der gerade den Kern des Beweises bildet, findet sich bei Dirichlet nirgends ausgeführt, und auch die späteren Arbeiten, die diesen Gegenstand betreffen, von Schering (l. c.) und Mertens

(Ueber einige asymptotische Gesetze in der Zahlentheorie. Journ. f. Mathematik Bd. 77) enthalten keine Andeutung darüber. Diese Lücke für negative sowohl als positive Determinanten auszufüllen, und zugleich eine zusammenhängende Darstellung des ganzen Beweisverfahrens zu geben, ist der Zweck der folgenden Arbeit.

Einen auf wesentlich anderer Grundlage ruhenden Beweis des Satzes hat Kronecker angedeutet, der jedoch zur Zeit nur auf negative Determinanten anwendbar erscheint, indem er die Grenzwerthe der sämmtlichen Reihen L direct als Classenzahlen in den Körpern derjenigen algebraischen Zahlen darstellt, die der complexen Multiplication der elliptischen Functionen entstammen, in analoger Weise wie Kummer die entsprechenden Reihen für die arithmetischen Progressionen auf die Classenzahlen in den Kreistheilungskörpern zurückgeführt hat. (Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie, October 1857, und Februar 1880.)

§ 1.

Hülfssätze über Gruppen.

Definition. Ein System G von h Elementen irgend welcher Art, $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_h$ heisst eine *Gruppe vom Grade h*, wenn es den folgenden Bedingungen genügt:

I. Durch irgend eine Vorschrift, welche als Composition oder Multiplication bezeichnet wird, leitet man aus zwei Elementen des Systems ein neues Element desselben Systems her. In Zeichen

$$\Theta_r \Theta_s = \Theta_t.$$

II. Es ist stets

$$(\Theta_r \Theta_s)\Theta_t = \Theta_r(\Theta_s \Theta_t) = \Theta_r \Theta_s \Theta_t.$$

III. Aus $\Theta\Theta_r = \Theta\Theta_s$ und aus $\Theta_r\Theta = \Theta_s\Theta$ folgt $\Theta_r = \Theta_s$.

Aus dieser Definition ergeben sich durch die einfachsten Schlüsse die folgenden Sätze:

1. Es giebt in G ein und *nur* ein Element Θ_0, welches der Bedingung genügt, dass für jedes Element Θ_t

$$\Theta_t\Theta_0 = \Theta_0\Theta_t = \Theta_t.$$

Ist nämlich Θ ein beliebiges Element in G, so sind nach III die Elemente

$$\Theta\Theta_1, \Theta\Theta_2, \cdots, \Theta\Theta_h$$

alle von einander verschieden und müssen daher mit der Gesammtheit aller Elemente G identisch sein. Es ist darunter also auch das Element Θ selbst enthalten, und folglich giebt es ein und *nur* ein Element Θ_0, welches der Bedingung $\Theta\Theta_0 = \Theta$ genügt. Hieraus folgt aber, wenn Θ_t ein beliebiges Element ist, $\Theta_t\Theta\Theta_0 = \Theta_t\Theta$, oder, da nach III

$\Theta_\iota\Theta$ zugleich mit Θ_ι alle Elemente der Gruppe G durchläuft, für jeden Index ι

(1) $$\Theta_\iota\Theta_0 = \Theta_\iota.$$

Ebenso beweist man die Existenz eines Elementes Θ_0', welches der Bedingung

(2) $$\Theta_0'\Theta_\iota = \Theta_\iota$$

genügt; und wenn man in (1) $\Theta_\iota = \Theta_0'$, in (2) $\Theta_\iota = \Theta_0$ setzt, so folgt

$$\Theta_0'\Theta_0 = \Theta_0 = \Theta_0'.$$

2. Ist von den beiden Elementen Θ, Θ' das eine beliebig gegeben, so lässt sich das andere so bestimmen, dass

$$\Theta\Theta' = \Theta'\Theta = \Theta_0.$$

Denn ist Θ gegeben, so schliesst man wie in 1., dass in der Reihe $\Theta\Theta_1$, $\Theta\Theta_2$, $\cdots$, $\Theta\Theta_h$ alle Elemente von G, und jedes nur einmal, vorkommen. Es ist daher für *ein bestimmtes* Element Θ'

$$\Theta\Theta' = \Theta_0.$$

Hieraus aber folgt (mit Rücksicht auf 1.)

$$\Theta'\Theta\Theta' = \Theta'\Theta_0 = \Theta_0\Theta',$$

also auch. nach III.

$$\Theta'\Theta = \Theta_0.$$

Das Element Θ_0 soll das *Hauptelement* der Gruppe G genannt und als *Einheit* bezeichnet werden ($\Theta_0 = 1$). Θ' heisst das zu Θ *reciproke* Element ($\Theta' = \Theta^{-1}$). Hieraus erklären sich von selbst die Potenzen Θ^m eines jeden Elementes für positive, negative und verschwindende ganzzahlige Exponenten, für welche die Sätze gelten:

$$\Theta^0 = 1, \quad \Theta^m\Theta^n = \Theta^{m+n} \quad (\Theta^m)^n = \Theta^{mn}.$$

Da die Anzahl der Elemente in G eine endliche ist, so muss unter den aufeinanderfolgenden Potenzen eines jeden derselben

$$\Theta^0, \Theta, \Theta^2, \Theta^3, \cdots$$

dasselbe Element nothwendig sich wiederholen. Ist also $\Theta^m = \Theta^n$, so folgt $\Theta^{m-n} = 1$. Ist m der kleinste positive Exponent, für welchen $\Theta^m = 1$ ist, so sind die Elemente

$$1, \Theta, \Theta^2, \cdots, \Theta^{m-1},$$

deren Inbegriff die *Periode* von Θ genannt wird, alle von einander verschieden und es ist dann und *nur* dann $\Theta^\mu = \Theta^{\mu'}$, wenn $\mu \equiv \mu'$ (mod. m), also Θ^μ dann und nur dann $= 1$, wenn μ durch m theilbar. ist. Die Zahl m heisst der *Grad* des Elementes Θ. Das Hauptelement $\Theta_0 = 1$ ist das einzige der Gruppe, dessen Grad $= 1$ ist. Für alle andern ist derselbe grösser als 1.

3. Der Grad eines jeden Elementes Θ ist ein Theiler des Grades h der Gruppe.

Der Satz ist richtig für den Fall, dass durch die Periode von Θ

$$(\Theta) \qquad \Theta^0, \Theta^1, \Theta^2, \cdots, \Theta^{m-1}$$

die ganze Gruppe G erschöpft wird. Ist dies nicht der Fall, und Θ_1 ein in (Θ) nicht enthaltenes Element, so sind auch die Elemente

$$(\Theta_1) \qquad \Theta_1\Theta^0, \Theta_1\Theta^1, \Theta_1\Theta^2, \cdots, \Theta_1\Theta^{m-1}$$

sowohl unter einander als von den Elementen (Θ) verschieden. Ist auch hiermit die Gruppe G noch nicht erschöpft und Θ_2 ein in (Θ) und (Θ_1) nicht enthaltenes Element, so sind auch die Elemente

$$(\Theta_2) \qquad \Theta_2\Theta^0, \Theta_2\Theta^1, \Theta_2\Theta^2, \cdots, \Theta_2\Theta^{m-1}$$

sowohl unter einander als von den Elementen (Θ), (Θ_1) verschieden. Auf diese Weise lässt sich fortfahren, bis die ganze Gruppe G in lauter Reihen von je m Elementen zerlegt ist, woraus die Richtigkeit des Satzes erhellt.

Ist m der Grad eines Elementes Θ, und m_1 irgend ein Theiler von m, so existiren in G auch Elemente vom Grade m_1; denn es ist $\Theta^{\frac{m}{m_1}}$ ein solches.

Definition. Die Gruppe G heisst eine *Abel'sche Gruppe*, wenn sie ausser den Bedingungen I, II, III noch der Bedingung genügt:

IV. Für je zwei Elemente Θ_r, Θ_s der Gruppe ist

$$\Theta_r\Theta_s = \Theta_s\Theta_r,$$

woraus sich dann, wie in den Elementen der Arithmetik, der Satz von der unbeschränkten Vertauschbarkeit der Factoren irgend eines Productes von Elementen ergiebt.

Die folgenden Sätze beziehen sich nur auf Abel'sche Gruppen.

4. Ist h der Grad einer Abel'schen Gruppe G und r irgend eine in h aufgehende Primzahl, so giebt es in G Elemente, deren Grad durch r theilbar ist, und folglich (nach 3.) auch Elemente, deren Grad $= r$ ist.

Um diesen Satz zu beweisen, seien $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_h$ die sämmtlichen Elemente von G, und $m_1, m_2, \cdots, m_h$ ihre Grade. In der Form

$$(3) \qquad \Theta = \Theta_1^{\mu_1}\Theta_2^{\mu_2}\cdots\Theta_h^{\mu_h},$$

worin die Exponenten $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_h$ vollständige Restsysteme nach den Moduln $m_1, m_2, \cdots, m_h$ durchlaufen, ist dann sicher jedes Element von G enthalten, und man sieht auch leicht, dass jedes Element gleich oft, etwa n mal in dieser Form darstellbar ist; denn man erhält aus *einer* Darstellung eines beliebigen Elementes Θ in der Form (3) alle übrigen durch Multiplication mit den sämmtlichen Darstellungen des Hauptelementes „1". Die Gesammtzahl aller Darstellungen der Form (3) ist aber das Product $m_1 m_2 \cdots m_h$, und mithin ist

$$m_1 m_2 \cdots m_h = nh.$$

Ist also r eine in h aufgehende Primzahl, so muss mindestens einer der Factoren $m_1, m_2, \cdots, m_k$ durch r theilbar sein; w. z. b. w.

5. Der Grad eines Productes von Elementen $\Theta_1, \Theta_2, \cdots$ einer Abel'schen Gruppe ist stets ein Theiler des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Grade von $\Theta_1, \Theta_2, \cdots$; denn ist m dies kleinste gemeinschaftliche Vielfache, so ist

$$(\Theta_1 \Theta_2 \cdots)^m = \Theta_1^m \Theta_2^m \cdots = 1.$$

6. Ist $h = ab$, und a, b relatim prim, so giebt es in G genau a Elemente A, deren Grad ein Theiler von a, und b Elemente B, deren Grad ein Theiler von b ist, und in der Form AB sind sämmtliche Elemente von G, und jedes nur einmal, enthalten.

Beweis. Der Inbegriff $\mathfrak{A}$ aller Elemente A bildet wegen 5. eine Abel'sche Gruppe; ebenso der Inbegriff $\mathfrak{B}$ aller Elemente B. Sind a', b' die Grade dieser Gruppen, so ist a' relativ prim zu b, und b' zu a; denn ist r eine in a' und b aufgehende Primzahl, so giebt es nach 4. in $\mathfrak{A}$ Elemente vom Grade r, was der Definition von $\mathfrak{A}$ widerspricht.

Bestimmt man nun die ganzen Zahlen x, y so, dass

$$ax + by = 1$$

wird, so ist für ein beliebiges Element Θ

$$\Theta = \Theta^{ax} \Theta^{by} = BA,$$

da Θ^{ax} in $\mathfrak{B}$, Θ^{by} in $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Es lässt sich also jedes Element Θ in der Form AB darstellen. Eine solche Darstellung ist aber auch nur auf eine Art möglich, denn aus $AB = A'B'$ folgt, indem man zur Potenz by erhebt, $A = A'$ und mithin auch $B = B'$. Demnach ist

$$h = ab = a'b',$$

und folglich da a mit b' und b mit a' keinen Theiler gemein hat:

$$a = a', \quad b = b', \qquad \text{w. z. b. w.}$$

7. Ist der Grad h einer Abel'schen Gruppe $\mathfrak{P}$ eine Potenz einer Primzahl p, und mithin auch der Grad eines jeden Elementes von $\mathfrak{P}$ eine Potenz von p, so kann man in $\mathfrak{P}$ die Elemente $P_1, P_2, P_3, \cdots$ von den Graden $p_1, p_2, p_3, \cdots$ so auswählen, dass in der Form

$$P = P_1^{\nu_1} P_2^{\nu_2} P_3^{\nu_3} \cdots \tag{4}$$

jedes Element von $\mathfrak{P}$ enthalten ist, und nur ein einziges mal, wenn $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \cdots$ je einem vollständigen Restsystem nach den Moduln $p_1, p_2, p_3, \cdots$ entnommen werden.

Beweis. Man wähle aus $\mathfrak{P}$ die Elemente $P_1, P_2, P_3, \cdots$ von den Graden $p_1, p_2, p_3, \cdots$ so aus, dass in der Form

$$P = P_1^{\mu_1} P_2^{\mu_2} P_3^{\mu_3} \cdots \tag{5}$$

jedes Element von $\mathfrak{P}$ *mindestens* einmal enthalten ist. Dies ist stets möglich, da man nöthigenfalls für $P_1, P_2, P_3, \cdots$ selbst alle Elemente von $\mathfrak{P}$ mit Ausnahme des Hauptelementes nehmen kann.

Wie in 4. schliesst man, dass die Anzahl der Darstellungen in der Form (5) für alle Elemente gleich und so gross als die Anzahl der Darstellungen des Elementes „1^a" in der Form (5) ist. Sei s diese Zahl, dann ist

$$hs = p_1 p_2 p_3 \cdots$$

Es sei nun

$$1 = P_1^{n_1} P_2^{n_2} P_3^{n_3} \cdots$$

irgend eine Darstellung des Hauptelements in der Form (5), in welcher nicht alle Exponenten, auf ihre kleinsten Reste nach den Moduln $p_1, p_2, p_3, \cdots$ reducirt, verschwinden; ferner sei

$$n_1 = \pi_1 a_1, \quad n_2 = \pi_2 a_2, \quad n_3 = \pi_3 a_3, \cdots$$

worin $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \cdots$ Potenzen von p, $a_1, a_2, a_3, \cdots$ durch p nicht theilbar sind. Endlich ordne man die Indices so an, dass die Exponenten der höchsten Potenzen von p, welche in $n_1, n_2, n_3, \cdots$ aufgehen, nicht abnehmen. Es ist dann sicher $0 < \pi_1 < p_1$ und $\pi_2, \pi_3, \cdots$ durch π_1 theilbar. Setzt man nun

$$P_1' = P_1^{a_1} P_2^{\frac{\pi_2}{\pi_1} a_1} P_3^{\frac{\pi_3}{\pi_1} a_1} \cdots,$$

so ist $P_1'^{\pi_1} = 1$ und also der Grad p_1' von P_1' niedriger als der von P_1. Andererseits ist auch, da a_1 relativ prim zu p_1 ist, P_1 selbst und mithin jedes Element von $\mathfrak{P}$ durch die Potenzen von $P_1', P_2, P_3, \cdots$ darstellbar in der Form

$$P = P_1'^{\mu_1} P_2^{\mu_2} P_3^{\mu_3} \cdots,$$

und die Anzahl dieser Darstellungen ist

$$s' = \frac{p_1' p_2 p_3 \cdots}{h} < s.$$

Indem man auf diese Weise fortfährt, die Anzahl der Darstellungen zu verkleinern, gelangt man schliesslich dazu, an Stelle der Elemente $P_1, P_2, P_3, \cdots$ eine Reihe von Elementen $P_1', P_2' P_3' \cdots$ zu setzen von der Art, dass in der Form

$$P = P_1'^{\nu_1} P_2'^{\nu_2} P_3'^{\nu_3} \cdots$$

jedes Element von $\mathfrak{P}$ und jedes nur einmal enthalten ist. Das aber ist der zu beweisende Satz.

8. Aus 6. und 7. ergiebt sich nun ohne Weiteres der *Hauptsatz*.

In einer Abel'schen Gruppe G vom Grade h kann man stets die Elemente $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_r$ von den Graden $n_1, n_2, \cdots, n_r$ so auswählen, dass in der Form

$$\Theta_1^{\varepsilon_1} \Theta_2^{\varepsilon_2} \cdots \Theta_r^{\varepsilon_r}$$

jedes Element Θ *von* G *und jedes nur einmal enthalten ist, wenn* $s_1, s_2, \cdots, s_\nu$ *je einem vollständigen Restsystem nach den Moduln* $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ *entnommen werden.*

Zugleich ergiebt sich

$$h = n_1 n_2 \cdots n_\nu \text{*)}.$$

Ein solches System von Elementen, wie $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\nu$ wollen wir eine *Basis* der Gruppe nennen.

9. Ordnet man den ν Elementen $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\nu$ einer solchen Basis ν Einheitswurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ von den Graden $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ zu, so entspricht auch jedem Element $\Theta = \Theta_1^{s_1} \Theta_2^{s_2} \cdots \Theta_\nu^{s_\nu}$ der Gruppe eine bestimmte h^{te} Einheitswurzel ω nach der Vorschrift

$$\omega = \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \cdots \omega_\nu^{s_\nu}. \tag{6}$$

Wir bezeichnen diese Einheitswurzel mit $\chi(\Theta)$, und nennen dieselbe den *Charakter* des Elementes Θ.**) Derselbe genügt stets der Bedingung

$$\chi(\Theta)\,\chi(\Theta') = \chi(\Theta\Theta'). \tag{7}$$

Da man jeder der Einheitswurzeln $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\nu$ ihre $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ verschiedenen Werthe beilegen kann, so erhält man $n_1 n_2 \cdots n_\nu = h$ solcher Charaktere $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\nu$. Ist umgekehrt $\chi(\Theta)$ eine durch das Element Θ eindeutig bestimmte Function, welche der Bedingung (7) genügt, so ist dieselbe nothwendig unter diesen h Charakteren enthalten. Denn aus (7) folgt zunächst, wenn man für Θ' das Hauptelement Θ_0 setzt

$$\chi(\Theta_0) = 1.$$

Da sich ferner aus (7) ergiebt:

$$(\chi(\Theta))^n = \chi(\Theta^n)$$

so folgt, wenn n der Grad von Θ ist, dass $\chi(\Theta)$ eine n^{te} Einheitswurzel sein muss. Ist daher $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\nu$ eine Basis der Gruppe G, so schliesst man hieraus, dass

$$\chi(\Theta_1) = \omega_1, \quad \chi(\Theta_2) = \omega_2, \quad \cdots, \quad \chi(\Theta_\nu) = \omega_\nu$$

---

*) Aus unserer Ableitung dieses Satzes geht hervor, dass man die Elemente $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_\nu$ so annehmen kann, dass ihre Grade $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ Primzahlpotenzen sind; man kann aber auch mehrere dieser Elemente, deren Grade relativ prim sind, zu einem zusammenfassen, und auf diese Weise z. B. erreichen, dass von den Zahlen $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ jede durch die folgende theilbar ist. Man vergl. über diesen Satz: Schering „die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen". Abhandlungen der Ges. d. Wissensch. zu Göttingen Bd. 14. 1868. Kronecker, Monatsbericht der Berliner Academie vom 1. December 1870. Frobenius und Stickelberger „Ueber Gruppen von vertauschbaren Elementen" Journal f. Mathematik Bd. 86. 1878.

**) Vergl. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind 3. Auflage Ste. 581. Ich werde in der Folge dieses Werk mit *D* citiren.

Einheitswurzeln der Grade $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ sind, und, wenn

$$\Theta = \Theta_1^{t_1} \Theta_2^{t_2} \cdots \Theta_\nu^{t_\nu}$$

ist:

$$\chi(\Theta) = \omega = \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \cdots \omega_\nu^{s_\nu} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

10. Aus der Definition der Charaktere ergiebt sich sofort, dass wenn χ_1, χ_2 irgend zwei derselben sind, ein durch diese vollkommen bestimmter Charakter χ_3 existirt, so dass für jedes Element Θ

$$\chi_1(\Theta)\, \chi_2(\Theta) = \chi_3(\Theta) \tag{8}$$

ist. Den auf diese Weise bestimmten Charakter χ_3 kann man passend als das Product der beiden Charaktere χ_1, χ_2 bezeichnen, und es ergiebt sich daraus, dass die h Charaktere selbst wieder eine Abel'sche Gruppe bilden. Das Hauptelement χ_0 dieser Gruppe ist derjenige Charakter, welcher für *alle* Elemente Θ den Werth $+1$ besitzt, den wir den *Hauptcharakter* nennen. *Entgegengesetzte Charaktere* χ, χ^{-1} sind solche, deren Product der Hauptcharakter ist, deren einer daher für jedes Element Θ der reciproke Werth des andern ist.

Um die Gruppe der Charaktere nach dem Satz (8) darzustellen, bezeichne man mit χ_1 denjenigen Charakter, den man erhält, wenn man für ω_1 eine *primitive* n^{te} Einheitswurzel und für $\omega_2, \cdots, \omega_\nu$ die positive Einheit setzt. Entsprechende Bedeutung gebe man den Charakteren $\chi_2, \cdots, \chi_\nu$. Dann ist jeder Charakter χ in der Form darstellbar:

$$\chi = \chi_1^{t_1} \chi_2^{t_2} \cdots \chi_\nu^{t_\nu} \tag{9}$$

wenn $t_1, t_2, \cdots, t_\nu$ vollständige Restsysteme nach den Moduln $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ durchlaufen. Die Grade der Elemente $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_\nu$ (in der Gruppe der Charaktere) sind $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$.

11. Aus der Definition der Charaktere ergeben sich mit Benutzung bekannter Eigenschaften der Einheitswurzeln leicht die beiden Sätze:

Für jeden Charakter χ ist

$$\chi(\Theta_1) + \chi(\Theta_2) + \cdots + \chi(\Theta_h) = 0, \tag{10}$$

ausgenommen für den Hauptcharakter χ_0, für welchen

$$\chi_0(\Theta_1) + \chi_0(\Theta_2) + \cdots + \chi_0(\Theta_h) = h. \tag{11}$$

Für jedes Element Θ ist:

$$\chi_1(\Theta) + \chi_2(\Theta) + \cdots + \chi_h(\Theta) = 0, \tag{12}$$

ausgenommen für das Hauptelement Θ_0, für welches

$$\chi_1(\Theta_0) + \chi_2(\Theta_0) + \cdots + \chi_h(\Theta_0) = h. \tag{13}$$

12. Diejenigen Elemente der Gruppe G, welche der Bedingung $\Theta = \Theta^{-1}$ oder $\Theta^2 = 1$ genügen, zu denen auch das Hauptelement

gehört, heissen *ambige Elemente*. Soll das Element $\Theta = \Theta_1^{s_1} \Theta_2^{s_2} \cdots \Theta^{s_\nu}$ zu den ambigen gehören, so ist erforderlich und hinreichend, dass

$$2s_1 \equiv 0 \pmod{n_1},\ 2s_2 \equiv 0 \pmod{n_2}, \cdots, 2s_\nu \equiv \pmod{n_\nu}.$$

Nehmen wir also an, es seien $n_1, n_2, \cdots, n_{\lambda-1}$ gerade, $n_\lambda, \cdots, n_\nu$ ungerade, so sind die ambigen Elemente alle in der Form enthalten

$$\Theta_1^{\frac{n_1 \pm n_1}{4}} \Theta_2^{\frac{n_2 \pm n_2}{4}} \cdots \Theta_{\lambda-1}^{\frac{n_{\lambda-1} \pm n_{\lambda-1}}{4}}$$

und die Anzahl derselben ist also $2^{\lambda-1}$. Die Charaktere eines ambigen Elementes sind sämmtlich $= \pm 1$.

Ebenso nennen wir *ambige Charaktere* diejenigen, welche mit ihren entgegengesetzten identisch sind, und die also für jedes Element den Werth ± 1 haben. Die ambigen Charaktere sind nach (9) in der Form darstellbar

$$\chi_1^{\frac{n_1 \pm n_1}{4}} \chi_2^{\frac{n_2 \pm n_2}{4}} \cdots \chi_{\lambda-1}^{\frac{n_{\lambda-1} \pm n_{\lambda-1}}{4}}$$

und ihre Anzahl ist daher ebenfalls $2^{\lambda-1}$. Zugleich erhellt hieraus, dass für einen ambigen Charakter χ

$$\chi(\Theta_\lambda) = \cdots = \chi(\Theta_\nu) = +1$$

ist.

Auf den ambigen Charakteren beruht die Eintheilung der Gruppe G in *Geschlechter*, indem man alle solche Elemente Θ in ein Geschlecht vereinigt, für welche die ambigen Charaktere dasselbe Werthsystem haben. Man erhält die sämmtlichen Elemente eines Geschlechts, wenn man in

$$\Theta_1^{2s_1+\varepsilon_1} \Theta_2^{2s_2+\varepsilon_2} \cdots \Theta_{\lambda-1}^{2s_{\lambda-1}+\varepsilon_{\lambda-1}} \Theta_\lambda^{s_\lambda} \cdots \Theta_\nu^{s_\nu}$$

für $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{\lambda-1}$ eine bestimmte Combination der Zahlen 0, 1 setzt, und $s_1, s_2, \cdots, s_{\lambda-1}, s_\lambda \cdots s_\nu$ je ein vollständiges Restsystem nach den Moduln $\frac{1}{2} n_1, \frac{1}{2} n_2, \cdots, \frac{1}{2} n_{\lambda-1}, n_\lambda, \cdots, n_\nu$ durchlaufen lässt. Die Anzahl der verschiedenen Geschlechter ist also $2^{\lambda-1}$, und in jedem derselben sind $2^{1-\lambda} h$ Elemente enthalten. Das aus der Combination $\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 0, \cdots, \varepsilon_{\lambda-1} = 0$ hervorgehende Geschlecht heisst das *Hauptgeschlecht*. Die Elemente des Hauptgeschlechts bilden für sich eine Abel'sche Gruppe vom Grade $2^{1-\lambda} h$.

Man kann auch die Geschlechter unter sich wieder zusammensetzen und erhält so eine Abel'sche Gruppe vom Grade $2^{\lambda-1}$, welche aus lauter ambigen Elementen besteht.

§ 2.

Die Classen quadratischer Formen einer bestimmten Determinante D.

1. Wir betrachten nun die h Classen eigentlich primitiver quadratischer Formen einer bestimmten nicht quadratischen Determinante D, $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_h$, und beschränken uns im Falle einer negativen Determinante ein für allemal auf die Betrachtung solcher Classen, welche nur positive Formen enthalten. Diese Classen, als Elemente betrachtet, bilden, wenn man sie nach den Gauss'schen Gesetzen der Composition zusammensetzt, eine Abel'sche Gruppe vom Grade h (D. § 147.).

Eine positive Zahl m, relativ prim zu $2D$, ist bekanntlich dann und nur dann durch Formen der Determinante D eigentlich darstellbar, wenn D quadratischer Rest von m ist, und zu jeder Wurzel n der Congruenz

$$x^2 \equiv D (\text{mod. } m) \tag{1}$$

gehört eine gewisse Gruppe*) solcher Darstellungen durch die Formen einer Classe, welche durch die Form

$$\left(m, n, \frac{n^2 - D}{m}\right)$$

vertreten werden kann. (D. § 86.)

Ist zunächst f eine nicht in $2D$ aufgehende Primzahl, von welcher D quadratischer Rest ist, so entsprechen den beiden Wurzeln der Congruenz

$$x^2 \equiv D (\text{mod. } f)$$

zwei Gruppen von Darstellungen, welche in zwei entgegengesetzte Classen Θ, Θ^{-1} gehören. (Ist Θ eine ambige Classe, so sind beide Classen identisch).

Zu irgend einer Potenz von f, f^r gehören ebenfalls zwei Gruppen von Darstellungen, und zwar durch Formen der beiden Classen $\Theta^{\pm r}$.

Sind $f_1, f_2, \cdots, f_\mu$ ebensolche Primzahlen wie f, und $\Theta_1^{\pm 1}, \Theta_2^{\pm 1}, \cdots, \Theta_\mu^{\pm 1}$ die dieselben darstellenden Formenclassen, so giebt es für

$$m = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_\mu^{r_\mu}$$

genau 2^μ Gruppen von Darstellungen, die man auf folgende Weise erhält:

Es seien $\pm n_1, \pm n_2, \pm \cdots \pm n_\mu$ die Wurzeln der Congruenzen

$$x_1 \equiv D (\text{mod. } f_1^{r_1}), \quad x^2 \equiv D (\text{mod. } f_2^{r_2}) \cdots x^3 \equiv D (\text{mod. } f_\mu^{r_\mu}).$$

Die 2^μ Wurzeln der Congruenz

$$x^2 \equiv D (\text{mod. } m)$$

findet man dann aus den linearen Congruenzen

*) Das Wort Gruppe hat hier natürlich einen andern Sinn als in § 1.

$$n \equiv \varepsilon_1 n_1^* (\mathrm{mod.}\, f_1^{r_1}) \equiv \varepsilon_2 n_2 (\mathrm{mod.}\, f_2^{r_2}) \equiv \cdots \equiv \varepsilon_\mu n_\mu (\mathrm{mod.}\, f_\mu^{r_\mu}),$$
$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \cdots \varepsilon_\mu = \pm 1$$

und die zu n gehörige Gruppe von Darstellungen kann durch die Form stattfinden:

$$\left(m, n, \frac{n^2 - D}{m}\right),$$

welche zusammengesetzt ist aus den Formen

$$\left(f_1^{r_1}, \varepsilon_1 n_1, \frac{n_1^2 - D}{f_1^{r_1}}\right), \quad \left(f_2^{r_2}, \varepsilon_2 n_2, \frac{n_2^2 - D}{f_2^{r_2}}\right), \cdots \left(f_\mu^{r_\mu}, \varepsilon_\mu n_\mu, \frac{n_\mu^2 - D}{f_\mu^{r_\mu}}\right)$$

und also in die Classe

$$\Theta_1^{\varepsilon_1 r_1} \Theta_2^{\varepsilon_2 r_2} \cdots \Theta_\mu^{\varepsilon_\mu r_\mu}$$

gehört.

2. Bezeichnen wir jetzt mit $q, q', q'' \cdots$ die sämmtlichen in D aufgehenden von einander verschiedenen ungeraden Primzahlen, so haben die Gauss'schen Charaktere, deren Anzahl λ sei, nämlich die Symbole:

$$\left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \text{ wenn } D \equiv 1 \pmod 4,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad „ \quad D \equiv 3 \pmod 4,$$

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad „ \quad D \equiv 2 \pmod 8,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2} + \frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad „ \quad D \equiv 6 \pmod 8,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad „ \quad D \equiv 4 \pmod 8,$$

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}, (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}, \left(\frac{m}{q}\right), \left(\frac{m}{q'}\right), \left(\frac{m}{q''}\right) \cdots \quad „ \quad D \equiv 0 \pmod 8$$

für alle solche Zahlen m, welche durch eine und dieselbe Formenclasse Θ darstellbar sind, dieselben Werthe. Irgend eines der 2^λ Producte aus mehreren von ihnen (das Product 1 mitgerechnet) hat daher einen nur von der Formenclasse Θ abhängigen Werth und kann also mit $\varphi(\Theta)$ bezeichnet werden. Unter den Functionen $\varphi(\Theta)$ giebt es zwei und *nur* zwei, welche für alle Formenclassen Θ den Werth $+1$ haben (D. § 123 ff.) und daher sind auch immer je zwei und *nur* je zwei von den Functionen $\varphi(\Theta)$ für alle Formenclassen Θ identisch. Behält man von einem solchen Paar nur die eine Function bei, so bleiben $2^{\lambda-1}$ derselben, von denen irgend zwei gewiss für wenigstens eine der Formenclassen Θ verschiedene Werthe haben. Nun genügen aber die Functionen φ der Bedingung

$$\varphi(\Theta)\,\varphi(\Theta') = \varphi(\Theta\Theta');$$

denn wählt man, was stets möglich ist, die durch die Classen Θ, Θ' darstellbaren Zahlen m, m', so dass sie relativ prim zu einander sind, so ist das Product mm' durch die Classe $\Theta\Theta'$ darstellbar.

Daraus folgt aber nach § 1., 9. dass die Functionen $\varphi(\Theta)$ alle unter den dort erklärten Charakteren $\chi(\Theta)$ enthalten sein müssen, und da ihre Werthe sämmtlich ± 1 sind, so gehören dieselben zu den *ambigen Charakteren.*

Nun ist die Zahl der ambigen Formenclassen nach Gauss (Disq. Ar. Art. 257., D § 153.) $2^{\lambda-1}$, und daher hat λ hier genau dieselbe Bedeutung wie in § 1., 12. Die Anzahl der von einander verschiedenen Functionen $\varphi(\Theta)$ ist also genau so gross, wie die Anzahl der ambigen Charaktere $\chi(\Theta)$, und daher muss jede der Functionen $\varphi(\Theta)$ mit einem der ambigen Charaktere $\chi(\Theta)$ identisch sein und umgekehrt. Wenn also m wie oben irgend eine durch die Formen der Classe Θ eigentlich darstellbare zu $2D$ theilerfremde positive Zahl bedeutet, so hann man für jeden ambigen Charakter χ die positiven oder negativen Einheiten δ, ε und einen positiven Divisor Q von D so bestimmen, dass

$$\chi(\Theta) = \delta^{\frac{m-1}{2}}\,\varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}}\left(\frac{m}{Q}\right) \tag{2}$$

wird, wobei ε nur für eine gerade Determinante den Werth -1 haben kann. Nach dem Reciprocitätsgesetz der quadratischen Reste lässt sich aber der Ausdruck (2) stets in eine der vier Formen setzen

$$\left(\frac{\pm Q}{m}\right),\quad \left(\frac{\pm 2Q}{m}\right)$$

und zwar so, dass die beiden letzten Formen nur bei gerader Determinante D vorkommen. Man kann daher die Determinante D stets so in zwei (positive oder negative) Factoren $D_1 D_2$ zerlegen, dass

$$\chi(\Theta) = \left(\frac{D_1}{m}\right) = \left(\frac{D_2}{m}\right) \tag{3}$$

wird.

3) Die Anzahl der Darstellungen einer Zahl m, die sich in einer Gruppe finden, ist so gross wie die Anzahl der ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1.$$

Damit man nun auch bei positiven Determinanten nicht unendlich viele solche Darstellungen erhält, müssen die darstellenden Zahlen x, y gewissen Bedingungen unterworfen werden, durch die aus jeder Gruppe von Darstellungen eine einzige isolirt wird. Wir ertheilen den unbestimmten ganzen Zahlen x, y in einer der zur Determinante D gehörigen eigentlich primitiven Formen

$$\psi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

in der wir überdies a als *positiv* voraussetzen können, alle möglichen Werthe, welche

1° keinen gemeinschaftlichen Theiler haben,

2° der Form $\psi(x, y)$ einen positiven zu $2D$ theilerfremden Werth verschaffen,

3° im Falle *positiver Determinanten* den Bedingungen genügen

$$y \gtrless 0, \quad x > \frac{T - bU}{aU}\, y = \gamma y,$$

wenn T, U die kleinsten positiven Lösungen der Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1$$

sind. Setzt man in diesem Falle

$$\psi(x, y) = a(x - \alpha y)(x - \beta y),$$

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{D}}{a}, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{a},$$

so ist

$$\alpha < \beta < \gamma$$

und folglich $\psi(x, y)$ von selbst positiv.

Nach diesen Festsetzungen enthält jede Gruppe noch $\varkappa$ Darstellungen, wenn

$\varkappa = 1$ für positive Determinanten,

$\varkappa = 4$ für $D = -1$,

$\varkappa = 2$ für die übrigen negativen Determinanten (D. § 87., 88).

4. Es sei nun

$$\psi_1(x, y), \quad \psi_2(x, y), \cdots \psi_h(x, y)$$

ein vollständiges Repräsentantensystem der h zur Determinante D gehörigen eigentlich primitiven Formenclassen

$$\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_h$$

und wir betrachten, wenn χ einen beliebigen der h Charaktere bedeutet, die Summe:

$$L' = \chi(\Theta_1)\, \Sigma' \psi_1^{-s} + \chi(\Theta_2) \Sigma' \psi_2^{-s} + \cdots + \chi(\Theta_h)\, \Sigma' \psi_h^{-s},$$

in welcher die Summen Σ' sich auf sämmtliche den Bedingungen 1°, 2°, 3° genügenden Werthe der ganzen Zahlen x, y erstrecken. Für jeden Werth des Exponenten s, der > 1 ist, hat diese Summe einen bestimmten, von der Anordnung der Glieder unabhängigen Werth.

Bedeutet m wie oben jede zu $2D$ theilerfremde positive ganze Zahl, von welcher D quadratischer Rest ist, so kann man die Glieder der Summe L' zu Partialsummen von der Form zusammenfassen

$$\varkappa m^{-s} \Sigma \chi(\Theta),$$

worin sich die Summe Σ auf alle diejenigen (gleichen oder verschiedenen) Formenclassen Θ erstreckt, denen (nach 1.) eine Gruppe von Darstellungen der Zahl m entspricht.

Ist andererseits f eine der in den Zahlen m aufgehenden Primzahlen, welche (nach 1.) durch die Formenclassen $\Theta^{\pm 1}$ darstellbar ist, so ergiebt sich durch Entwicklung nach steigenden Potenzen von f^{-s}

$$\frac{1-f^{-2s}}{(1-f^{-s}\chi(\Theta))\,(1-f^{-s}(\chi(\Theta^{-1}))} = 1 + f^{-s}\big(\chi(\Theta)+\chi(\Theta^{-1})\big) + f^{-2s}\big(\chi(\Theta^2)+\chi(\Theta^{-2})\big)+\cdots.$$

Bildet man das mit Π zu bezeichnende Product dieses Ausdrucks über sämmtliche Primzahlen f, so erhält man durch Ausmultipliciren der Reihen auf der rechten Seite eine Reihe, welche die sämmtlichen Glieder $m^{-s}\Sigma\chi(\Theta)$ umfasst. Daraus folgt also

$$L' = \varkappa \prod \frac{1-f^{-2s}}{(1-\chi(\Theta)f^{-s})\,(1-\chi(\Theta^{-s})f^{-s})}.$$

Bezeichnet man mit g alle diejenigen in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen, von denen D quadratischer Nichtrest ist, mit n alle positiven zu $2D$ theilerfremden Zahlen, so ist bekanntlich

$$\prod \frac{1}{1-g^{-2s}} \prod \frac{1}{1-f^{-2s}} = \sum \frac{1}{n^{2s}}$$

und hiernach lässt sich die vorhergehende Formel folgendermassen darstellen:

$$\text{(I)} \qquad \varkappa \prod \frac{1}{1-g^{-2s}} \prod \frac{1}{(1-\chi(\Theta)f^{-s})\,(1-\chi(\Theta^{-1})f^{-s})}$$
$$= \chi(\Theta_1)\,\Sigma\psi_1^{-s} + \chi(\Theta_2)\,\Sigma\psi_2^{-s} + \cdots + \chi(\Theta_h)\,\Sigma\psi_h^{-s} = L,$$

worin sich nunmehr die Summen Σ auf der rechten Seite auf alle den Bedingungen 2^0, 3^0 genügenden Zahlen x, y erstrecken, also auch auf solche Combinationen dieser Zahlen, die einen gemeinschaftlichen Theiler haben.

Aus dieser Formel leiten wir noch eine zweite ab durch Entwicklung ihres Logarithmus mit Benutzung der Gleichung

$$-\log(1-\chi(\Theta)f^{-s}) = \frac{\chi(\Theta)}{f^s} + \frac{1}{2}\frac{\chi(\Theta^2)}{f^{2s}} + \frac{1}{3}\frac{\chi(\Theta^3)}{f^{3s}} + \cdots$$

Man erhält, wenn man zur Abkürzung

$$\varkappa \prod \frac{1}{1-g^{-2s}} = G$$

setzt:

$$(\text{II}) \sum \frac{\chi(\Theta)+\chi(\Theta^{-1})}{f^s} + \frac{1}{2}\sum \frac{\chi(\Theta^2)+\chi(\Theta^{-2})}{f^{2s}} + \frac{1}{3}\sum \frac{\chi(\Theta^3)+\chi(\Theta^{-3})}{f^{3s}} + \cdots = -\log G + \log L,$$

worin sich die Summen links auf sämmtliche Primzahlen f erstrecken.

Jede der Formeln (I), (II) repräsentirt h verschiedene Formeln, entsprechend den h verschiedenen Charakteren $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_h$. Bezeichnet man dem entsprechend die h Summen L mit $L'\ L'', \cdots, L^{(h)}$, so ergiebt die Addition der sämmtlichen Formeln (II) mit Rücksicht auf § 1., 11):

$$(\text{III}) \quad \sum \frac{1}{f^s} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{f^{2s}} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{f^{3s}} + \cdots = -\frac{1}{2}\log G + \frac{1}{2h}(\log L' + \log L'' + \cdots + \log L^{(h)}),$$

worin auf der linken Seite die erste, zweite, dritte u. s. w. Summe sich auf diejenigen Primzahlen f erstreckt, deren erste, zweite, dritte u. s. w. Potenzen durch die *Hauptclasse* der Determinante D darstellbar sind. Multiplicirt man dagegen die Gleichung (II) mit dem Charakter $\chi(\Theta_\varkappa)$ einer beliebigen von der Hauptclasse verschiedenen Classe $\Theta_\varkappa$ und bildet wieder die Summe aller Formeln (II), so erhält man in gleicher Weise:

$$(\text{IV}) \quad \sum \frac{1}{f^s} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{f^{2s}} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{f^{3s}} + \cdots = \frac{1}{\varepsilon h}\left(\chi_1(\Theta_\varkappa)\, L' + \chi_2(\Theta_\varkappa)\, L'' + \cdots + \chi_h(\Theta_\varkappa)\, L^{(h)}\right),$$

worin sich die erste, zweite, dritte u. s. w. Summe auf der linken Seite auf diejenigen Primzahlen bezieht, deren erste, zweite, dritte u. s. w. Potenzen durch die Formen der Classe $\Theta_\varkappa$ darstellbar sind, und $\varepsilon = 2$ oder $= 1$ ist, jenachem Θ zu den ambigen Classen gehört oder nicht.

Der zu führende Beweis wird also erbracht sein, wenn gezeigt ist, dass die erste Summe auf der linken Seite der Gleichungen (III), (IV) unendlich viele Glieder enthält, und dies folgt, wenn nachgewiesen ist, dass diese Summe für $s = 1$ einen unendlichen Grenzwerth hat.

§ 3.

Der Kern des Beweises.

Die Summen $L', L'', \cdots L^{(h)}$, welche in den Formeln (III), (IV) des vorigen Paragraphen vorkommen, zerfallen in drei Arten, nämlich

1° die eine Reihe L_0, welche aus (I) hervorgeht, wenn χ der *Hauptcharakter* ist,

2^0 Die Reihen L_1, welche aus (I) entstehen, wenn χ einen der vom Hauptcharakter verschiedenen ambigen Charaktere bedeutet,

3^0 die Reihen L_2, welche den übrigen Charakteren entsprechen, in welchen also die Functionen $\chi(\Theta_1), \chi(\Theta_2), \cdots \chi(\Theta_h)$ gewiss wenigstens zum Theil imaginär sind.

Jede dieser letzteren Reihen kommt in den Formeln (III), (IV) zweimal vor, da, wie die Formel (I) lehrt, zweien entgegengesetzten Charakteren derselbe, und zwar *reelle*, Werth der Summe L entspricht.

Es handelt sich nun um die Untersuchung der Grenzwerthe, welchen sich diese drei Arten von Reihen für $s = 1$ nähern.

Aus der Theorie der quadratischen Formen ist bekannt, dass die in den L vorkommenden Summen $\Sigma\psi^{-s}$ die Eigenschaft haben, dass

$$(s-1)\,\Sigma\psi^{-s}$$

für $s = 1$ sich einem endlichen, nur von der Determinante D abhängigen Grenzwerth g nähert*).

1. Hieraus ergiebt sich zunächst für die Reihe L_0, wenn man

$$s = 1 + \varrho$$

setzt.

(V) $$\lim_{\varrho=0} \varrho L_0 = hg,$$

d. h. die Reihe L_0 wird für $\varrho = 0$ unendlich gross wie $\frac{gh}{\varrho}$.

2. Die Untersuchung der Grenzwerthe der Reihen L_1, L_2 beruht auf einem Fundamentalsatze der Differentialrechnung, dessen Beweis ich hier, da es auf eine genaue Festsetzung des Gültigkeitsbereichs wesentlich ankommt, kurz reproduciren will**).

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervall

(1) $$a \leqq x < b$$

stetige Function von x, und es sei ferner für *jedes* x in dem Intervall

(2) $$a < x < b$$

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h=0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = f'(x)$$

ein bestimmter endlicher Werth.

---

*) Vgl. D. § 95., 98. Der Werth von g ist für negative Determinanten $\frac{\pi\varphi(-2D)}{-2D\sqrt{-D}}$ für positive Determinanten

$$\frac{\varphi(2D)}{4D\sqrt{D}} \log(T + U\sqrt{D}) = \frac{\varphi(2D)}{2D\sqrt{D}} \log\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}.$$

Es ergeben sich diese Resultate auch aus den unten folgenden Betrachtungen.

**) Man vgl. den Beweis von O. Bonnet in Serret, Cours de calcul différential et intégral T. I, p. 15, auch Harnack, die Elemente der Differential- und Integralrechnung § 37.

Ist nun x_1 irgend ein Werth von x im Intervall (2) so ist nach Voraussetzung

$$\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}=A$$

ein endlicher Werth. Setzt man also

$$\varphi(x)=\big(f(x)-Ax\big)-\big(f(a)-Aa\big),$$

so ist $\varphi(x)$ stetig in dem Intervall

$$a \leqq x \leqq x_1 \tag{3}$$

und es ist ausserdem $\varphi(a)=\varphi(x_1)=0$. Ist daher $\varphi(x)$ nicht constant $=0$, so giebt es in dem Intervall

$$a < x' < x_1 \tag{4}$$

einen Werth x', für welchen $\varphi(x')$ einen positiven Maximumwerth oder einen negativen Minimumwerth erhält. Daraus folgt, dass in allen Fällen (auch für ein constantes $\varphi(x)$) die beiden Ausdrücke

$$\frac{\varphi(x'+h)-\varphi(x')}{h}, \qquad \frac{\varphi(x'-h)-\varphi(x')}{-h}$$

für ein hinlänglich kleines h niemals dasselbe Vorzeichen haben können. Da sie aber nach Voraussetzung für $h=0$ beide denselben Grenzwerth $f'(x')-A$ besitzen, so folgt, dass dieser verschwinden muss. Ersetzt man also A wieder durch seinen Werth, so folgt hieraus

$$f(x_1)=f(a)+(x_1-a)f'(x'), \qquad a<x'<x_1.$$

Ueber das Verhalten von $f'(x)$ für $x=a$ ist hierbei keine Voraussetzung gemacht. Fügen wir aber noch die Annahme hinzu, dass

$$\operatorname*{Lim}_{x=a} f'(x)=f'(a)$$

ein bestimmter endlicher Werth sei, so folgt hieraus

$$f'(a)=\operatorname*{Lim}_{x_1=a}\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}.$$

3. Aus bekannten Sätzen (D § 143f.) folgt, dass die unendliche Reihe

$$\sum\frac{1}{\psi^{1+\varrho}}$$

für jedes *positive* ϱ eine *endliche und stetige* Function von ϱ ist, welche einen gleichfalls *endlichen und stetigen* Differentialquotienten

$$-\sum\frac{\log\psi}{\psi^{1+\varrho}}$$

besitzt. Das Gleiche gilt daher auch von den aus solchen Functionen zusammengesetzten Summen L.

Es soll nun weiter unten nachgewiesen werden, dass die beiden Ausdrücke

VI. $$\sum' \frac{1}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho}; \qquad -\sum' \frac{\log \psi}{\psi^{1+\varrho}} + \frac{g}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ *endliche Grenzwerthe* besitzen. Setzen wir dies für den Augenblick voraus und setzen:

$$\sum' \frac{1}{\psi_\varkappa^{1+\varrho}} = \frac{g}{\varrho} + \Phi_\varkappa(\varrho)$$

so ist $\Phi_\varkappa(\varrho)$ eine für jedes $\varrho \gtreqless 0$ endliche und stetige Function und besitzt nach dem Hülfssatz 2. einen in dem gleichen Umfang endlichen und stetigen Differentialquotienten $\Phi'_\varkappa(\varrho)$.

Nun ist für die Summen $L(\varrho)$ der *zweiten* und *dritten Art* mit Rücksicht auf § 1, 11.

$$L(\varrho) = \chi(\Theta_1)\Phi_1(\varrho) + \chi(\Theta_2)\Phi_2(\varrho) + \cdots + \chi(\Theta_h)\Phi_h(\varrho)$$

und daher sind auch diese $L(\varrho)$ endliche und stetige Functionen von ϱ mit ebensolchen Differentialquotienten $L'(\varrho)$ für jedes $\varrho \gtreqless 0$, und nach Satz 2. ist

(5) $$L(\varrho) = L(0) + \varrho L'(\vartheta\varrho), \quad 0 < \vartheta < 1,$$
$$L'(0) \text{ endlich.}$$

Es wird nun zunächst nachgewiesen werden, dass der Grenzwerth der Summen der *zweiten Art*, $L_1(0)$, *von Null verschieden* ist. Ist dies geschehen, so ergiebt sich dasselbe für die Reihen der dritten Art L_3 aus der Gleichung (III). Wäre nämlich für eine dieser Summen $L_2(0) = 0$, so würde (nach (5)) $\log L_2(\varrho)$ für $\varrho = 0$ negativ unendlich wie $\log \varrho$, während $\log L_0(\varrho)$ positiv unendlich wird wie $-\log \varrho$. Da aber, wie schon oben bemerkt, jedes Glied von der Form $\log L_2$ auf der rechten Seite von III zweimal vorkommt, und da überdies, wie aus elementaren Sätzen folgt, $\log G$ für $s = 1$ endlich bleibt*), so würde mit abnehmendem ϱ die rechte Seite von III zuletzt negativ und zwar über alle Grenzen gross, was der wesentlich positiven linken Seite widerspricht.

---

*) Es ist nämlich

$$\log G - \log \varkappa = \sum \frac{1}{g^{2s}} + \frac{1}{2}\sum \frac{1}{g^{4s}} + \frac{1}{3}\sum \frac{1}{g^{6s}} + \cdots$$
$$< \sum_{2,\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{2,\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{2,\infty} \frac{1}{n^6} + \cdots$$

und

$$\frac{1}{n^4} \leqq \frac{1}{4}\frac{1}{n^2}, \qquad \frac{1}{n^6} \leqq \frac{1}{16}\frac{1}{n^2}, \cdots$$

folglich

$$\log G - \log \varkappa < \frac{4}{3}\sum_{2,\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Da hiernach also auf der rechten Seite der Gleichungen III, IV nur das einzige mit $\log L_0$ multiplicirte Glied für $\varrho = 0$ unendlich wird, so muss auch die linke Seite dieser Gleichungen unendlich werden; und da überdies

$$Q = \frac{1}{2}\sum\frac{1}{f^{2s}} + \frac{1}{3}\sum\frac{1}{f^{3s}} + \cdots < \frac{1}{2}\sum_{2,\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{2,\infty}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{2}\sum_{2,\infty}\frac{1}{n^4} + \cdots$$

$$\frac{1}{n^3} < \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2}, \qquad \frac{1}{n^4} < \frac{1}{4}\,\frac{1}{n^2}, \cdots$$

also

$$Q < \sum_{2,\infty}\frac{1}{n^2}$$

und mithin für $s = 1$ endlich bleibt, so folgt, dass die erste Summe auf der linken Seite der Gleichungen III, IV

$$\sum\frac{1}{f^s}$$

für $s = 1$ unendlich gross werden muss, also gewiss aus unendlich vielen Gliedern besteht, w. z. b. w.

§ 4.

Die Summen L_1 der zweiten Art.

Um unsern Beweis zu vervollständigen, haben wir zunächst zu zeigen, dass die Summen der zweiten Art, $L_1(\varrho)$, für $\varrho = 0$ einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwerth haben. Den ambigen Charakteren $\chi(\Theta)$ haben wir in § 2. 2. den Ausdruck gegeben:

$$\chi(\Theta) = \left(\frac{D_1}{m}\right) = \left(\frac{D_2}{m}\right),$$

wenn m eine beliebige durch die Formen der Classe Θ darstellbare Zahl und $D_1 D_2 = D$ ist, und zwar ist, wenn χ nicht der Hauptcharakter ist, wie hier vorausgesetzt, weder D_1 noch D_2 ein Quadrat.

Hiernach ergiebt sich aus den Formeln D. § 125 Ste. 325 für die entsprechende Summe L_1 der Ausdruck:

$$(1) \qquad L_1 = \varkappa \sum\left(\frac{D_1}{n}\right)\frac{1}{n^s}\sum\left(\frac{D_2}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

wenn sich die Summen auf der rechten Seite auf sämmtliche positive Zahlen erstrecken, die relativ prim zu $2D$ sind.

Ist nun q eine Primzahl, die in $2D$ aber nicht in $2D_1$ aufgeht, und versteht man unter n' alle diejenigen Zahlen, welche aus n durch Hinzunahme der durch q theilbaren entstehen, so ist

$$\sum\left(\frac{D_1}{n'}\right)\frac{1}{n'^s} = \sum\left(\frac{D_1}{n}\right)\frac{1}{n^s} + \sum\left(\frac{D_1}{qn'}\right)\frac{1}{(qn')^s},$$

also:

$$\sum\left(\frac{D_1}{n}\right)\frac{1}{n^s}=\left(1-\left(\frac{D_1}{q}\right)\frac{1}{q^s}\right)\sum\left(\frac{D_1}{n'}\right)\frac{1}{n'^s}.$$

Verfährt man ebenso mit den übrigen Primzahlen q, die in $2D$, aber nicht in $2D_1$ aufgehen, und behandelt analog den zweiten Factor des Ausdrucks (1), so ergiebt sich

$$(2)\quad L_1=\varkappa\prod\left(1-\left(\frac{D_1}{q'}\right)\frac{1}{q'^s}\right)\prod\left(1-\left(\frac{D_2}{q''}\right)\frac{1}{q''^s}\right)\sum\left(\frac{D_1}{n'}\right)\frac{1}{n'^s}\sum\left(\frac{D_1}{n''}\right)\frac{1}{n''^s}$$

Hierin bezieht sich das erste Productzeichen auf die in D_2 aber nicht in D_1 aufgehenden ungeraden Primzahlen q', das zweite auf die in D_2 aber nicht in D_1 aufgehenden q''; und diese beiden Producte haben daher für jedes positive s, also auch für $s=1$ von Null verschiedene Werthe. In den beiden Summenzeichen durchlaufen n', n'' die sämmtlichen positiven zu $2D_1$ resp. $2D_2$ theilerfremden Zahlen. Die Grenzwerthe der beiden letzteren Summen für $s=1$ sind aber, von endlichen nicht verschwindenden Factoren abgesehen, die Classenzahlen der quadratischen Formen für die Determinanten D_1, D_2 und also von Null verschieden. (D. Stn. 242, 247). Demnach besitzt auch L_1 einen von Null verschiedenen endlichen Grenzwerth. w. z. b. w.

§ 5.

Die Functionen $\Sigma\psi^{-s}$, $\Sigma\log\psi\cdot\psi^{-s}$.

Nach den Ausführungen des § 3 kommt es zur Erledigung des Beweises nur noch auf die Grenzwerthe der beiden Functionen

$$\sum'\frac{1}{\psi^{1+\varrho}},\qquad\sum'\frac{\log\psi}{\psi^{1+\varrho}}$$

für verschwindende Werthe von ϱ an.

Um diese zu untersuchen befreien wir uns zunächst von der Beschränkung, welche für die variablen ganzen Zahlen x, y darin liegt, dass nur solche Werthe in Betracht kommen sollen, für welche

$$\psi(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$$

einen zu $2D$ theilerfremden Werth erhält. Hierzu nehmen wir an, die Repräsentanten der Formenclassen seien so gewählt, dass a positiv und relativ prim zu $2D$ sei, was stets möglich ist. (Gauss D. A. art. 228, D. § 93); Dann können wir ferner b durch D theilbar und im Falle eines ungeraden D ungerade annehmen, was dann zur Folge hat, dass c durch D theilbar und gerade ist. Hiernach bezieht sich die obige Beschränkung nur noch auf die für x zu setzenden Zahlen und verlangt von diesen, dass sie durch keine der in $2D$ aufgehenden Primzahlen $q, q', q'', \cdots$ theilbar seien.

Wenn wir von dem System sämmtlicher ganzen Zahlen x alle Zahlen von der Form qx wegnehmen, so bleiben diejenigen übrig, welche nicht durch q theilbar sind. Fügen wir zu diesen hinzu alle Zahlen von der Form $qq'x$ und nehmen alle Zahlen von der Form $q'x$ weg, so bleiben diejenigen übrig, welche weder durch q noch durch q' theilbar sind, u. s. f. Bedeutet allgemein x' das System aller Zahlen, welche relativ prim zu irgend einer Zahl d sind, und ist q eine in d nicht aufgehende Primzahl, so erhält man alle zu dq theilerfremden Zahlen, wenn man von den System der Zahlen x' alle Zahlen von der Form qx' wegnimmt.

Sind hierbei, wie in dem Fall der positiven Determinanten, die Zahlen x' noch an eine Bedingung von der Form gebunden

$$x' > \gamma' y$$

so hat man nur diejenigen Zahlen qx' davon wegzunehmen, für welche

$$x' > \frac{\gamma'}{q} y$$

ist. Nach diesen Bemerkungen lässt sich die Function $\Sigma \psi(x, y)^{-s}$ zerlegen in eine Summe von ähnlichen Functionen in der Weise

$$\overset{d}{\Sigma} \pm \Sigma \psi(dx, y)^{-s}$$

worin sich das erste Summenzeichen auf alle Producte d von verschiedenen in $2D$ aufgehenden Primzahlen erstreckt, und das positive oder negative Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Anzahl der Primfactoren von d gerade oder ungerade ist. Das andere Summenzeichen bezieht sich für den Fall negativer Determinanten auf alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe x, y mit alleiniger Ausnahme der Werthcombination $x = 0$, $y = 0$; im Falle positiver Determinante kommen noch die Bedingungen hinzu

$$y \gtrless 0, \quad x > \frac{\gamma}{d} y$$

während

$$\psi(dx, y) = ad^2x^2 + 2bdx + cy^2 = ad^2\left(x - \frac{\alpha}{d} y\right)\left(x - \frac{\beta}{d} y\right),$$

so dass, wenn man $\frac{\alpha}{d}$, $\frac{\beta}{d}$, $\frac{\gamma}{d}$ mit α', β', γ', bezeichnet, auch jetzt die Bedingung besteht

$$\alpha' < \beta' < \gamma'.$$

Hierdurch ist also unsere Aufgabe auf den allgemeinen Nachweis zurückgeführt, dass die beiden Ausdrücke

$$\sum (ax^2 + 2bxy + cy^2)^{-1-\varrho} - \frac{g}{\varrho}$$

$$\sum \frac{\lg (ax^2 + 2bxy + cy^2)}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2}$$

oder abgekürzt

$$\sum \frac{1}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho}, \qquad \sum \frac{\log \psi}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ und irgend ein endliches g endliche Grenzwerthe haben, wenn, falls $b^2 - ac$ negativ ist, x, y alle positiven und negativen ganzen Zahlen mit Ausnahme der Werthcombination 0, 0 zu durchlaufen haben, während für ein positives $b^2 - ac$ die Variablen x, y alle ganzzahligen Werthe annehmen, welche den Bedingungen genügen

$$y \geqq 0, \quad x > \gamma y$$

worin $\gamma > \beta > \alpha$, wenn α, β die reellen Wurzeln der Gleichung $ax^2 + 2bx + c = 0$ sind. Der Coefficient a wird in beiden Fällen als positiv vorausgesetzt. Die Forderung, dass a, b, c ganze Zahlen seien, ebenso die besondere Bedeutung, die γ bisher hatte, kommen für die folgende Untersuchung nicht weiter in Betracht.

Wir reduciren die Aufgabe zunächst noch auf eine andere, indem wir von den bekannten Formeln Gebrauch machen

$$\int_0^\infty e^{-t\psi} t^\varrho \, dt = \frac{\Gamma(1+\varrho)}{\psi^{1+\varrho}}$$

$$\int_0^\infty e^{-t\psi} t^\varrho \log t \, dt = \frac{\Gamma'(1+\varrho)}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{\Gamma(1+\varrho)\log\psi}{\psi^{1+\varrho}}$$

wodurch man, wenn zur Abkürzung

$$J_\varrho = \int_0^\infty t^\varrho \, dt \, \Sigma e^{-t\psi}, \qquad J'_\varrho = \int_0^\infty t^\varrho \log t \, dt \, \Sigma e^{-t\psi}$$

gesetzt wird, und die Summen in demselben Sinne wie oben verstanden werden, erhält:

$$\sum \psi^{-1-\varrho} = \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} J_\varrho$$

$$\sum \frac{\log\psi}{\psi^{1+\varrho}} = \frac{\Gamma'(1+\varrho)}{(\Gamma(1+\varrho))^2} J_\varrho - \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} J'_\varrho$$

oder auch

$$\sum \psi^{-1-\varrho} - \frac{g}{\varrho} = \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} \left(J_\varrho - \frac{g}{\varrho}\right) + \frac{g}{\varrho}\left(\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} - 1\right)$$

$$\sum \frac{\log\psi}{\psi^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2} = \frac{\Gamma'(1+\varrho)}{(\Gamma(1+\varrho))^2}\left(J_\varrho - \frac{g}{\varrho}\right) - \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\left(J'_\varrho + \frac{g}{\varrho^2}\right)$$
$$- \frac{g}{\varrho^2}\left(1 - \frac{1}{\Gamma(1+\varrho)} - \varrho \frac{\Gamma'(1+\varrho)}{(\Gamma(1+\varrho))^2}\right).$$

Daraus ergiebt sich in Folge bekannter Eigenschaften der Gammafunction, dass man nur noch zu zeigen hat, dass die beiden Ausdrücke

$$J_\varrho - \frac{g}{\varrho}, \qquad J'_\varrho + \frac{g}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ endliche Grenzwerthe haben. Bei dieser Betrachtung muss aber der Fall negativer Determinanten von dem der positiven Determinanten getrennt werden.

a) Negative Determinanten.*)

Um die Untersuchung der Integrale J_ϱ, J'_ϱ zunächst für negative Determinanten durchzuführen, setzen wir

$$\Sigma e^{-\psi(x,y)} = \Theta(a, b, c) \tag{1}$$

$$\Sigma e^{-t\psi(x,y)} = \Theta(ta, tb, ct) = \Theta(t). \tag{2}$$

Die Function $\Theta(t)$ ist für positive t endlich und stetig und nimmt mit wachsendem t fortwährend ab, und zwar so, dass $e^{\lambda t}\Theta(t)$ für ein angebbares positives constantes λ für $t = \infty$ verschwindet, (man kann für λ jeden Werth setzen, der kleiner ist als der kleinste Werth der positiven Function $\psi(x, y)$).

Das Verhalten dieser Function für $t = 0$ ergiebt sich aus der Transformationstheorie der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Es findet sich nämlich bei Rosenhain (Mém. sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, Théorème III, Mém. prés. d. l. Ac. d. Paris T. XI.) eine Formel, die sich mit Benutzung von

$$\Theta(a, b, c) = \Theta(c, -b, a)$$

so schreiben lässt

$$\Theta(a, b, c) + 1 = \frac{\pi}{\sqrt{-D}}\left\{\Theta\left(\frac{\pi^2 a}{-D}, \frac{\pi^2 b}{-D}, \frac{\pi^2 c}{-D}\right) + 1\right\}$$

oder wenn

$$\frac{\pi}{\sqrt{-D}} = g \tag{3}$$

gesetzt wird

$$\Theta(t) = -1 + \frac{g}{t} + \frac{g}{t}\Theta\left(\frac{g^2}{t}\right).$$

Darnach erhält man

$$\int_0^\infty \Theta(t)\, t^\varrho\, dt = \int_g^\infty \Theta(t)\, t^\varrho\, dt + \int_0^g t^\varrho \left\{-1 + \frac{g}{t} + \frac{g}{t}\Theta\left(\frac{g^2}{t}\right)\right\} dt.$$

Substituirt man für t in dem ersten Integral rechts gt, in dem zweiten $\frac{g}{t}$, so findet man

---

*) Kronecker hat in einer sehr wichtigen Abhandlung (Monatsberichte der Berliner Academie vom 22. Januar 1863) den Grenzwerth des Unterschieds zweier Summen $\sum' \frac{1}{\psi^s}$ für zwei verschiedene Formen ψ, die zu derselben negativen Determinante, aber zu verschiedenen Classen gehören, durch solche *einfache* Thetafunctionen, für welche die complexe Multiplication stattfindet, ausgedrückt. Für unsern Zweck, bei dem es nur auf den Nachweis der Endlichkeit der Grenzwerthe ankommt, genügt die unten folgende Bestimmung, deren Grundgedanke, nämlich die Anwendung der zweifach unendlichen Thetareihen mir von meinen Freund R. Dedekind mitgetheilt worden ist.

$$(4)\quad J_\varrho = \int_0^\infty \Theta(t)\, t^\varrho\, dt = g^{1+\varrho}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{1+\varrho} + \int_1^\infty \Theta(gt)\,(t^\varrho + t^{-1-\varrho})\right) dt$$

und auf demselben Wege (oder auch durch Differentiation der Formel (4) nach ϱ):

$$(5)\quad J'_\varrho = \int_0^\infty \Theta(t) t^\varrho \log t\, dt = g^{1+\varrho}\log g \left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{1+\varrho} + \int_1^\infty \Theta(gt)(t^\varrho + t^{-1-\varrho})dt\right.$$

$$\left. + g^{1+\varrho}\left\{\frac{1}{(1+\varrho)^2} - \frac{1}{\varrho^2} + \int_1^\infty \Theta(gt)(t^\varrho - t^{-1-\varrho})\log t\, dt,\right.\right.$$

zwei Formeln, die für alle positiven Werthe von ϱ gelten. Hieraus ergeben sich die gesuchten endlichen Grenzwerthe, wenn man beachtet, dass die beiden Integrale $\int_1^\infty \Theta(gt)\, t^s\, dt$, $\int_1^\infty \Theta(gt)\, t^s \log t\, dt$ für alle *positiven* und *negativen* Werthe von s durchaus stetige Functionen von s sind.*)

$$(6)\quad \lim_{\varrho=0}\left(J_\varrho - \frac{g}{\varrho}\right) = g\log g - g + g\int_1^\infty \Theta(gt)\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$$

$$(7)\quad \lim_{\varrho=0}\left(J'_\varrho + \frac{g}{\varrho^2}\right) = g - g\log g + \frac{1}{2} g\,(\log g)^2$$

$$+ g\int_1^\infty \Theta(gt)\left(1 - \frac{1}{t}\right)\log t\, dt$$

$$+ g\log g \int_1^\infty \Theta(gt)\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt.$$

---

*) Um dies z. B. für die erste der beiden Functionen zu zeigen, setze man

$$\int_1^\infty \Theta(gt)\, t^s\, dt = f(s),\quad f(s+\varepsilon) - f(s) = \int_1^\infty \Theta(gt)\, t^s\,(t^\varepsilon - 1)\, dt.$$

Setzt man für $t \gtreqless 1$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$t^\varepsilon - 1 = \varepsilon \log t \cdot A,$$

so ist

$$A = 1 + \frac{\varepsilon \log t}{2} + \frac{\varepsilon^2 (\log t)^2}{2\cdot 3} + \cdots \gtreqless t^\varepsilon \lesseqgtr t^{\varepsilon_0}$$

also

$$f(s+\varepsilon) - f(s) < \varepsilon \int_1^\infty \Theta(gt)\, t^{s+\varepsilon_0}\, dt$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt. Ebenso kann man mit dem zweiten der obigen Integrale verfahren.

b) Positive Determinanten.

In ähnlicher Weise lässt sich nun die Untersuchung für positive Determinanten führen, nur dass man sich hier nicht mehr auf bekannte Eigenschaften der Thetafunctionen stützen kann. Wir setzen für diesen Fall

$$\Theta(t) = \sum_{0,\infty}^{y} \sum_{x>\gamma y}^{x} e^{-ta(x-\alpha y)(x-\beta y)} \tag{8}$$

$$\alpha < \beta < \gamma.$$

Die Reihe, durch welche diese Function definirt ist, besteht aus lauter positiven Gliedern, welche mit wachsendem t abnehmen, und wenn es daher gelingt, den Werth der Reihe für irgend ein t in endliche Grenzen einzuschliessen, so folgt daraus die *Convergenz* und *Stetigkeit* derselben für jedes grössere t. Es folgt dann zugleich, dass für $t = \infty$ die Function $\Theta(t)$ verschwindet, und zwar so, dass auch noch $e^{\lambda t}\Theta(t)$ für ein positives constantes λ mit wachsendem t beständig abnimmt und sich der Grenze Null nähert. Wir suchen eine solche Einschliessung in Grenzen zu ermitteln, welche zugleich über das Verhalten von $\Theta(t)$ für $t = 0$ Aufschluss giebt.

Halten wir zunächst einen bestimmten Werth von y fest, so ist, so lange $x > \gamma y$,

$$f(x) = f(x, y) = e^{-ta(x-\alpha y)(x-\beta y)}$$

für positive a und t eine mit wachsendem x abnehmende Function, und daher ist

$$f(x+1) < \int_{x}^{x+1} f(x, y)\, dx < f(x).$$

Bedeutet also x_0 den kleinsten ganzzahligen Werth $> \gamma y$, so folgt:

$$f(x_0+1) + f(x_0+2) + \cdots < \int_{x_0}^{\infty} f(x, y)\, dx < f(x_0) + f(x_0+1) + \cdots$$

also, da auch

$$\int_{\gamma y}^{x_0} f(x, y)\, dx < f(\gamma y, y); \quad f(x_0) < f(\gamma y, y)$$

$$\int_{\gamma y}^{\infty} f(x,y)\,dx - f(\gamma y, y) < f(x_0) + f(x_0+1) + \cdots < \int_{\gamma y}^{\infty} f(x,y)\,dx + f(\gamma y, y). \tag{9}$$

Nun ist:

$$\varphi(y) = \int_{\gamma y}^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-at(x+(\gamma-\alpha)y)(x+(\gamma-\beta)y)}\, dx$$

eine mit wachsendem y abnehmende Function und daher wie oben

$$(10)\quad \int_0^\infty \varphi(y)dy < \varphi(0)+\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots < \int_0^\infty \varphi(y)\,dy+\varphi(0).$$

Summirt man nun die Ungleichungen (9), für alle ganzzahligen Werthe von y, die $\gtrless 0$ sind, so ergeben sich aus (10) für $\Theta(t)$ die beiden Grenzen

$$(11)\quad \begin{cases} \Theta(t) < \displaystyle\int_0^\infty\int_{\gamma y}^\infty e^{-at(x-\alpha y)(x-\beta y)}\,dx\,dy + \int_0^\infty e^{-tax^2}\,dx \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{0,\infty} e^{-ty^2a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \\ \Theta(t) > \displaystyle\int_0^\infty\int_{\gamma y}^\infty e^{-at(x-\alpha y)(x-\beta y)}\,dx\,dy - \sum_{0,\infty}^{y} e^{-ty^2a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\int_0^\infty\int_{\gamma y}^\infty e^{-at(x-\alpha y)(x-\beta y)}\,dx\,dy = \frac{1}{2at(\beta-\alpha)}\log\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta} = \frac{g}{t}$$

worin

$$(12)\qquad g = \frac{1}{2a(\beta-\alpha)}\log\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta},$$

ferner:

$$\int_0^\infty e^{-atx^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{at}}$$

und wenn

$$\sum_{-\infty,\infty}^{x} e^{-x^2a} = \vartheta(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,\vartheta\left(\frac{\pi^2}{a}\right) \quad \text{(Jacobi Fund. Ste. 184)}$$

gesetzt wird.

$$\sum_{0,\infty}^{y} e^{-tay^2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = \frac{1}{2}\vartheta\big(ta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\big)+\frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}\sqrt{a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}\,\vartheta\left(\frac{\pi^2}{ta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)+\frac{1}{2}.$$

Setzt man daher

$$(13)\qquad \Theta(t) = \frac{g}{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\Phi(t)$$

so ergeben sich für $\Phi(t)$ die Grenzen

$$(14)\quad \begin{cases} \Phi(t) < \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}\,\vartheta\left(\dfrac{\pi^2}{ta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{t} \\ \Phi(t) > \dfrac{-\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}}\,\vartheta\left(\dfrac{\pi^2}{ta(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right)-\dfrac{1}{2}\sqrt{t}. \end{cases}$$

Ist t kleiner als ein bestimmter endlicher Werth, etwa < 1, so ergeben sich aus (14) endliche Grenzen, in denen $\Phi(t)$ eingeschlossen bleibt.

Ist $t > 1$, so setzen wir

$$\Theta(t) = e^{-\lambda t}\Psi(t) \tag{15}$$

worin, wie oben bemerkt, λ positiv so angenommen werden kann, dass $\Psi(t)$ mit wachsendem t abnimmt und sich der Grenze Null nähert, also beständig zwischen 0 und $e^{\lambda}\Theta(1)$ eingeschlossen bleibt.

Hiernach können wir setzen

$$J_\varrho = \int_0^\infty \Theta(t)\, t^\varrho\, dt = \int_0^1 \left(\frac{g}{t} + \frac{\Phi(t)}{\sqrt{t}}\right) t^\varrho\, dt + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t)\, t^\varrho\, dt$$

$$J_\varrho = \frac{g}{\varrho} + \int_0^1 \Phi(t)\, t^{\varrho - \frac{1}{2}}\, dt + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t)\, t^\varrho\, dt \tag{16}$$

und ebenso

$$J'_\varrho = \int_0^\infty \Theta(t)\, t^\varrho \log t\, dt = -\frac{g}{\varrho^2} + \int_0^1 \Phi(t)\, t^{\varrho - \frac{1}{2}} \log t\, dt + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t)\, t^\varrho \log t\, dt. \tag{17}$$

Die beiden letzten Integrale auf der rechten Seite der Formeln (16), (17) sind für jedes positive und negative ϱ convergent, und genau wie oben beweist man, dass sie stetige Functionen von ϱ sind. Die beiden zwischen den Grenzen 0 und 1 genommenen Integrale in denselben Formeln sind convergent, so lange $\varrho > -\frac{1}{2}$ ist, und die Stetigkeit derselben in dem gleichen Umfang ergiebt sich aus der Ungleichung

$$1 - t^\varrho \leqq -\varepsilon \log t \quad (t \leqq 1).$$

Demnach erhält man durch den Grenzübergang die beiden endlichen Werthe

$$\operatorname*{Lim}_{\varrho=0}\left(J_\varrho - \frac{g}{\varrho}\right) = \int_0^1 \Phi(t)\frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t)\, dt \tag{18}$$

$$\operatorname*{Lim}_{\varrho=0}\left(J'_\varrho + \frac{g}{\varrho^2}\right) = \int_0^1 \Phi(t)\log t\frac{dt}{\sqrt{t}} + \int_1^\infty e^{-\lambda t}\Psi(t)\log t\, dt, \tag{19}$$

wodurch der gesuchte Beweis in allen Punkten geführt ist.

§ 6.

Formen zweiter Art und quadratische Determinanten.

Um die Frage nach der Darstellbarkeit von Primzahlen durch quadratische Formen zu vervollständigen, bleiben noch zwei Fälle übrig. Zunächst ist zu zeigen, dass auch die Form

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

wenn a, b, c ohne gemeinsamen Theiler sind, bei ungeradem b unendlich viele Primzahlen darstellen kann, oder, was dasselbe ist, dass die primitive Form zweiter Art $(2a, b, 2c)$ unendlich viele doppelte Primzahlen darzustellen fähig ist. Dies aber ergiebt sich unmittelbar aus den Sätzen von Gauss über die Composition der Ordnungen; denn jede primitive Classe zweiter Art entsteht wenigstens einmal durch Composition einer Classe der ersten Art mit der *einfachsten* Classe der zweiten Art; welche durch die Form repräsentirt ist

$$\left(2, 1, \frac{1-D}{2}\right).$$

Durch diese Form kann aber offenbar die Zahl 2 dargestellt werden, und wenn daher die Formen der ersten Art Primzahlen darzustellen fähig sind, so können die Formen zweiter Art doppelte Primzahlen darstellen.

Endlich bleibt noch der Fall übrig, wo die Determinante D ein Quadrat ist, der sich auf die Frage nach der Darstellung von Primzahlen durch die Glieder einer arithmetischen Progression zurückführen lässt. Wir betrachten hier Formen erster und zweiter Art gemeinschaftlich, und nehmen also an, in

(1) $$\psi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

seien a, b, c ohne gemeinschaftlichen Theiler und $\Delta = b^2 - 4ac$ das Quadrat einer ganzen Zahl. Es ist dann

(2) $$\psi = a\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\,y\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,y\right),$$

und die beiden Zahlen $b \pm \sqrt{\Delta}$ sind gerade, da ihre Summe und ihr Product gerade ist. Ferner ist

(3) $$\frac{(b+\sqrt{\Delta})\,(b-\sqrt{\Delta})}{4a} = c,$$

also eine ganze Zahl. Setzt man daher

(4) $$\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a'} = c', \qquad \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a''} = c''$$

(5) $$b = a'c' + a''c''$$

so dass a', a'', c', c'' ganze Zahlen sind, und $a'a'' = a$, $c'c'' = c$, so folgt

(6) $$\psi = (a''x + c'y)\,(a'x + c''y).$$

Nun sind wegen (5) a', c'', ebenso a'', c' ohne gemeinschaftlichen Theiler, und man kann daher x, y so bestimmen, dass

$$a''x + c'y = \pm 1, \quad x = x_0 + c'\xi, \quad y = y_0 - a''\xi$$

alsdann wird der zweite Factor in (6)

$$a'x_0 + c''y_0 + \xi(c'a' - c''a'') = \delta\xi + \omega$$

und es ist nur noch zu zeigen, dass die beiden Zahlen δ und ω relativ prim sind; denn dann sind in der Linearform $\delta\xi + \omega$ unendlich viele Primzahlen enthalten. Es ist aber

$$\begin{aligned} a'\,x_0 + c''y_0 &= \omega \\ a''x_0 + c'\,y_0 &= \pm 1 \\ c'\,a' \;- c''a'' &= \delta \end{aligned}$$

also:

$$\delta x_0 = \omega c' \pm c'', \qquad \delta y_0 = -\omega a'' \mp a'$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung folgt, da ein gemeinschaftlicher Theiler von δ und ω auch Theiler von a', c'' und mithin von a, b, c sein würde. Die einzige Ausnahme bildet $\delta = 0$, in welchem Falle $a' = a''$, $c' = c''$, also ψ ein Quadrat und $\Delta = 0$ wird.

Königsberg in Pr., Mai 1882.

Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades.

Von

A. Brill in München.

In einer Abhandlung über Combinanten im 5. Bande der Mathematischen Annalen hat Herr Gordan die Theorie dieser Bildungen auf das Studium einer Form mit mehreren Reihen von Veränderlichen zurückgeführt, durch deren In- und Covarianten alle Combinanten eines gegebenen Systems von Formen auf *rationalem* Wege dargestellt werden können. Besteht das System aus p binären Formen $n$ter Ordnung $f_1 f_2 \cdots f_p$, so ist jene Form die p-reihige Determinante, die man aus den f, in p verschiedenen Variabelnreihen geschrieben, bilden kann.

Setzt man die p Variabelnreihen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $\cdots$, $x_p y_p$ einander gleich, $= x, y$, so erhält man aus dieser Determinante durch einen Grenzübergang die der $p$ten Differentialquotienten der Formen f nach x, y. Diese binäre Form $p(n-p+1)$ter Ordnung leistet nun in gewissem Sinne dasselbe, wie die Gordan'sche Function. Eine Abzählung zeigt, dass die Anzahl ihrer Coefficienten mit der der Constanten übereinstimmt, die in die Combinanten von f eingehen. Sind also ihre Coefficienten gegenseitig unabhängig, wenn es die der f sind, so kann man diese Form als erzeugende Function der Combinanten des Systems ansehen, *sofern auf rationale Darstellung Verzicht geleistet wird.*

Aber auch abgesehen von ihrem Zusammenhang mit der Theorie der Combinanten besitzt die Form $p(n-p+1)$ter Ordnung merkwürdige Eigenschaften. Ihre Discriminante zerfällt in zwei in den Coefficienten der f rationale Factoren. Sie entsteht aus der allgemeinen binären Form ihrer Ordnung, wenn man eine irrationale Function der Coefficienten adjungirt. Diese Function ist für Formen sechster Ordnung die Wurzel einer Gleichung fünften Grades, von der zugleich die Coefficienten gewisser linearen Transformationsformeln abhängen, vermöge deren die binäre Form sechster Ordnung in zwei canonische Formen von bemerkenswerther Einfachheit übergeführt werden kann.

Ich beginne mit dem Nachweis, dass die in Rede stehende Form ebensoviele unabhängige Constanten als Coefficienten besitzt.

1.

Man kann mit der von Gordan angegebenen Form von p Veränderlichen eine Umgestaltung vornehmen, wodurch sie von den $\frac{1}{2}p(p-1)$ Differenzen der Veränderlichen, die sie als überflüssigen Factor enthält, befreit wird. Von dem homogenen Ausdruck abgehend setze ich:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{10} + a_{11}x + \cdots + a_{1n}x^n, \\ f_2 &= a_{20} + a_{21}x + \cdots + a_{2n}x^n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_p &= a_{p0} + a_{p1}x + \cdots + a_{pn}x^n, \end{aligned}$$

und betrachte die $(n+1)$-reihige Determinante:

$$W(x_1 x_2 \cdots x_p) = \begin{vmatrix} a_{10} & \cdots & a_{p0} & X_p & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & \cdots & a_{p1} & X_{p-1} & X_p & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & \cdots & a_{pp} & X_0 & X_1 & \cdots & \vdots \\ a_{1,p+1} & \cdots & a_{p,p+1} & 0 & X_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{pn} & 0 & 0 & & X_0 \end{vmatrix},$$

wo

$$X_p = x_1 x_2 \cdots x_p;\ X_{p-1} = -\Sigma x_1 x_2 \cdots x_{p-1};\ \cdots X_1 = (-1)^{p-1}\Sigma x_i;$$
$$X_0 = (-1)^p$$

ist, und $\Sigma x_1 x_2 \cdots x_i$ die Summe der Producte der p Grössen $x_1 \cdots x_p$ zu je i bedeutet. Multiplicirt man diese Determinante mit der folgenden:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & \cdots & x_p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^p & \cdots & x_p^p & 0 & \cdots & 0 \\ x_1^{p+1} & \cdots & x_p^{p+1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_p^n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

die in eine $n-p+1$-reihige von dem Werth 1 und eine p-reihige, gleich dem Differenzenproduct der x_i, zerfällt, so erhält man wiederum eine zerfallende Determinante, von der ein Factor gleich Eins, der andere die Gordan'sche Form ist. Dieselbe lässt sich also durch

$W(x_1 x_2 \cdots x_p)$ ersetzen. Die zu untersuchende Form $W(x)$, welche aus dieser hervorgeht, indem man $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = x$ macht, hat genau die Gestalt der oben mit $W(x_1 x_2 \cdots x_p)$ bezeichneten Determinante; nur ist darin:

$$X_p = x^p,\ X_{p-1} = -\binom{p}{1} x^{p-1},\ X_{p-2} = \binom{p}{2} x^{p-2}, \cdots X_0 = (-1)^p$$

zu setzen, wo $\binom{p}{i}$ in bekannter Bezeichnungsweise die Anzahl der Combinationen von p Elementen zu je i darstellt.

Denkt man sich die Determinante $W(x)$ ausgerechnet und nach Potenzen von x angeordnet, so setzen sich die Coefficienten derselben linear und homogen aus den p-reihigen Determinanten der aus den p ersten Verticalreihen gebildeten Matrix zusammen. Solcher Determinanten giebt es $\binom{n+1}{p}$, zwischen denen jedoch Relationen bestehen müssen, weil man durch Einführung linearer Combinationen der f an Stelle der f die Anzahl der Coefficienten a_{ik} unter diese Zahl herabdrücken kann.

So hat man beispielsweise für $p = 2$, $n = 3$;

$$W(x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & x^2 & 0 \\ b_1 & b_2 & -2x & x^2 \\ c_1 & c_2 & 1 & -2x \\ d_1 & d_2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 (cd) + 2x^3 (bd) + x^2 [(bc) + 3(ad)] + 2x(ac) + (ab) = 0,$$

wo die Relation besteht:

$$(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd) = 0.$$

Vermöge der Indicesbezeichnung kommt jeder Determinante der Matrix aus den a_{ik} ein gewisses Gewicht zu, das durch die Summe der hinteren Indices der benutzten Horizontalreihen dargestellt wird. Jede Determinante ist mit derjenigen Potenz von x multiplicirt, deren Exponent um $\frac{1}{2} p(p-1)$ kleiner ist, als ihr Gewicht, und das Gewicht aller mit derselben Potenz multiplicirten Determinanten dasselbe, so dass man also den literalen Theil des Ausdrucks $W(x)$ angeben kann, ohne auf die Determinante zu recurriren. Auch die Zahlencoefficienten bestimmen sich in bekannter Weise direct aus der partiellen Differentialgleichung, der die simultanen Covarianten der f genügen:

$$n \Sigma a_{i\,n} \frac{\partial W}{\partial a_{i,n-1}} + (n-1) \Sigma a_{i,n-1} \frac{\partial W}{\partial a_{i,n-2}} + \cdots = \frac{\partial W}{\partial x},$$

wo sich die Summe Σ, da es sich um Combinanten handelt, auf

$i = 1, 2, \cdots, p$ bezieht, und die Operation Σ also nur den Uebergang von einer Determinante der Matrix zu einer anderen andeutet.

Es ist nun bemerkenswerth, dass die Form $W(x)$ eine „allgemeine" Form ihrer Ordnung ist, indem die gegenseitige Unabhängigkeit ihrer Coefficienten nachgewiesen werden kann, wenn die der a_{ik} vorausgesetzt wird. Dieser Nachweis ist um so weniger entbehrlich, als bekanntlich gerade bei canonischen Formen die blosse Constantenzählung leicht zu Irrungen führt.

Um hierbei von den Relationen zwischen den einzelnen Determinanten absehen zu können, ist es nützlich, dieselben dadurch identisch zu erfüllen, dass man die Elemente einer beliebigen p-reihigen Determinante der Matrix durch Vertauschung der f mit linearen Combinationen der f, wobei sich bekanntlich die Verhältnisse der Coefficienten einer Combinante nicht ändern, in Zahlen überführt. Man kann dies, sofern die a_{ik} von einander unabhängige Grössen sind, in der Weise ausführen, dass die Elemente der Determinante alle, bis auf die in einer Diagonale befindlichen, in welcher lauter 1 zu stehen kommen, Null werden. Aus den übrig bleibenden $p(n - p + 1)$ Elementen a_{ik} setzen sich dann die Coefficienten der Potenzen von x so zusammen, dass dieselben von einander unabhängig werden. Im Falle $p = n$ ist die Richtigkeit dieser Behauptung einleuchtend. Denn in diesem Falle bleiben nach Ueberführung von p^2 Elementen in Zahlen noch p von einander unabhängige Grössen übrig, die gerade die Coefficienten von p Potenzen geben, während einer den Zahlenwerth 1 hat. Durch einen Schluss von n auf $n + 1$ gelangt man von diesem auf den allgemeinsten Fall.

Es sei für irgend ein n, p bewiesen, dass die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von einander unabhängige Grössen sind. Ich bezeichne die zugehörige Determinante $W(x)$ mit $W_{p,n}$ und denke mir in derselben die Determinante: $\Sigma \pm a_{1,n-p+1} \cdots a_{pn}$ in der angegebenen Weise in 1 übergeführt. Der Uebergang von $W_{p,n}$ zu $W_{p,n+1}$ werde dann so ausgeführt, dass man in W_{pn} die Horizontalreihe:

$$a_{1,n+1}\ a_{2,n+1} \cdots a_{p,n+1}\ 0\ 0 \cdots 0\ X_0$$

unten und die Verticalreihe:

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ X_p \\ X_{p-1} \\ \vdots \end{matrix}$$

rechts anfügt. Dann treten in $W_{p,n+1}$ zunächst alle Glieder auf, die bereits in $W_{p,n}$ vorkamen, multiplicirt mit $X_0 = \pm 1$. Die hinzugekom-

menen sind lineare homogene Functionen der $a_{i,n+1}$, deren Grad in den $a_{i,k}$ der Determinante $W_{p,n}$ verschieden ist. Diejenigen Terme, welche überhaupt diese älteren a_{ik} nicht mehr enthalten, lassen sich leicht angeben. Es sind diejenigen, deren Coefficienten aus je $p-1$ Horizontalreihen der Determinante, deren Elemente aus 0 und 1 bestehen, und der Reihe der $a_{i,n+1}$ gebildet sind, nämlich:

$$X_p^{n-p+1}(X_p\, a_{1,n+1} - X_{p-1}\, a_{2,n+1} + \cdots \pm X_1\, a_{p,n+1}).$$

Diese Glieder liefern Beiträge zu den Coefficienten der p höchsten Potenzen von $W_{p,n+1}$, die von einander unabhängig sind, nicht verschwinden und auch durch die mit den alten a_{ik} multiplicirten nicht in gegenseitige Abhängigkeit gebracht werden können. Da nun ebensowenig diejenigen Coefficienten der niederen Potenzen in $W_{p,n+1}$, welche schon in $W_{p,n}$ auftraten und nach Voraussetzung von einander unabhängig waren, durch Hinzutreten von Gliedern, welche die $a_{i,n+1}$ enthalten, in gegenseitige oder in Abhängigkeit von denen der höheren Potenzen gebracht werden können, so ist die Zahl der von einander unabhängigen Coefficienten von $W_{p,n+1}$ gleich derjenigen für $W_{p,n} + p$. Für $n = p$ war dieselbe gleich p, also ist sie für $W_{p,n}$, d. h. für $W(x)$, wenn man nun die Transformationsdeterminante als Constante noch hinzuzählt:

$$p(n - p + 1) + 1.$$

Diese Form besitzt also, von einander unabhängige a_{ik} vorausgesetzt, ebensoviele unabhängige Constanten als ihr Grad beträgt $+1$, und *die Form $W(x)$ kann also als die allgemeine binäre Form ihrer Ordnung angeschen werden.*

Da sich nun für jede Zerlegung einer zusammengesetzten Zahl N in zwei ganzzahlige Factoren eine Zahl $n\,(n \geq p)$ und zwei Zahlen, die sich zu $n+1$ ergänzen, so finden lassen, dass

$$N = p(n - p + 1)$$

wird, so muss es möglich sein, *jede binäre Form von Nichtprimzahlgrad* auf doppelt so viele Arten, als diese Zahl Zerlegungen zulässt, *auf die Form $W(x)$ zu bringen.* Diese Operation verlangt im Allgemeinen die Auflösung höherer Gleichungen, aus denen die p-gliedrigen Determinanten, die in den Coefficienten von $W(x)$ auftreten, bestimmt werden (ich bezeichne diese Determinanten in der Folge als *Grössen* α, β). In den Fällen $N = 4$, $N = 6$ sind es Gleichungen vom 2. bez. 5. Grad, von denen unten die Rede sein wird.

Es mag indess gleich hier bemerkt werden, dass *die beiden irgend einer Zerlegung von N entsprechenden Formen $W(x)$*, für welche n einen gewissen Werth, p zwei die Werthe p und $n + 1 - p$ annimmt, im Wesentlichen *übereinstimmen.*

Wenn man nämlich die Matrix der Coefficienten a_{ik} durch irgend beliebige Elemente b_{ik} zu einer nicht verschwindenden Determinante R von $n+1$ Reihen ergänzt und die Minoren jedes Elementes nimmt, so entspricht jeder p-reihigen Partialdeterminante der a_{ik} eine $(n-p+1)$-reihige des adjungirten Systems, welche nach einem bekannten Satze (Baltzer, Determinanten, 3. Aufl. § 6, 2) bis auf eine Potenz der Determinante R mit der ersteren übereinstimmt. Der Matrix aus den p-reihigen entspricht eine Matrix aus $(n-p+1)$-reihigen Determinanten, die denen der anderen proportional sind, zwischen welchen also dieselben Relationen bestehen, die ebenso nach dem Gewicht geordnet werden können u. s. w. Verwendet man die Elemente dieser Matrix für die Bildung von $n-p+1$ Formen n-ter Ordnung $\varphi_1 \varphi_2 \cdots \cdots \varphi_{n-p+1}$ als Coefficienten, jedoch *unter Beifügung je des betreffenden Binominalcoefficienten*, so sind die Combinanten des Systems der Functionen f zugleich solche der φ. In der That: die oben aufgestellte partielle Differentialgleichung für W kann, wenn man Symmetrie und passend bestimmtes Gewicht der Form voraussetzt, allgemein zur Definition einer simultanen Covariante der f dienen. Sei W eine Combinante, die dieser Gleichung genügt. Führt man statt der a_{ik} die Elemente α_{ik} der Matrix von $n-p+1$ Reihen ein, so wird:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_{ik} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{i,k-1}} = \sum_{i=1}^{i=n-p+1} \alpha_{i,k-1} \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}.$$

Die Form, welche hiermit die partielle Differentialgleichung annimmt, ist die bekannte für die simultanen Covarianten eines Systems von Formen φ, deren Coefficienten die mit Binomialcoefficienten behafteten Grössen α_{ik} sind. — Kehrt man den Process, der von den f zu den φ führt, um, so erhält man wieder die f, oder lineare Combinationen der f, die für die Combinantenbildung diesen selbst äquivalent sind. Man hat also den Satz:

Die Combinanten eines Systems von p binären Formen n-ter Ordnung $(n \geq p)$ sind der Zahl und Form nach identisch mit denen eines Systems von $n-p+1$ Formen derselben Ordnung.

Anmerkung. *Man kann den vorstehenden Satz ohne Weiteres auf ein System von Formen mit beliebig vielen Veränderlichen ausdehnen.* Die Zahl n bedeutet dann nicht mehr die Ordnung, sondern die um Eins vermehrte Anzahl der Terme einer solchen Form. Auch hier setzen sich die Coefficienten der Combinanten des Systems aus Determinanten derjenigen Matrix zusammen, die man aus den Coefficienten der p gegebenen Formen bilden kann. Der Beweis des Satzes wird genau wie oben geführt. An Stelle der einen partiellen Differentialgleichung tritt dann das System der von Aronhold im 62. Bande des Crelle'schen Journals aufgestellten Differentialgleichungen für die

simultanen In- und Covarianten zugehörigen Formen u. s. w. Die Formen φ des Systems, das aus dem gegebenen genau auf dem oben eingeschlagenen Wege abgeleitet wird — nur das statt Binomial — Polynomialcoefficienten zur Verwendung kommen — sind, nach einer Bezeichnungsweise des Herrn Rosanes (Crelle's Journal Bd. 76, S. 312) zu den Formen des Systems der f „conjugirt", indem die Summe der Producte entsprechender Coefficienten verschwindet.

2.

Die Form $p(n-p+1)$-ter Ordnung $W(x)$ hat die Eigenschaft, dass ihre Discriminante in zwei in den Grössen α, β (den p-gliedrigen Determinanten aus den Coefficienten der f) *rationale Factoren zerfällt.*

Der erste dieser Factoren, ich werde ihn mit U bezeichnen, ist diejenige rationale ganze Function der α, β, deren Verschwinden aussagt, dass die sämmtlichen n-reihigen Determinanten der folgenden Matrix aus n Vertical- und $n+1$ Horizontalreihen für denselben Werth von x verschwinden:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} a_{10} & \cdots a_{p0} & X_{p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{p1} & X_p & X_{p+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,p+1} & a_{p,p+1} & X_0 & X_1 & \cdots & \\ a_{1,p+2} & a_{p,p+2} & 0 & X_0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{pn} & 0 & 0 & \cdots & X_0 \end{array} \right\|$$

wo zur Abkürzung:

$$x^{p+1} = X_{p+1}; \quad -\binom{p+1}{1} x^p = X_p; \quad \cdots (-1)^p \binom{p+1}{1} x = X_1;$$
$$(-1)^{p+1} = X_0$$

gesetzt wurde. Das System der $n+1$ Gleichungen, die dies aussagen, ist bekanntlich zweien Gleichungen äquivalent und zieht also die Erfüllung einer Bedingungsgleichung zwischen den Grössen $\alpha, \beta, \cdots$ mit sich, deren linke Seite, U, Factor der Discriminante von $W(x)$ ist. In der That, man kann die $(p+1)$te Verticalreihe der Determinante $W(x)$ durch Multiplication mit x und Addition der $(p+2)$ten Columne auf die Form der entsprechenden der obigen Matrix bringen; ebenso die $(p+2)$te durch Combination mit der $(p+3)$ten u. s. f. bis zur letzten, die allein unverändert bleibt. $W(x)$ hat so den Factor x^{n-p} erhalten. Die umgestaltete Determinante verschwindet nun offenbar

für jeden Werth von x, für den die Determinanten der Matrix verschwinden; dies gilt auch noch von $W(x)$ selbst.

Aber auch die nach den einzelnen Columnen differenzirte Determinante verschwindet.

Daher ist ein x, für welches dies eintritt, Doppelwurzel von $W(x) = 0$, und U, dessen Verschwinden die Existenz eines solchen Werthes aussagt, liefert einen Factor der Discriminante von W. — Ich unterlasse es, das Verfahren anzugeben, durch welches U von uneigentlichen Factoren befreit wird, und erwähne nur, dass ich den Grad U_{np} von U in den Coefficienten $\alpha, \beta, \cdots$ auf dem Wege der Induction, wie folgt, gefunden habe:

$$U_{np} = (p+1)(n-p).$$

Der andere Factor der Discriminante von $W(x)$ entspricht in ähnlicher Weise dem gemeinsamen Verschwindungswerth der Determinanten der folgenden Matrix von $(n+1)$ Horizontal- und $(n+2)$ Verticalreihen:

$$\left\| \begin{matrix} a_{01} \cdots a_{p0} & X_{p-1} & 0 & \cdots 0 \\ a_{11} \cdots a_{p1} & X_{p-2} & X_{p-1} & \cdots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{1n} \cdots a_{pn} & 0 & 0 & \cdots X_0 \end{matrix} \right\|,$$

wo

$$X_{p-1} = x^{p-1}, \quad X_{p-2} = -\binom{p-1}{1} x^{p-2}, \quad \cdots, \quad X_0 = \pm 1$$

ist.

Der Beweis beruht wiederum auf einer identischen Umformung, die man mit $W(x)$ oder vielmehr mit der eingangs durch $W(x_1 \cdots x_p)$ bezeichneten Determinante vornehmen kann, aus der $W(x)$ durch Gleichsetzen der x hervorgeht. Man kann dieselbe in die folgende $(n+2)$ gliedrige verwandeln:

$$W(x_1 x_2 \cdots x_p) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots 0 & 1 & x_p & \cdots x_p^{n-p+1} \\ a_{10} & \cdots a_{p0} & X_{p-1} & 0 & \cdots 0 \\ a_{11} & \cdots a_{p1} & X_{p-2} & X_{p-1} & \cdots 0 \\ \vdots & \quad\vdots & \vdots & \vdots & \quad\vdots \\ a_{1n} & \cdots a_{pn} & 0 & 0 & \cdots X_0 \end{vmatrix},$$

wo nun die X_i die symmetrischen Functionen der $p-1$ Variabeln $x_1 x_2 \cdots x_{p-1}$ sind, nämlich:

$$X_{p-1} = x_1 x_2 \cdots x_{p-1}; \quad X_{p-2} = -\sum x_1 x_2 \cdots x_{p-2}; \quad \cdots X_0 = (-1)^{p-1}.$$

Denn multiplicirt man diese Determinante mit der folgenden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & x_p & -1 & 0 & \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 & x_p & -1 & \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots x_p \end{vmatrix},$$

die in zwei Determinanten mit p und $n - p + 2$ Reihen zerfällt und den Werth x_p^{n-p+2} besitzt, so erhält man (indem man nach Horizontalreihen combinirt) eine Determinante, die genau in jene $(n - p + 1)$-gliedrige und x_p^{n-p+2} zerfällt.

Die Determinante $W(x_1 x_2 \cdots x_p)$ ist eine symmetrische Function der Grössen $x_1 \cdots x_p$ und Combinante der f. Die letztere Eigenschaft besitzen offenbar auch die Coefficienten der Potenzen jeder der Variabeln, z. B. von x_p, also die $n - p + 2$ Determinanten der Matrix aus den letzten $n + 1$ Zeilen von $W(x_1 \cdots x_p)$, welche mit Potenzen von x_p multiplicirt sind. Von dieser Bemerkung machen wir weiter unten Gebrauch.

Nun verschwindet sowohl der Ausdruck $W(x_1 \cdots x_p)$, wie seine ersten, zweiten etc. Differentialquotienten nach x_p dann, wenn sämmtliche Determinanten der erwähnten Matrix verschwinden. Da ferner für $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = x$:

$$p \cdot \frac{\partial W(x_1 \cdots x_p)}{\partial x_p} = \frac{\partial W(x_1 \cdots x_p)}{\partial x_1} + \frac{\partial W(x_1 \cdots x_p)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial W(x_1 \cdots x_p)}{\partial x_p} = \frac{\partial W(x)}{\partial x},$$

so verschwindet, wenn man nun die x einander gleichsetzt, ausser $W(x)$ auch der erste Differentialquotient für jeden Werth x, für den die Determinanten der Matrix verschwinden, w. z. b. w.

Die Bedingung für die Existenz eines solchen x ist wieder das Verschwinden einer ganzen Function der $\alpha, \beta, \cdots$, welche somit Factor der Discriminante von $W(x)$ sein muss.

Auch *für diesen Factor*, den ich mit C bezeichnen will, habe ich den *Grad* C_{np} *in den* $\alpha, \beta, \cdots$ durch Induction bestimmt und:

$$C_{np} = (p - 1)(n - p + 2)$$

gefunden. Die Grade von C und U zusammen geben den Grad der Discriminante von $W(x)$ in den Determinanten $\alpha, \beta, \cdots$:

$$= 2p(n - p + 1) - 2.$$

3.

Die Irrationalitäten $\alpha, \beta, \cdots$, nach deren Adjunction eine binäre Form die Eigenschaften der Form $W(x)$ erhält, hängen von Gleichungen ab, die ich im Folgenden für *Formen vierten und sechsten Grades* aufstellen und für die Letzteren genauer betrachten will.

Den Formen vierter Ordnung entspricht die Annahme $p=2$, $n=3$. Die Gestalt, welche $W(x)$ annimmt, ist in § 1 angegeben. Vergleicht man dieselbe mit der allgemeinen Form vierten Grades:

$$F(x) = A_0 x^4 + A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x + A_4,$$

so ergiebt sich aus der früher angegebenen identischen Relation zwischen den zweigliedrigen Determinanten eine quadratische Gleichung für die in dem Coefficienten von x^2 auftretende Determinante (ad):

$$3 \cdot (ad)^2 - A_2 \cdot (ad) - A_0 A_4 + \tfrac{1}{4} A_1 A_3 = 0,$$

deren Discriminante nichts Anderes, als die Invariante zweiten Grades i von $F(x)$ ist. *Die Zerfällung der Discriminante einer Form vierter Ordnung wird also möglich durch Adjunction von* $\sqrt{i}$. — Dies ist aber aus der bekannten Form für die Discriminante:

$$i^3 - 6j^2 = -6\left(j + i\sqrt{\tfrac{i}{6}}\right)\left(j - i\sqrt{\tfrac{i}{6}}\right)$$

wo j die Invariante 3. Grades ist, ohne Weiteres ersichtlich. Unsere Betrachtungen liefern also in diesem Falle nichts Neues.

Die Annahme $p = 2$, $n = 4$ führt auf eine *Form sechster Ordnung*. Auf dieselbe Form wird man aber nach Früherem durch die Annahme: $p = 3$, $n = 4$ geführt. Wir knüpfen an die Letztere an.

Setzt man:

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 + e_1 x^4 \\ f_2 &= a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 + c_2 x^4 \\ f_3 &= a_3 + b_3 x + c_3 x^2 + d_3 x^3 + e_3 x^4, \end{aligned}$$

so wird:

$$W(x) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -3x^2 & x^3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 3x & -3x^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -1 & 3x \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

oder ausgerechnet:

$$\begin{aligned} W(x) = x^6 \alpha_0 + x^5 \cdot 3\alpha_1 + x^4(3\alpha_2 + 6\beta_2) + x^3(\alpha_3 + 8\beta_3) \\ + x^2(3\alpha_4 + 6\beta_4) + x \cdot 3\alpha_5 + \alpha_6, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung:

$$\begin{array}{lll} \alpha_0 = (cde) & \alpha_3 = (bcd) & \beta_2 = (ade) \\ \alpha_1 = (bde) & \alpha_4 = (acd) & \beta_3 = (ace) \\ \alpha_2 = (bce) & \alpha_5 = (abd) & \beta_4 = (abe) \\ & \alpha_6 = (abc) & \end{array}$$

gesetzt ist, und $(cde) = \Sigma \pm c_1 d_2 e_3$ u. s. w. ist. Zwischen den α, β bestehen die Relationen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_1\alpha_4 - \alpha_0\alpha_5 - \beta_2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_5\alpha_2 - \alpha_6\alpha_1 - \beta_4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_0\alpha_6 - \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\beta_3 = 0 \\ \beta_3\alpha_5 - \alpha_4\beta_4 - \beta_2\alpha_6 = 0 \\ \beta_3\alpha_1 - \alpha_2\beta_2 - \beta_4\alpha_0 = 0, \end{cases}$$

von denen drei die Folge der übrigen sind. Sie ergeben sich aus der Bemerkung, dass man z. B. die erste in die Form bringen kann:

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & (abd) \\ c_1 & c_2 & c_3 & (acd) \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & (aed) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Factoren U, C der Discriminante $W(x)$ bestimmen sich (§ 2) aus den Matrices:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -4x^3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & bx^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & -4x \\ e_1 & e_2 & e_3 & 1 \end{matrix} \right\| \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^2 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -2x & x^2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 & -2x & x^2 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & 1 & -2x \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Man erhält durch Ausrechnung von zwei Determinanten der ersten Matrix:

$$\begin{aligned} x^4\alpha_3 + 4x^3\alpha_4 + 6x^2\alpha_5 + 4\alpha_6 x &= 0 \\ x^4\alpha_2 + 4x^3\beta_3 + 6x^2\beta_4 - \alpha_6 &= 0. \end{aligned}$$

Dividirt man die Resultante dieser Gleichungen durch $\alpha_6{}^4$, so erhält man den *Factor vierten Grades:*

$$U = \begin{vmatrix} 4\alpha_0 & 6\alpha_1 & 4\alpha_2 & \alpha_3 \\ 6\alpha_1 & 4\alpha_2 + 24\beta_2 & \alpha_3 + 16\beta_3 & 4\alpha_4 \\ 4\alpha_2 & 16\beta_3 + \alpha_3 & 4\alpha_4 + 24\beta_4 & 6\alpha_5 \\ \alpha_3 & 4\alpha_4 & 6\alpha_5 & 4\alpha_6 \end{vmatrix}.$$

Der zweiten Matrix entnehmen wir die Determinanten:

$$x^4\alpha_0 + 2x^3\alpha_1 + x^2(3\beta_2 + \alpha_2) + 2x\beta_3 + \beta_4$$
$$x^4\alpha_1 + 2x^3(\alpha_2 + \beta_2) + x^2(4\beta_3 + \alpha_3) + 2x(\alpha_4 + \beta_4) + \alpha_5$$
$$x^4\beta_2 + 2x^3\beta_3 + x^2(3\beta_4 + \alpha_4) + 2x\alpha_5 + \alpha_6.$$

Die Resultante aus irgend zweien ist von demjenigen Factor zu befreien, dessen Verschwinden nicht auch das der dritten Determinante bewirkt; die Resultante aus dem 2. und 3., aus dem 3. und 1., aus dem 1. und 2. Ausdruck bez. von den Factoren:

$$4\beta_2\alpha_0 - \alpha_1^2;\quad 4\beta_2\beta_4 - \beta_3^2;\quad 4\beta_4\alpha_6 - \alpha_5^2.$$

Der Ausdruck C wird dann eine viergliedrige Determinante, *in den* α, β *vom* 6. *Grad*, die ich hier nur für zwei Fälle anführen will:

1. Für $\alpha_1 = \alpha_5 = \beta_2 = \beta_4 = 0$:

$$\alpha_2\alpha_4 C = \alpha_0\alpha_6 \cdot \begin{vmatrix} 2\beta_3 & -\alpha_3 & 2\alpha_6 & \alpha_6 \\ \alpha_0\alpha_4 & 2\alpha_2\alpha_2 & 4\beta_3\alpha_4 & 0 \\ 0 & 4\beta_3\alpha_2 & 2\alpha_4\alpha_4 & \alpha_2\alpha_6 \\ \alpha_0 & 2\alpha_0 & -\alpha_3 & 2\beta_3 \end{vmatrix}.$$

2. Für $\beta_2 = \beta_4 = \beta_3 = 0$:

$$C = \begin{vmatrix} 2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) & \alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 & 0 & \alpha_0 \\ \alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 & 2(\alpha_0\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2) & \alpha_1\alpha_4 & 2\alpha_1 \\ 0 & \alpha_1\alpha_4 & 2\alpha_1\alpha_5 - 2\alpha_2\alpha_4 & \alpha_2 \\ \alpha_0 & 2\alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Vergleicht man mit den Coefficienten von $W(x)$ die der allgemeinen Form sechster Ordnung:

$$F(x) = A_0x^6 + A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3 + A_4x^2 + A_5x + A_6$$

so erhält man:

$$A_0 = \alpha_0 \qquad A_1 = 3\alpha_1 \qquad A_2 = 3\alpha_2 + 6\beta_2$$
$$A_6 = \alpha_6 \qquad A_5 = 3\alpha_5 \qquad A_4 = 3\alpha_4 + 6\beta_4$$
$$A_3 = 8\beta_3 + \alpha_3,$$

woraus sich mit Rücksicht auf die Relationen (1) zwischen den α, β die Beziehungen ergeben:

$$3\alpha_3\alpha_2 + 2A_1\alpha_4 = A_2\alpha_3 + 2A_0A_5$$
$$2A_5\alpha_2 + 3\alpha_3\alpha_4 = A_4\alpha_3 + 2A_6A_1$$
$$8\alpha_2\alpha_4 = A_3\alpha_3 - \alpha_3^2 + 8A_0A_6.$$

Durch Elimination von α_2, α_4 erhält man die folgende Bedingungsgleichung für α_3:

$$8(3\alpha_3^2A_2 + 6\alpha_3A_0A_5 - 2\alpha_3A_1A_4 - 4A_1^2A_6)$$
$$\cdot (3\alpha_3^2A_4 + 6\alpha_3A_6A_1 - 2\alpha_3A_5A_2 - 4A_5^2A_0)$$
$$= (9\alpha_3^2 - 4A_1A_5)^2 (A_3\alpha_3 - \alpha_3^2 + 8A_0A_6),$$

die, nach Beseitigung der unbrauchbaren*) Lösung $\alpha_3 = 0$, vom fünften Grade ist. Da sich im Allgemeinen die Grössen $\alpha_2\beta_2\alpha_4\beta_4$ aus α_3 eindeutig bestimmen lassen, so genügt es, eine Wurzel der vorstehenden Gleichung fünften Grades zu adjungiren, um die allgemeine Form sechster Ordnung auf die Form $W(x)$ zu bringen, deren Discriminante zerfällbar ist.

Von solchen Fällen, in denen die Gleichung fünften Grades reducibel wird, hebe ich zwei hervor, die mit den beiden Factoren der Discriminante im Zusammenhang stehen, und ebenso wie diese der Ausdruck eines merkwürdigen Dualismus der Form $W(x)$ sind, der sich auch durch die nachfolgenden Betrachtungen hinzieht.

Wenn ein besonderes Werthsystem der Coefficienten $A_0 \cdots A_6$ der allgemeinen Form $F(x)$ auf die Gleichungen: $\beta_2 = \beta_4 = 0$ für die zugehörige Form $W(x)$ führt, so muss, vermöge der Relationen (1) noch entweder β_3 oder zugleich α_1 und α_5 verschwinden. Wir betrachten beide Fälle.

1. Für $\beta_2 = \beta_4 = \beta_3 = 0$ ergiebt sich aus den Relationen (1):

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 = \alpha_4 : \alpha_5 : \alpha_6,$$

wie auch umgekehrt diese Beziehungen die ersteren mit sich führen. Bestehen also zwischen den Coefficienten einer gegebenen Form 6. Ordnung die Beziehungen:

$$3A_0 : A_1 : A_2 = A_4 : A_5 : 3A_6,$$

so muss die zugehörige Gleichung 5. Grades reducibel werden, denn eine Wurzel wird $\alpha_3 = A_3$. In der That zerfällt dieselbe in die Factoren:

$$(\alpha_3 - A_3)\,(9\alpha_3^2 - 4A_1A_5)^2 = 0,$$

deren erster sogleich auf:

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4; \quad \alpha_2 = \frac{1}{3}A_2; \quad \alpha_4 = \frac{1}{3}A_4$$

führt, während die dem zweiten Factor entsprechenden Werthe von $\beta_2\beta_4\alpha_2\alpha_4$ sich aus einer quadratischen Gleichung bestimmen.

2. Auf den Fall $\beta_2 = \beta_4 = \alpha_1 = \alpha_5 = 0$ wird man durch eine Gleichung geführt, für welche:

$$A_1 = A_5 = 0$$

ist. Die Gleichung 5. Grades wird alsdann:

$$\alpha_3^3(\alpha_3^2 - \alpha_3 A_3 + 8A_2A_4 - 8A_0A_6) = 0.$$

Den drei Wurzeln $\alpha_3 = 0$ entsprechend erhält man für α_2 eine Gleichung dritten Grades, aus deren Wurzeln sich $\beta_2\beta_4\beta_3$ eindeutig bestimmen. Dem quadratischen Factor entspricht $\beta_2 = \beta_4 = 0$, während

*) Aus $\alpha_3 = 0$ ergiebt sich vermöge der letzten von den Relationen (1) eine Gleichung zwischen den Coefficienten A, die im Allgemeinen nicht erfüllt ist.

sich $\alpha_2\alpha_4\beta_3$ eindeutig ergeben. In der That können die Grössen $\alpha_1\alpha_5$ nur dann Null werden, wenn entweder α_3 oder zugleich β_2 und β_4 verschwinden.

4.

Mit der Combinante $W(x)$ dreier biquadratischen Formen stehen zwei Gleichungssysteme in enger Beziehung, die ebenso wie $W(x)$ zu den f in invariantem Verhältniss stehen.

Werden die drei Formen:

$$f_i = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 + e_i x^4,$$
$$i = 1, 2, 3$$

linear combinirt zu der Form:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = C(x - x_1)(x - y_1)(x - z_1)(x - w_1),$$

so sind von den Werthen $x_1 \cdots w_1$, für welche die lineare Function verschwindet, im Allgemeinen zwei durch die übrigen bestimmt. Für besondere Werthe $x_1 y_1$ können indess $z_1 w_1$ unbestimmt werden. Es sind dies diejenigen, für welche die fünfreihigen Determinanten der folgenden Matrix zugleich zu Null werden:

$$\text{(D)} \qquad \left\| \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & xy & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -x-y & xy & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 & -x-y & xy \\ d_1 & d_2 & d_3 & 0 & 1 & -x-y \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Unter Einführung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen leitet man hieraus die Gleichungen ab:

$$\text{(D')} \quad \begin{array}{l} p^2\alpha_0 + ps\alpha_1 + s^2\beta_2 + p(\alpha_2 - \beta_2) + s\beta_3 + \beta_4 = 0, \\ p^2\alpha_1 + ps(\alpha_2 + \beta_2) + s^2\beta_3 + p\alpha_3 + s(\alpha_4 + \beta_4) + \alpha_5 = 0, \\ p^2\beta_2 + ps\beta_3 + s^2\beta_4 + p(\alpha_4 - \beta_4) + s\alpha_5 + \alpha_6 = 0, \end{array}$$

wo

$$p = xy; \qquad s = x + y$$

gesetzt ist. Dieses Gleichungssystem steht sowohl vermöge seiner Herleitung als auch nach Früherem (§ 2.) zu den f im Verhältniss einer Covariante, das heisst, die Gleichungen für ein transformirtes System der f gebildet, lassen sich durch lineare Combination der linken Seiten aus denen des ursprünglichen Systems zusammensetzen. Nun giebt es Werthepaare x, y, welche alle drei Gleichungen zugleich befriedigen. Man erhält die Bestimmungsgleichung für s, indem man aus irgend zweien derselben, z. B. der zweiten und dritten,

p eliminirt, und die Resultante durch die der ersten nicht zukommende Lösung (hierdurch $s\beta_4 + \alpha_5$, wozu $p\beta_4 - \alpha_6$ gehört) dividirt. Aber man erhält die gewünschte Gleichung einfacher durch Elimination von $1, p, p^2$ aus allen dreien zugleich:

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & s\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_2 & s^2\beta_2 + s\beta_3 + \beta_4 \\ \alpha_1 & s(\alpha_2+\beta_2) + \alpha_3 & s^2\beta_3 + s(\alpha_4+\beta_4) + \alpha_5 \\ \beta_2 & s\beta_3 + \alpha_4 - \beta_4 & s^2\beta_4 + s\alpha_5 + \alpha_6 \end{vmatrix} = 0,$$

während der zugehörige Werth von p sich aus den Minoren dieser Determinante bestimmt.

Es giebt also drei Werthepaare xy, für welche die Verhältnisse der Coefficienten α der linearen Function der f *nicht* bestimmt sind.

Diese drei Werthepaare zeigen nun in vieler Hinsicht ein ähnliches Verhalten, wie diejenigen xy, welche einer Matrix entsprechen, aus der sich, indem man $x = y$ setzt, ebenso der Factor U bestimmt, wie aus der erwähnten der Factor C der Discriminante von $W(x)$.

Es ist die Matrix desjenigen linearen Gleichungssystems, welches ausdrückt, dass von den vier Werthepaaren $x_1y_1z_1w_1$, für die eine lineare Function der f verschwindet, zweimal zwei zusammenfallen:

$$\text{(T)} \qquad \left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^2y^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -2xy(x+y) \\ c_1 & c_2 & c_3 & 2(xy+x^2+y^2) \\ d_1 & d_2 & d_3 & 2(x+y) \\ e_1 & e_2 & e_3 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Solcher Werthepaare ($x_1 = z_1 = x$, $y_1 = w_1 = y$) giebt es vier. Denn setzt man wieder:

$$xy = p; \quad x + y = s,$$

so erhalten zwei jener fünf Gleichungen die Form:

$$\text{(T')} \qquad \begin{cases} p^2\alpha_2 + 2ps\beta_3 + (s^2+2p)\,\beta_4 - \alpha_6 = 0, \\ p^2\alpha_3 + 2ps\alpha_4 + (s^2+2p)\,\alpha_5 + 2s\alpha_6 = 0, \end{cases}$$

woraus man durch Elimination von p, mit Rücksicht auf die Relationen ((1), § 3.) zwischen den α, β die Gleichung für s ableitet:

$$\text{(T'')} \qquad \begin{aligned} &4\left(\beta_2 s^3 + 2\beta_3 s^2 + (2\beta_4 + \alpha_4)s + \alpha_5\right)(\alpha_0 s + \alpha_1) \\ &\quad - (\alpha_1 s^2 + 2\alpha_2 s + \alpha_3)^2 = 0, \end{aligned}$$

während sich p aus der Gleichung bestimmt:

$$2p(s\alpha_0 + \alpha_1) + s^2\alpha_1 + 2s\alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Ich werde nun zeigen, dass durch Adjunction eines der Werthepaare x, y, für welche sämmtliche Determinanten der Matrix (D) oder

(T) verschwinden (ich will kürzer sagen: welche der Matrix (D) oder (T) „entsprechen"), die Form $W(x)$ in zwei Gestalten von bemerkenswerther Einfachheit übergeführt werden kann.

Ist $x_1 y_1$ ein Werthepaar, welches der Matrix (D) entspricht, und transformirt man mittelst:

$$x' = \frac{x - x_1}{x - y_1} \cdot \text{const.} \tag{1}$$

die Formen f, wodurch die Determinanten $\alpha_0 \cdots \beta_2 \cdots$ in $\alpha_0' \cdots \beta_2' \cdots$ übergehen mögen, so wird der *transformirten* Matrix (D) ein Werthepaar:

$$x' = 0, \quad y' = \infty$$

entsprechen. Geht man hiermit, (oder besser, nachdem man statt $y' \cdots \frac{1}{z'}$ gesetzt und mit z'^2 multiplicirt hat, mit $x' = z' = 0$) in die Gleichungen D' ein, so ergiebt sich sogleich:

$$\beta_2' = \beta_3' = \beta_4' = 0.$$

Umgekehrt führen diese Gleichungen auf ein Werthepaar $0, \infty$ und auf:

$$\frac{\alpha_0'}{\alpha_4'} = \frac{\alpha_1'}{\alpha_5'} = \frac{\alpha_2'}{\alpha_6'}.$$

Die Grössen β' lassen sich also durch eine *lineare Transformation von der Form* (1) und nur durch eine solche zum Verschwinden bringen. Bei passender Wahl der Constanten in der Formel (1) reduciren sich ferner die Grössen α_0' und α_4' auf denselben Werth. Durch diese Formel, (deren Coefficienten die Adjunction je einer Wurzel einer Gleichung fünften Grades und einer dritten Grades voraussetzen) lässt sich also $W(x)$ und somit *die allgemeine binäre Form sechster Ordnung, von einem constanten Factor abgesehen, in die Gestalt bringen:*

$$x^6 + 2px^5 + 3qx^4 + 4rx^3 + 3x^2 + 2px + q. \tag{I}$$

In gleicher Weise führt die Adjunction eines Werthepaares $x_1 y_1$, das die Determinanten der Matrix (T) zum Verschwinden bringt, auf eine Gleichungsform $W(x)$, für die

$$\beta_2 = \beta_4 = \alpha_1 = \alpha_5 = 0$$

ist. Durch passende Bestimmung der Constanten der linearen Transformation (1) kann man diese Form und somit *die allgemeine binäre Form sechster Ordnung wie oben in die Gestalt**) bringen:

*) Auf die canonische Form (II) hat kürzlich Herr K. Stephanos (Comptes rendus, Dec. 1881) aufmerksam gemacht. Seine Untersuchungen beziehen sich, nach dem gegebenen Auszuge zu urtheilen, auf die Bedeutung, welche die Functionaldeterminante von zwei binären Formen vierter Ordnung für die Theorie der Combinanten dieser Formen hat, und sind denen analog, die aus Anlass einer Preisfrage Herr E. Stroh für *drei* Formen derselben Ordnung vorgenommen

(II) $$x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + 1,$$

wo ebenso wie in (I) nur die Anzahl 3 der wesentlichen Constanten einer Form sechster Ordnung auftritt.

Die Factoren C und U, in welche die Discriminante der Formen (I) und (II) zerfällt, werden besonders einfach für die Form (I). Setzt man in den Formeln für U und C des § 3.:

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0,$$

$$\alpha_0 = \alpha_4 = 1; \quad \alpha_1 = \alpha_5 = \tfrac{2}{3}\, p; \quad \alpha_2 = \alpha_6 = q; \quad \alpha_3 = 4r,$$

so wird:

$$\tfrac{1}{4^4}\, U = -\, D_0 D_1 D_2,$$

wo:

$$D_0 = (p - r)^2 + (q - 1)^2,$$
$$D_1 = p + r + q + 1,$$
$$D_2 = -\, p - r + q + 1$$

ist; ferner:

$$\tfrac{1}{16}\, C = r^2 q^2 + rp\left(\tfrac{8}{27}\, p^2 - q\right)(q^2 + 1) + \left(\tfrac{8}{27}\, p^2 - q\right)^2 p^2 - \tfrac{(q^2 - 1)^2}{12}\, p^2 + q\, \tfrac{(q^2 - 1)^2}{4}$$
$$= \tfrac{1}{2q^2}\left[\left(2rq^2 + p(q^2 + 1)\left(\tfrac{8}{27}\, p^2 - q\right)\right)^2 - (q^2 - 1)^2\left(\tfrac{4}{9}\, p^2 - q\right)^3\right].$$

Die Discriminante von (I) *zerfällt also in* 4 *lineare und einen Ausdruck sechsten Grades in den Coefficienten* p, q, r. Es liegt nahe, diesen Umstand zu einer *Discussion der Realitätsverhältnisse der Wurzeln der Form* (I) zu benutzen, wenn die Coefficienten p, q, r reell angenommen werden.

Wenn man nämlich, nach dem Vorgange von Kronecker und Sylvester, die Coefficienten p, q, r als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes im Raum deutet und die Zahlen aufsucht, in die der

---

und im Mai 1881 der allgemeinen Abtheilung der technischen Hochschule zu München eingereicht hat. Da nach dem Satze des § 1. die Combinanten von zwei und drei Formen vierter Ordnung identisch sind, so mussten beide Untersuchungen, wie es sich in der That gezeigt hat, zu denselben Resultaten führen.

[In den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 1. Mai 1882 ist ein Referat über neuere Untersuchungen des Herrn Stephanos abgedruckt, welche mit den Entwicklungen, wie sie Herr Brill hier im Texte giebt, auf das Engste verwandt sind. Wir glauben daher erklären zu sollen, dass sich das Brill'sche Manuscript bereits in unseren Händen befand, ehe jene Mittheilung in den Comptes Rendus erschien.

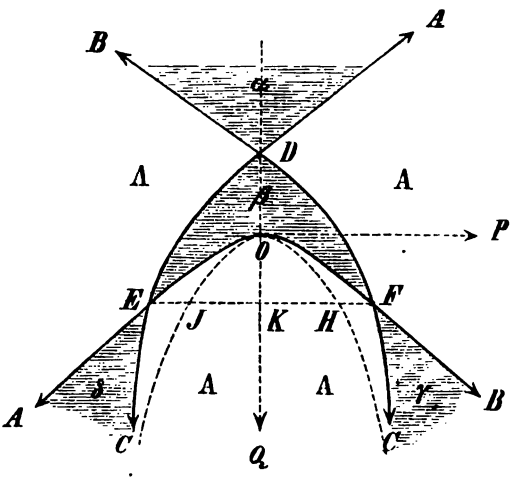
Die Red. d. math. Ann.]

Raum durch die Flächen $C = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ zerlegt wird, so gehört jedem Punkt eine (oder vielmehr jede linear in diese transformirbare) Gleichung 6. Ordnung zu, deren Wurzeln ihre Realitätsverhältnisse nur beim Uebergang von einer Zelle zur nächsten ändern.

Ich stelle kurz die Eigenschaften zusammen, welche eine Discussion der Fläche $C = 0$ ergeben hat.

Ist O der Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, sind P, Q, R die Axen, denen parallel die Längen p, q, r aufgetragen werden, so geht die Fläche C durch Drehung um die Axe Q um 180° in sich selbst über. Der Schnitt der Ebene PQ mit der Fläche ist eine unicursale Curve 6. Ordnung, die schematisch gezeichnet die beifolgende Form hat

$(OD = OK = 1)$,



wo die Zweige A, A; B, B je dieselben Asymptoten haben; die C, C haben eine parabolische Asymptote. Die Fläche erhebt sich über der nebengezeichneten Curve beiläufig in Cylinderform mit gegen die PQ-Ebene geneigten Erzeugenden, welche, in Ebenen parallel zur Ebene PR, ungefähr die Form von unpaaren Zügen einer Curve dritter Ordnung haben. Die räumlichen Partien, die an das Flächenstück γ anschliessen, sind nach oben hin von der Rückkehrkante der Fläche begrenzt, nach unten hin erstrecken sie sich ins Unendliche. Das Gleiche gilt von den an δ angrenzenden Partien, nur oben mit unten vertauscht. Ueber die Rückkehrkante hinweg, deren Projection in die PQ-Ebene die Parabel HOJ ist, communiciren die Raumpartien A mit einander. Man bemerke noch, dass die Fläche C in dem Punkt D der PQ-Ebene von den Ebenen $D_1 = 0$, $D_2 = 0$ berührt wird, wo D_1, D_2 die beiden reellen linearen Factoren der Discriminante von (I) sind, ferner, dass jede dieser Ebenen stationäre Schmiegungsebene der Rückkehrkante in dem über H bez. unter J gelegenen Punkte ist, und in diesen Punkten zugleich die in der Ebene $q = 1$ gelegene Doppelcurve dritter Ordnung berührt, welche zwischen ihnen isolirt (ausserhalb mit reellen Tangentialebenen) verläuft.

Durch die Fläche $C = 0$ wird der Raum in 5 mit einander nicht communicirende Zellen zerlegt, von denen die an schraffirte Partien

der PQ-Ebene angrenzenden negativem Vorzeichen von C entsprechen. Wegen der Transformirbarkeit der Fläche in sich kann man sich auf positive Werthe von p beschränken und den Raum δ unberücksichtigt lassen. Die vier Räume α, β, γ, A werden nun durch die Ebenen:

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 0$$

weiter zerlegt. Es sind jedoch im Ganzen nur 10 Zellen zu untersuchen, weil mehrere Möglichkeiten nicht auftreten. Denn aus:

$$\begin{cases} D_1 < 0; & D_2 < 0 \quad \text{folgt:} \quad q < -1, \\ D_1 > 0; & D_2 > 0 \quad \text{folgt:} \quad q > -1. \end{cases}$$

Ebenso liegen die Räume γ und δ ganz in dem Raum $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, denn sie werden von den Ebenen D_1 und D_2 in den Punkten H, J nur berührt. Für die wirklich vorhandenen Zellen wird nun die Realität der Wurzeln am einfachsten durch passend gewählte Zahlenbeispiele festgestellt, was um so leichter geschieht, als es sich immer nur um die Entscheidung handelt, ob 2 oder 6, ob 0 oder 4 reelle Wurzeln auftreten. Denn das Vorzeichen der Discriminante entscheidet bereits über diese beiden Hauptfälle.

Die Ergebnisse lassen sich in folgender Tabelle vereinigen:

Vorzeichen von: C	D_1	D_2	Zahl der reellen Wurzeln:
$-$	$-$	$-$	$\cdots$ 2
$-$	$+$	$+$	$\cdots$ 2
$-$	$+$	$-$	$\cdots$ 4
$-$	$-$	$+$	$\cdots$ 4
$+$	$-$	$-$	$\cdots$ 4
$+$	$+$	$+$	$\cdots$ 0 oder 4
$+$	$+$	$-$	$\cdots$ 2
$+$	$-$	$+$	$\cdots$ 2 oder 6.

5.

An die linearen Transformationen des vorstehenden Paragraphen knüpft sich noch eine weitere Bemerkung, die auf den Zusammenhang zwischen den Wurzeln jener Gleichung fünften Grades (§ 3) Bezug hat, von der die Reduction einer binären Form 6. Ordnung $F(x)$ auf die Form $W(x)$ abhängt.

Wenn man $F(x)$ in eine Form mit verschwindendem zweiten und vorletztem Glied zu transformiren verlangt, so ist für die zugehörige

Form $W'(x)$ — deren es fünf giebt — wegen der Relationen (1) des § 3 zugleich entweder $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ oder $\alpha_1 = \alpha_5 = \beta_2 = \beta_4 = 0$.

Sei eine Wurzel der Gleichung fünften Grades, vermöge deren $F(x)$ in die Form $W(x)$ übergeführt wird, bekannt. Um nun jene transformirte Form $W'(x)$ zu erhalten, denken wir uns irgend eines der zu $W(x)$ gehörigen Systeme der Functionen $f_1 f_2 f_3$ gefunden (etwa indem man die Elemente einer der Determinanten der a_{ik} in der oben § 1 angegebenen Weise in 0 bez. 1 übergeführt voraussetzt). Nun wenden wir auf die f entweder eine der im vorigen Paragraphen angegebenen vier linearen Transformationen an, durch die eine Form $W'(x)$ mit verschwindenden $\alpha_1 \alpha_5 \beta_2 \beta_4$ erhalten wird, oder eine der sogleich anzugebenden, durch die $\alpha_1 \alpha_5 \alpha_3$ zu Null gemacht werden.

Setzt man nämlich in der Gleichung (T″) des vorigen Paragraphen, die aus der Matrix (T) hervorgeht, $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$, so werden zwei Wurzeln der Gleichung für s zu Null, während der zugehörige Werth für p unbestimmt oder vielmehr aus einer quadratischen Gleichung bestimmbar wird. Man erhält also zwei Werthepaare s, p, für die s Null ist, und demnach bilden zwei Werthepaare x, y harmonische Paare zu dem Verschwindungs- und dem Unendlichkeitspunkt von x (wenn man sich diese Grössen den Punkten einer Geraden zugeordnet denkt). Umgekehrt wird eine Wurzel der Gleichung für s Null, wenn:

$$4\alpha_1 \alpha_5 - \alpha_3^2 = 0$$

ist. Sollen hierzu aber zwei Werthe von p gehören, so muss, weil p sich aus:

$$2p\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

bestimmt, $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ sein, was wiederum $\alpha_5 = 0$ nach sich zieht.

Man schliesst daraus wie früher, dass die Ueberführung der Form $W(x)$ in eine andere, für die $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0$ ist, immer und nur durch Adjunction eines Werthepaars möglich wird, das zu zweien der Matrix (T) entsprechenden Paaren harmonisch conjugirt ist. Solcher Paare giebt es sechs; sie sind die Wurzelpaare der Functionaldeterminanten, die man aus je zweien der vier quadratischen Formen bilden kann, deren Wurzelpaare der Matrix (T) entsprechen.

Eine Form $W'(x)$ mit verschwindendem zweiten und vorletzten Term — und also eine binäre Form 6. Ordnung von der gleichen Eigenschaft — lässt sich nach dem Vorstehenden durch lineare Transformation auf zwei wesentlich verschiedene Arten aus einer anderen Form $W(x)$ — und also aus der allgemeinen binären Form 6. Ordnung $F(x)$ — herstellen: 1. Indem man eines der vier der Matrix (T) entsprechenden Werthepaare benutzt. 2. Indem man eines der sechs Werthepaare adjungirt, die zu je zweien dieser Paare harmonisch sind.

Andere lineare Transformationen mit dem Erfolg $A_1 = A_5 = 0$ können nach dem oben Gesagten nicht existiren. Wenn man zu der Form $F(x)$ eine andere als die benutzte Wurzel der Gleichung 5. Grades adjungirt, also durch eine andere Form $W(x)$ hindurch zu der transformirten Form zu gelangen sucht, indem man hierfür eine der ihr entsprechenden 10 Transformationen benutzt, so kann diese nur wieder eine der obigen 10 sein und die transformirte Form nur wieder eine der bereits erhaltenen.

Beim Uebergang also von einer Wurzel der Gleichung fünften Grades zur Anderen geht die Gesammtheit jener 10 *Werthepaare in sich selbst über.* Ob und in welcher Weise dabei eine Vertauschung der Paare unter sich stattfindet, kann entweder ein Beispiel entscheiden, oder besser die Betrachtungen des nächsten Paragraphen über quadratische Formen. Vorgreifend führe ich das Resultat an:

Jene zehn Werthepaare, nämlich die vier Werthepaare, welche der Matrix T entsprechen, und die sechs harmonischen zu je zweien derselben vertauschen sich dabei in der Art, dass eines der ersteren ungeändert bleibt, während die drei anderen sich gegen die drei paarweise harmonischen auswechseln.

Eine neue Seite erhalten diese Beziehungen, wenn man die Forderung, dass vier Werthepaare x, y das einer Matrix (T) entsprechende Lösungssystem bilden, in eine andere elegantere Form bringt.

Die 4-reihigen Determinanten der Matrix (T):

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & x^2y^2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -2xy(x+y) \\ c_1 & c_2 & c_3 & 2(xy+x^2+y^2) \\ d_1 & d_2 & d_3 & -2(x+y) \\ e_1 & e_2 & e_3 & 1 \end{Vmatrix}$$

verschwinden (§ 4) immer und im Allgemeinen nur dann, wenn $x\,y$ Wurzeln einer quadratischen Form sind, deren Quadrat als lineare Function der f darstellbar ist. Nimmt man nun von den 4 Werthepaaren x, y, welche jenen Gleichungen genügen, drei in Gestalt von quadratischen Formen $\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3$, deren Wurzeln sie sind, gegeben an, so müssen die Functionen f lineare Functionen der Quadrate der φ sein, und man kann, da es sich nur um Combinanteneigenschaften handelt, die f direct durch die Quadrate der φ ersetzen. Dem vierten Werthepaar x, y entspricht dann eine quadratische Form φ_4, deren Quadrat als lineare Form von φ_1^2, φ_2^2, φ_3^2 darstellbar sein muss. Da aber andererseits zwischen 4 quadratischen Formen immer eine lineare Relation besteht, so hat man die folgenden Beziehungen, wo $\alpha_1 \cdots \beta_1 \cdots$ Constante sind:

$$\alpha_1\varphi_1^2 + \alpha_2\varphi_2^2 + \alpha_3\varphi_3^2 + \alpha_4\varphi_4^2 = 0$$
$$\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2 + \beta_3\varphi_3 + \beta_4\varphi_4 = 0,$$

aus denen sich umgekehrt φ_4 und die α, β — von Ausnahmefällen abgesehen, die sich im Folgenden ergeben werden — bestimmen lassen müssen.

Jene zwei Gleichungen sind also der hinreichende und nothwendige Ausdruck der Bedingung dafür, dass die Wurzelpaare der φ ein der Matrix (T) entsprechendes Werthsystem darstellen.

Ich werde nun zeigen, wie man von diesen vier Formen φ zu vier anderen gelangt, die einer anderen Wurzel der Gleichung fünften Grades entsprechen.

6.

Das vollständige System der simultanen In- und Covarianten von drei binären quadratischen Formen:

$$\varphi_i(x_1x_2) = a_ix_1^2 + 2b_ix_1x_2 + c_ix_2^2,$$
$$i = 1, 2, 3,$$

besteht bekanntlich aus:

1. Den drei Functionaldeterminanten φ_{23}, φ_{31}, φ_{12}, wo:

$$\varphi_{ik} = -\varphi_{ki} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right);$$

2. Der Combinante:

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

3. Den Invarianten D_{11}, D_{22}, D_{33}, wo:

$$D_{ii} = 2(a_ic_i - b_i^2).$$

4. Den Invarianten D_{23}, D_{31}, D_{12}, wo:

$$D_{ik} = D_{ki} = a_ic_k + c_ia_k - 2b_ib_k$$

ist. Aus den Formen 3. und 4. setzen sich die Resultanten d_{11}, d_{22}, d_{33} von je zweien der φ und drei Invarianten d_{23}, d_{31}, d_{12} zusammen, wo $d_{ik} = d_{ki}$ ist, und:

$$d_{11} = D_{22}D_{33} - D_{23}^2; \quad d_{22} = D_{33}D_{11} - D_{13}^2; \quad d_{33} = D_{11}D_{22} - D_{12}^2;$$
$$d_{23} = D_{21}D_{31} - D_{23}D_{11}; \quad d_{31} = D_{32}D_{12} - D_{31}D_{22};$$
$$d_{12} = D_{13}D_{23} - D_{12}D_{33}.$$

Zwischen diesen Formen bestehen zahlreiche identische Relationen, von denen wir die folgenden hervorheben:

$$(1)\qquad \begin{cases} R\cdot\varphi_1 = D_{11}\xi_{23} + D_{21}\xi_{31} + D_{31}\xi_{12}; & \text{u. s. w.} \\ 2R\cdot\varphi_{23} = d_{11}\varphi_1 + d_{21}\varphi_2 + d_{31}\varphi_3; & \text{u. s. w.} \end{cases}$$

$$2R^2 = \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{vmatrix};$$

(2) $2R^2\cdot D_{11} = d_{22}d_{33} - d_{23}^2$; u. s. w; $2R^2\cdot D_{23} = d_{21}d_{31} - d_{23}d_{11}$; u. s. w.

(3) $D_{11}d_{12}d_{13} + D_{12}d_{12}d_{23} + D_{13}d_{13}d_{23} = 2R^2\cdot D_{12}D_{13}$; u. s. w.

endlich:

(4) $0 = \varphi_1^2 d_{11} + \varphi_2^2 d_{22} + \varphi_3^2 d_{33} + 2\varphi_2\varphi_3 d_{23} + 2\varphi_3\varphi_1 d_{31} + 2\varphi_1\varphi_2 d_{12}$

(5) $0 = \varphi_{23}^2 D_{11} + \cdots + 2\varphi_{13}\varphi_{12}D_{32} + \cdots,$

wo die analog gebildeten Terme, bez. Gleichungen, weggelassen wurden.

Wenn man die folgende lineare Function der drei Formen, die (bis auf einen constanten Factor) mit φ_4 bezeichnet werde:

$$2R\cdot\varphi_4 = \varphi_1 d_{12}d_{13} + \varphi_2 d_{21}d_{23} + \varphi_3 d_{31}d_{32}$$

quadrirt, und von dieser Gleichung die Identität (4), mit $d_{12}d_{23}d_{31}$ multiplicirt abzieht, so erhält man:

$$2\varphi_4^2 = \varphi_1^2 d_{12}d_{13}D_{23} + \varphi_2^2 d_{21}d_{23}D_{31} + \varphi_3^2 d_{31}d_{32}D_{12}.$$

Man kann dem Ausdruck φ_4 auch die Form geben:

$$\varphi_4 = \varphi_{23}D_{21}D_{31} + \varphi_{31}D_{32}D_{12} + \varphi_{12}D_{13}D_{23},$$

und wird dann ebenso auf die Relation geführt:

$$\varphi_4^2 = \varphi_{23}^2 D_{12}D_{13}d_{23} + \varphi_{31}^2 D_{21}D_{23}d_{31} + \varphi_{12}^2 D_{31}D_{32}d_{12}.$$

Um die Gleichberechtigung der Form φ_4 mit den Formen $\varphi_1\varphi_2\varphi_3$ besser hervortreten zu lassen, setze ich:

$$\varphi_1\cdot d_{12}d_{13} = \varphi_1'; \quad \varphi_2\cdot d_{21}d_{23} = \varphi_2'; \quad \varphi_3\cdot d_{31}d_{32} = \varphi_3';$$

Dann wird, indem man die Invarianten etc. der φ' wie die der φ bezeichnet und nur mit einem oberen Index versieht:

$$d_{23}' = d_{31}' = d_{12}' = d_{12}^3 d_{23}^3 d_{31}^3.$$

Ich will diesen Ausdruck mit α_4 bezeichnen. Die Combinante R' wird:

$$R' = d_{12}^2 d_{23}^2 d_{31}^2\cdot R.$$

Ferner setzen wir:

$$2R\cdot\varphi_4 = -\varphi_4'.$$

Wenn man nun der Einfachheit wegen den oberen Index wieder weglässt, oder vielmehr, wo es nöthig ist, durch einen solchen (4) ersetzt, wenn die betreffende Form simultane Invariante von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ist; durch (3) solche von $\varphi_1\varphi_2\varphi_4$ u. s. w., so treten zu den früher angeführten Identitäten (1)···(5), die dann sowohl in dem oberen Index (4) wie in (1) (2) (3) geschrieben bestehn, die folgenden hinzu:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0 \\ d_{23}^{(4)} = d_{31}^{(4)} = d_{12}^{(4)} = \alpha_4 . \end{cases}$$

Hieraus folgt sogleich:

$$D_{1i} + D_{2i} + D_{3i} + D_{4i} = 0; \quad i = 1, \cdots 4;$$

ferner:

$$(7) \qquad \begin{cases} d_{12}^{(3)} = d_{24}^{(3)} = d_{41}^{(3)} = \alpha_3 = d_{33} - \alpha_4 \\ d_{13}^{(2)} = d_{34}^{(2)} = d_{41}^{(3)} = \alpha_2 = d_{22} - \alpha_4 \\ d_{23}^{(1)} = d_{34}^{(1)} = d_{42}^{(1)} = \alpha_1 = d_{11} - \alpha_4 . \end{cases}$$

Wendet man die Operation, die auf die lineare Beziehung zwischen den Quadraten der φ geführt hat, auf die transformirten φ an, so erhält man:

$$(8) \qquad \alpha_1 \varphi_1^{\,2} + \alpha_2 \varphi_2^{\,2} + \alpha_3 \varphi_3^{\,2} + \alpha_4 \varphi_4^{\,2} = 0.$$

Das völlig symmetrische Auftreten der Grössen (6) (7): $\alpha_1 \cdots \alpha_4$ in dieser Formel gegenüber $\varphi_1 \cdots \varphi_4$ ist eine Folge der Relationen (6). So oft also diese zwischen vier quadratischen Formen bestehen, existirt eine Relation von der Form (8).

An Stelle der Functionaldeterminanten φ_{ik} der (transformirten) $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$ führe ich folgende Formen ein:

$$\psi_1 = \varphi_{23} \cdot \alpha_2 \alpha_3; \quad \psi_2 = \varphi_{31} \cdot \alpha_3 \alpha_1; \quad \psi_3 = \varphi_{12} \cdot \alpha_1 \alpha_2,$$

und setze weiter:

$$\psi_4 = \varphi_4 \cdot R^3.$$

Drückt man das System der Invarianten für diese 4 Formen durch die der φ aus, so ergiebt sich, dass zwischen den ψ und deren Invarianten d_{ik} wieder Relationen von der Form (6) bestehen. Hieraus folgt die Existenz einer Relation von der Form (8), und man hat also:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 0,$$
$$\beta_1 \psi_1^{\,2} + \beta_2 \psi_2^{\,2} + \beta_3 \psi_3^{\,2} + \beta_4 \psi_4^{\,2} = 0.$$

Wegen der Symmetrie der Gleichungen (6)—(8) in Bezug auf die vier Formen φ giebt es aber solcher Gleichungspaare zwischen einem der φ und den Functionaldeterminanten der drei anderen im Ganzen vier; also fünf Gleichungspaare von der Form (8), jedes einem Quadrupel von Formen: $\varphi_1 \cdots \varphi_4$; $\psi_1 \cdots \psi_4$; u. s. w. entsprechend.

In der folgenden Tabelle sind diese 5 Quadrupel, je mit den 6 Functionaldeterminanten, die sich aus ihnen ableiten lassen (unter Weglassung eines constanten Factors) zusammengestellt. Es sind nur die Indices angegeben, also: 1 statt φ_1; 12 statt φ_{12}; (12, 34) statt: Functionaldeterminante aus φ_{12} und φ_{34}:

1, 2, 3, 4	23, 31, 12, 4	12, 24, 41, 3	41, 13, 34, 2	34, 42, 23, 1
23	(31, 12) = 1	(24, 41) = 4	(13, 34) = 3	(42, 23) = 2
31	(12, 23) = 2	(41, 12) = 1	(34, 41) = 4	(23, 34) = 3
12	(23, 31) = 3	(12, 24) = 2	(41, 13) = 1	(34, 42) = 4
14	(23, 4) = 14	(12, 3) = 43	(41, 2) = 32	(34, 1) = 21
24	(31, 4) = 24	(24, 3) = 13	(13, 2) = 42	(42, 1) = 31
34	(12, 4) = 34	(41, 3) = 23	(34, 2) = 12	(23, 1) = 41

In jeder Columne dieser Tabelle treten dieselben 10 Functionen auf. Wendet man den Process der Functionaldeterminantenbildung auf eines der Quadrupel an, die durch denselben aus dem ersten entstanden, so wird man, wie man ohne Mühe erkennt, immer wieder zu einem der 5 Quadrupel der Tabelle geführt. Man vereinigt die vorstehenden Bemerkungen zu dem Satz:

Zu drei quadratischen Formen mit nicht verschwindender Combinante und für welche mindestens zwei von den Invarianten d_{ik} von Null verschieden sind, *lässt sich immer und nur auf eine Weise eine vierte so finden, dass zwischen den Quadraten der vier Formen eine lineare Relation besteht. Ersetzt man irgend drei der Formen durch die drei Functionaldeterminanten aus je zweien, so besteht zwischen den Quadraten dieser und der nicht benutzten Form wiederum eine lineare Relation.* Man erhält so fünf verschiedene Formenquadrupel, welche insofern eine Gruppe bilden, als die Wiederholung des Processes nur immer wieder ein Quadrupel der Gruppe ergiebt. Die Gesammtheit der Operationen besteht aus $24 \cdot 5 = 120$ Substitutionen, indem der eben geschilderte Process mit dem der Permutation von vier Grössen zu verbinden ist.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen war gezeigt worden, dass die vier Formen φ zu Wurzeln die vier Werthepaare xy besitzen, welche einer Matrix (T) entsprechen. Die Formenquadrupel, zu denen wir von den φ ausgehend gelangt sind, entsprechen wiederum je einer solchen Matrix. Einer Wurzel der Gleichung fünften Grades, vermöge deren man zu der Form $W(x)$ gelangt, entsprechen also vier Formen φ, welche zusammen mit deren Functionaldeterminanten ein System von 10 quadratischen Formen bilden, die nach Früherem in anderer Anordnung den vier anderen Wurzeln der Gleichung fünften Grades zugehören. Da es nun aber gleichgiltig ist, von welcher dieser Wurzeln man ausgeht, so können diese Anordnungen zu Quadrupeln und Sextupeln nur immer solche sein, dass die Functionaldeterminanten der Quadrupel die Formen der Sextupel ergeben. Dies ist nun offenbar bei der oben angeschriebenen Tabelle der Fall, *deren fünf Columnen hiernach den Wurzeln jener Gleichung fünften Grades entsprechen*

müssen. Da sich leicht einsehen lässt, dass diese Gruppirungen die einzig möglichen sind, welche jener Forderung genügen, so folgt der Satz a. E. des vorigen Paragraphen.

Umgekehrt muss es hiernach auch möglich sein, die Form $W(x)$ durch jedes der fünf Quadrupel der Tabelle in derselben Weise auszudrücken. In Function der (transformirten) Formen φ lässt sich $W(x)$ in der eleganten Gestalt anschreiben:

$$\varphi_2\varphi_3\varphi_4 \cdot D_{11} + \varphi_3\varphi_1\varphi_1 \cdot D_{22} + \varphi_4\varphi_1\varphi_2 \cdot D_{33} + \varphi_1\varphi_2\varphi_3 \cdot D_{44}.$$

Man kann in der That zeigen, dass diese Form bis auf einen constanten Factor mit der in den ψ geschriebenen identisch ist, was ich indess hier unterlasse.

Obige Tabelle enthält 30 Functionaldeterminantenbildungen, die sich durch 10 Formen ausdrücken. Man kann aus den Letzteren im Ganzen $\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ solcher Bildungen ableiten. Die 15 oben nicht angeführten lassen sich zu einer Tabelle vereinigen, deren Columnen sich denen der früheren eindeutig zuordnen:

(23, 14)	(1, 14)	(4, 43)	(3, 32)	(2, 21)
(31, 24)	(2, 24)	(1, 13)	(4, 42)	(3, 31)
(12, 34)	(3, 34)	(2, 23)	(1, 12)	(4, 41).

Um die Bedeutung auch dieser Functionaldeterminanten zu ermitteln, wobei man sich auf die der ersten Columne beschränken kann, drücken wir dieselben durch bekannte Grössen aus. Man findet (wiederum bis auf Constante genau):

$$(\varphi_{23}, \varphi_{14}) = \varphi_2 + \varphi_3 = 2\delta_1 \sqrt{\delta_{11}}$$
$$(\varphi_{31}, \varphi_{24}) = \varphi_3 + \varphi_1 = 2\delta_2 \sqrt{\delta_{22}}$$
$$(\varphi_{12}, \varphi_{34}) = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\delta_3 \sqrt{\delta_{33}},$$

wo in der rechts beigefügten Bezeichnung, die wir der Functionaldeterminante geben wollen, der Factor δ_{ii} dieselbe Invariante der δ wie d_{ii} der φ ist. Durch Auflösung nach den φ ergiebt sich:

$$\varphi_1 = -\delta_1\sqrt{\delta_{11}} + \delta_2\sqrt{\delta_{22}} + \delta_3\sqrt{\delta_{33}}$$
$$\varphi_2 = \delta_1\sqrt{\delta_{11}} - \delta_2\sqrt{\delta_{22}} + \delta_3\sqrt{\delta_{33}}$$
$$\varphi_3 = \delta_1\sqrt{\delta_{11}} + \delta_2\sqrt{\delta_{22}} - \delta_3\sqrt{\delta_{33}}.$$

Fügt man noch die Beziehung bei:

$$\varphi_4 = -\delta_1\sqrt{\delta_{11}} - \delta_2\sqrt{\delta_{22}} - \delta_3\sqrt{\delta_{33}},$$

und vergleicht diese Ausdrücke mit dem in § 6 meines Aufsatzes über rationale Curven (Math. Annalen Bd. XII) aufgestellten Gleichungssystem, so ergiebt sich — mit Rücksicht auf die geometrische Be-

deutung, die man vermöge der dort entwickelten Beziehungen den Werthepaaren beilegen kann, welche den Matrices (T) und (D) entsprechen — dass die Wurzeln der drei quadratischen Formen $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ die Determinanten der in § 4 aufgestellten Matrix D sämmtlich zum Verschwinden bringen. Hieraus folgt weiter durch Vergleichung der beiden obigen Tabellen:

Wenn man die 6 Formen φ_{ik} eines Sextupels, das einer Wurzel der Gleichung 5. Grades entspricht, zu je zweien gruppirt und deren Functionaldeterminante sucht, so sind 12 der so entstehenden $\frac{6.5}{1.2}$ Formen wieder solche des zugehörigen Quadrupels, welchem sich eine Matrix (T) zuordnen lässt. Die 3 übrigen ordnen sich dann in gleicher Weise der zu T gehörigen Matrix (D) zu.

Die hier betrachteten Beziehungen zwischen vier quadratischen Formen sind einer eleganten geometrischen Deutung fähig, die ich zum Gegenstand einer anderen Mittheilung zu machen beabsichtige.

München, im April 1882.

Untersuchungen über geodätische Curven.

Von

Sophus Lie in Christiania.

In der nachstehenden Abhandlung behandle ich ein allgemeines Problem, das sich auf die geodätischen Curven der Flächen bezieht. Dasselbe steht in einem gewissen Zusammenhange mit einigen schönen Untersuchungen von Beltrami (Annali di matematica Serie I, t. VII) und von Dini (Annali die matematica, Serie II, t. III), welche ich zunächst besprechen werde.

Beltrami machte zuerst darauf aufmerksam, dass die geodätischen Curven einer Fläche constanter Krümmung sich immer darstellen lassen durch eine solche Gleichung zwischen den krummlinigen (Gaussischen) Coordinaten x, y und den beiden arbiträren Constanten a und b, die linear hinsichtlich a und b ist und somit die Form

$$a\,X(xy) + b\,Y(xy) - 1 = 0$$

besitzt. Interpretirt man die Grössen X, Y als Cartesische Punktcoordinaten in einer Ebene, so erhält man eine Abbildung der Fläche auf die Ebene, bei der jeder Punkt xy der Fläche dem Punkte XY der Ebene zugeordnet ist, und bei der die geodätischen Curven der Fläche den geraden Linien der Ebene entsprechen. Beltrami fand ferner, dass die Flächen constanter Krümmung die einzigen sind, die sich in dieser Weise auf eine Ebene abbilden lassen. Indem er nun bemerkte, dass die geraden Linien der Ebene gleichzeitig geodätische Curven derselben sind, wurde er dazu geführt, das folgende allgemeine Problem zu stellen: Man soll in allgemeinster Weise zwei zusammengehörige Flächen finden, die nicht auf einander abwickelbar sind und welche nichtsdestoweniger sich derart auf einander abbilden lassen, dass jedem Punkte der einen Fläche ein Punkt oder einige Punkte der zweiten zugeordnet sind, und dabei den geodätischen Curven der ersten Fläche ebensolche Curven der zweiten Fläche entsprechen. Eben dieses anscheinend sehr schwierige Problem behandelt nun Dini in der eben citirten ausgezeichneten Abhandlung und findet dabei den Satz, dass

die Bogenelemente der beiden zusammengehörigen Flächen die analogen Formen

$$ds_1^2 = \{\psi_1(x+y) + \Psi_1(x-y)\}\, dx\, dy,$$
$$ds_2^2 = \{\psi_2(x+y) + \Psi_2(x-y)\}\, dx\, dy$$

besitzen müssen; ψ_1 und Ψ_1 sind hier arbiträre Functionen ihrer Argumente, während ψ_2 und Ψ_2 durch einfache Rechnungen bestimmt werden. Bei dem Beweise dieses Satzes setzt Dini, wenn ich nicht irre, voraus, sowohl, dass die betreffenden Flächen reell sind, wie auch, dass die Abbildung durch reelle Gleichungen zwischen den Cartesischen Punktcoordinaten der Flächen vermittelt wird. Lässt man alle derartige Beschränkungen hinsichtlich der Realität fallen, so findet man noch weitere Resultate, wie ich in einer Note am Schlusse dieser Abhandlung (Note 1) zeigen werde.

Indem ich mich jetzt zur Formulirung der Hauptprobleme dieser Arbeit wende, schicke ich die Bemerkung voraus, dass ich die Operation, bei der jeder Punkt einer Fläche in einen infinitesimal benachbarten Punkt derselben übergeführt wird, *eine infinitesimale Verschiebung der Fläche in sich* nennen werde. Es ist einleuchtend, dass eine jede Fläche unbegrenzt viele infinitesimale Verschiebungen in sich gestattet. Dabei ist klar, dass eine solche *Verschiebung im Allgemeinen mit einer Dehnung verbunden* sein wird. Nach einem von Bour herrührenden Satze sind die auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen die einzigen, die eine infinitesimale Verschiebung in sich ohne Dehnung gestatten.

Ich suche zuerst *die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche, die derart in sich infinitesimal verschoben werden kann, dass dabei jede geodätische Curve der Fläche in eine benachbarte geodätische Curve derselben Fläche übergeführt wird.* Jede Rotationsfläche oder Schraubenfläche wie überhaupt jede auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche erfüllt diese Forderung, und zwar ist in diesem Falle die betreffende Verschiebung von keiner Dehnung begleitet. Ebenfalls wird unsere Forderung erfüllt von jeder Fläche, die unendlich oft mit sich selbst ähnlich ist, wie auch von jeder auf eine solche Fläche abwickelbaren; dabei ist indess die Verschiebung der Fläche in sich von einer Dehnung begleitet. Es giebt, zeige ich, noch weitere Flächenfamilien, die unsere Forderung erfüllen, und welche wahrscheinlicherweise zuerst von mir bemerkt worden sind.

Ich bestimme sodann *das Bogenelement einer jeden Fläche*, die mehrere *infinitesimale Verschiebungen in sich gestattet, bei denen geodätische Curven in ebensolche Curven übergehen.* Unter den wichtigen Flächenfamilien, die ich in dieser Weise finde, verdient möglicherweise eine ganz besondere hervorgehoben zu werden: sie wird gebildet von

den Centraflächen aller Flächen, deren Hauptkrümmungshalbmesser in constantem Verhältnisse stehen.

Ich erhalte in dieser Weise eine rationelle Classification aller Flächen, die eine infinitesimale Verschiebung in sich gestatten, bei der geodätische Curven in ebensolche Curven übergehen. Diese Classification ist, wenn ich nicht irre, gänzlich verschieden von der von Christoffel (Abhandlungen der k. Akademie d. W. zu Berlin 1868) gegebenen Eintheilung der Flächen, welche ebenfalls auf das Verhalten der geodätischen Curven begründet ist. In Christoffel's schönen und umfassenden Untersuchungen spielen metrische Betrachtungen eine wesentlichere Rolle als bei mir. Meine Classification scheint insofern zweckmässiger als Christoffel's, als es mir grösstentheils gelungen ist, die Form des Bogenelementes derjenigen Flächen anzugeben, welche meinen verschiedenen Classen und Unterclassen angehören.*)

Um den Zusammenhang zwischen dem von Dini und dem von mir behandelten Probleme möglichst klar hervortreten zu lassen, sage ich mit Dini, dass zwei Flächen geodätisch auf einander abgebildet sind, wenn sie derart auf einander bezogen sind, dass jedem Punkte der einen Fläche ein Punkt der zweiten zugeordnet ist, und dabei den geodätischen Curven der ersten Fläche ebensolche Curven auf der zweiten Fläche entsprechen. In dieser Terminologie deckt sich das von Beltrami gestellte und von Dini behandelte Problem mit der allgemeinsten Bestimmung je zweier Flächen, die sich auf einander geodätisch abbilden lassen. Demgegenüber besteht das von mir im Folgenden behandelte Problem in der *Bestimmung einer jeden Fläche, die unendlich oft auf sich selbst geodätisch abgebildet werden kann.*

Am Schlusse der folgenden Abhandlung habe ich einige Noten hinzugefügt. In der ersten Note vervollständige ich Dini's soeben besprochenen Untersuchungen, indem ich das Bogenelement aller imaginären wie reellen Flächen bestimme, welche eine durch imaginäre oder reelle Gleichungen vermittelte geodätische Abbildung auf eine andere Fläche gestatten. In der zweiten Note entwickele ich einige Sätze über die durch Differentiation auszuführende Bestimmung der geodätischen Curven**) auf Flächen, welche den von mir aufgestellten Flächenclassen angehören. In der dritten Note bestimme ich alle möglichen Gleichungsformen der geodätischen Curven für eine jede Fläche, die eine infinitesimale Verschiebung in sich von der früher besprochenen

*) v. Mangoldt und Weingarten zeigten neuerdings, dass von den Christoffel'schen Classen nur die allgemeine und diejenige, welche den Flächen constanter Krümmung entspricht, existiren. Siehe Berichte der Freiburger Gesellschaft, bez. der Berliner Akademie von 1882. [Juni 1882.]

**) Diese Sätze stehen, wie ich später zeige, im Zusammenhange mit Jacobi's und Liouville's berühmten Untersuchungen über geodätische Curven.

Art gestattet. In der vierten Note behandle ich die Frage nach der Form des Bogenelementes

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$$

einer jeden Fläche, deren geodätische Curven durch eine Gleichung gegebener Form

$$\Omega(u\,v\,a\,b) = 0$$

bestimmt werden. Ich zeige, das eine solche Frage im Allgemeinen durch Differentiation, und jedenfalls durch Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen erledigt werden kann. Endlich in der fünften Note bestimme ich alle *Minimalflächen*, die eine infinitesimale Verschiebung der besprochenen Art in sich gestatten. Ausser der von Bour entdeckten Minimalflächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind, finde ich nur die von mir bei einer früheren Gelegenheit besprochenen Minimalflächen, die unendlich oft mit sich selbst ähnlich sind.

Die in der nachstehenden Abhandlung entwickelten Theorien stehen im genauen Zusammenhange mit meinen Untersuchungen über Transformationsgruppen (Math. Ann. Bd. XVI), die ich indess bei der Redaction dieser Arbeit nicht als bekannt vorausgesetzt habe. Nur in meiner dritten Note habe ich es als zweckmässig erachtet, mich auf die soeben citirte Arbeit zu beziehen.*)

Der Zweck dieser Abhandlung ist einerseits, die Theorie der geodätischen Curven zu fördern, andererseits an einem einfachen und wichtigen Beispiele eine allgemeine Untersuchungsmethode zu entwickeln, die sicher mit Erfolg auf viele Classen von Differentialgleichungen angewandt werden kann. Wenn ich im Uebrigen die zu Grunde liegenden Ideen in meiner Darstellung nicht stärker hervortreten lasse, so ist die Ursache nur die, dass ich das Verständniss meiner Arbeit nicht zu erschweren wagte.

---

*) In der Abhandlung: „Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven," die im Anfange des Jahres 1879 in Christiania als Universitätsprogramm erschien, habe ich schon verwandte Untersuchungen über geodätische Curven veröffentlicht. Der Unterschied zwischen jener und meiner jetzigen Arbeit liegt einerseits darin, dass letztere mehrere neue Resultate enthält, indem u. A. die erste, dritte, vierte und fünfte Note neu sind, dann aber darin, dass meine neue Arbeit einen wesentlich elementaren Charakter besitzt, insofern ich eine selbständige und einfache Begründung einiger Hülfssätze gebe, die ich in meinem Universitätsprogramm aus meiner Theorie der Transformationsgruppen entlehnt hatte.

§ 1.

Ueber Differentialgleichungen, die infinitesimale Transformationen gestatten.

1. Die Operation, bei der das Grössensystem xy in das infinitesimal benachbarte System:

$$x + \delta x = x + \xi(xy)\,\delta t, \quad y + \delta y = y + \eta(xy)\,\delta t$$

übergeführt wird, nenne ich *eine infinitesimale Transformation der Grössen $x\,y$*, und als Symbol derselben benutze ich die Gleichungen:

$$\delta x = \xi(xy)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t.$$

Betrachten wir x und y als Gaussische Coordinaten der Punkte einer Fläche, so besteht die infinitesimale Transformation, wie wir sagen können, in einer *infinitesimalen Verschiebung der Fläche in sich*, bei der alle Punkte x, y die infinitesimalen Strecken $\delta x, \delta y$ durchlaufen. Jede auf der Fläche gelegene Curve erhält eine neue Lage, indem sie in eine benachbarte Curve derselben Fläche übergeht, und hierbei wird im Allgemeinen die Bogenlänge der betreffenden Curve geändert. *Die infinitesimale Verschiebung der Fläche in sich ist daher im Allgemeinen mit einer Dehnung verbunden.*

Bei dem ersten Lesen der folgenden Entwickelungen dieses Paragraphen ist es möglicherweise zweckmässig, die Grössen x und y als Cartesische Coordinaten eines Punktes in einer *Ebene* aufzufassen, unsere Betrachtungen bleiben indess noch gültig, wenn wir die allgemeinere geometrische Interpretation anwenden und $x\,y$ überhaupt als Gaussische Coordinaten der Punkte einer beliebigen Fläche betrachten.

Zwei einander im Punkte x, y berührende Curven gehen bei der infinitesimalen Transformation

$$\delta x = \xi(xy)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t$$

in zwei benachbarte Curven über, die sich ebenfalls berühren. Bei der Transformation geht daher jedes Linienelement $[x, y, y']$, wo

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

gesetzt ist, in ein benachbartes Linienelement $x + \delta x,\ y + \delta y$ $y' + \delta y'$ über. Wir müssen das Increment $\delta y'$ berechnen. Es ist:

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,\dfrac{\delta dy}{\delta t} - dy\,\dfrac{\delta dx}{\delta t}}{dx^2},$$

woraus durch Vertauschung der Symbole δ und d:

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dx \cdot d\,\dfrac{\delta y}{\delta t} - dy \cdot d\,\dfrac{\delta x}{\delta t}}{dx^2} = \frac{dx \cdot d\eta - dy \cdot d\xi}{dx^2}$$

und durch Ausführung

$$(1) \qquad \frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{d\eta}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2\frac{d\xi}{dy} = \zeta.$$

2. Wir wollen jetzt eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \psi(xy)$$

mit ihren einfach unendlich vielen Integralcurven betrachten. *Diese Gleichung gestattet*, sagen wir, *die infinitesimale Transformation*

$$\delta x = \xi(xy)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t,$$

wenn jede Integralcurve durch die Transformation in eine infinitesimal benachbarte Integralcurve übergeführt wird. Hierzu ist nothwendig und hinreichend*), dass jedes Werthsystem $x\ y\ y'$, das die Gleichung $y' = \psi(xy)$ erfüllt, durch die infinitesimale Transformation in ein benachbartes Werthsystem $x + \delta x,\ y + \delta y,\ y' + \delta y'$ übergeführt wird, das ebenfalls die Gleichung $y' = \psi$ befriedigt, dass also die Gleichung

$$y' + \delta y' = \psi(x + \delta x, y + \delta y)$$

durch die Substitution

$$\delta x = \xi\delta t, \quad \delta y = \eta\delta t, \quad \delta y' = \zeta\delta t,$$

und übrigens die Relation:

$$y' = \psi(xy)$$

in eine Identität umgewandelt wird. Unser Verlangen führt somit auf die Bedingungsgleichung

$$(2) \qquad \frac{d\eta}{dx} + \psi\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - \psi^2\frac{d\xi}{dy} = \frac{d\psi}{dx}\xi + \frac{d\psi}{dy}\eta,$$

so dass wir den folgenden Satz aussprechen können:

Satz. *Soll die Differentialgleichung $y' = \psi(xy)$ die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ gestatten, so ist hierzu nothwendig und hinreichend, dass die Relation* (2) *identisch stattfindet.*

Um der soeben gefundenen Bedingungsgleichung eine elegantere und zweckmässigere Form zu geben, substituiren wir:

$$\frac{df}{dx} + \psi\frac{df}{dy} = A(f),$$

$$\xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy} = B(f)$$

und ersetzen unsere Gleichung sodann durch Einführung einer Hülfsgrösse $\lambda(xy)$ durch die vereinigten Gleichungen:

$$\frac{d\xi}{dx} + \psi\frac{d\xi}{dy} = A(\xi) = \lambda,$$

*) Mehr eingehend behandelte ich diese Theorie in den Mathem. Annalen Bd. XI, p. 487 ff.

$$\frac{d\eta}{dx} + \psi \frac{d\eta}{dy} - \xi \frac{d\psi}{dx} - \eta \frac{d\psi}{dy} = A(\eta) - B(\psi) = \lambda \cdot \psi,$$

die sich wiederum in die einzige Relation:

$$A\big(B(f)\big) - B\big(A(f)\big) = \lambda\, A(f)$$

zusammenziehen lassen. Dies giebt

Satz 2. *Soll die Differentialgleichung* $y' = \psi(xy)$ *die infinitesimale Transformation* $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$ *gestatten, so ist, wenn wir*

$$\frac{df}{dx} + \psi \frac{df}{dy} = A(f), \qquad \xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} = B(f)$$

setzen, nothwendig und hinreichend, dass eine Bedingungsgleichung der Form

$$A\big(B(f)\big) - B\big(A(f)\big) = \lambda(xy)\, A(f)$$

stattfindet.

3. Führen wir nunmehr die infinitesimale Transformation

$$\delta x = \xi(xy)\, \delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\, \delta t$$

aus auf beliebig vielen Curven, die drei consecutive Punkte gemein haben, so erhalten wir benachbarte Curven, die ebenfalls drei consecutive Punkte gemein haben. Bei unserer infinitesimalen Transformation erhält daher die Grösse

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

einen infinitesimalen Zuwachs $\delta y''$, der nur von x, y, y', y'' und δt abhängt. Wir werden $\delta y''$ berechnen. Es ist:

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t} \frac{dy'}{dx} = \frac{dx \frac{\delta}{\delta t} dy' - dy' \frac{\delta}{\delta t} dx}{dx^2},$$

oder durch Vertauschung der Symbole d und δ:

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = \frac{dx \cdot d \frac{\delta y'}{\delta t} - dy' \cdot d \frac{\delta x}{\delta t}}{dx^2} = \frac{dx \cdot d\xi - dy' \cdot d\xi}{dx^2};$$

und durch Ausführung, — indem man sich erinnert, dass die Grösse $\zeta = \frac{\delta y'}{\delta t}$ eine Function von x, y, y' ist, während ξ und η nur von x und y abhängen, —

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = \Big(\frac{d\eta}{dy} - 2\frac{d\xi}{dx} - 3y' \frac{d\xi}{dy}\Big) y'' + \frac{d\zeta}{dy} y' + \frac{d\zeta}{dx} = \vartheta.$$

Ich will jetzt eine beliebige Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \psi(x\, y\, y')$$

mit ihren zweifach unendlich vielen Integralcurven betrachten. *Wir sagen, dass diese Differentialgleichung die infinitesimale Transformation* $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$ *gestattet, wenn jede Integralcurve durch die Trans-*

formation in eine benachbarte Integralcurve oder auch in sich selbst übergeführt wird. Hierzu ist erforderlich und hinreichend, dass jedes Werthsystem x, y, y', y'', das die Gleichung $y'' = \psi(xyy')$ erfüllt, durch die infinitesimale Transformation in ein benachbartes Werthsystem $x + \delta x, \cdots, y'' + \delta y''$ übergeführt wird, das ebenfalls die Gleichung $y'' = \psi$ befriedigt, dass also die Gleichung:

$$y'' + \delta y'' = \psi(x + \delta x,\ y + \delta y,\ y' + \delta y')$$

durch die successsive Ausführung der beiden Substitutionen

$$\delta x = \xi \delta t, \quad \delta y = \eta \delta t, \quad \delta y' = \zeta \delta t, \quad \delta y'' = \vartheta \cdot \delta t$$

und

$$y'' = \psi(x\, y\, y')$$

in eine Identität umgewandelt wird. Unser Verlangen führt somit auf die Relation:

$$(3)\quad \left(\frac{d\eta}{dy} - 2\frac{d\xi}{dx} - 3y'\frac{d\xi}{dy}\right)\psi + \frac{d\zeta}{dy}y' + \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\psi}{dx}\xi + \frac{d\psi}{dy}\eta + \frac{d\psi}{dy'}\zeta,$$

sodass wir den folgenden Satz aufstellen können:

Satz 3. *Soll eine Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \psi(xyy')$ die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ gestatten, so ist erforderlich und hinreichend, dass die Bedingungsgleichung* (3) *identisch stattfindet.*

Setzen wir

$$\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + \psi\frac{df}{dy'} = A'(f),$$

$$\xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy} + \zeta\frac{df}{dy'} = B'(f),$$

so kann Gleichung (3), wie jetzt gezeigt werden soll, auf die einfache Form

$$A'\big(B'(f)\big) - B'\big(A'(f)\big) = \lambda(x, y, y')\, A'f,$$

wo λ eine arbiträre Function von x, y, y' bezeichnet, gebracht werden. Die letzte Gleichung zerlegt sich nämlich in die drei folgenden

$$(3')\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} + y'\dfrac{d\xi}{dy} = \lambda, \\ \dfrac{d\eta}{dx} + y'\dfrac{d\eta}{dy} - \zeta = \lambda y', \\ \dfrac{d\zeta}{dx} + y'\dfrac{d\zeta}{dy} + \psi\dfrac{d\zeta}{dy'} - \xi\dfrac{d\psi}{dx} - \eta\dfrac{d\psi}{dy} - \zeta\dfrac{d\psi}{dy'} = \lambda\psi, \end{cases}$$

unter denen die erste die Grösse λ bestimmt, die zweite durch Substitution der Werthe von λ (und ζ) in eine Identität übergeht, und endlich die dritte sich durch dieselbe Substitution in die Bedingungsgleichung (3) verwandelt. Unser Satz 3 kann somit folgendermassen ausgesprochen werden:

Satz 4. *Soll die Differentialgleichung* $y'' = \psi(x\,y\,y')$ *die infinitesimale Transformation* $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ *gestatten, so ist, wenn wir*

$$\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + \psi\frac{df}{dy'} = A'f,$$

$$\xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy} + \zeta\frac{df}{dy'} = B'f$$

setzen, erforderlich und hinreichend, dass eine Relation der Form

$$A'\big(B'(f)\big) - B'\big(A'(f)\big) = \lambda(x\,y\,y')\,A'f$$

identisch stattfindet.

Anstatt zu sagen, dass eine Differentialgleichung $y'' = \psi(x\,y\,y')$ eine gewisse infinitesimale Transformation gestattet, ist es, wie ich beiläufig bemerke, zuweilen zweckmässiger zu sagen, *dass die Integralcurven jene Transformation gestatten.*

Zu bemerken ist ebenfalls, dass eine Reihe infinitesimaler Transformationen

$$\delta x = \xi_1\delta t,\ \delta y = \eta_1\delta t;\ \cdots\ \delta x = \xi_r\delta t,\ \delta y = \eta_r\delta t$$

als *unabhängig* aufzufassen sind, wenn es unmöglich ist, r solche Constanten $c_1\,c_2\cdots c_r$ aufzufinden, dass die beiden Relationen

$$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_r\xi_r = 0,$$
$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_r\eta_r = 0$$

gleichzeitig identisch bestehen.

Abschnitt I.

Formulirung zweier allgemeiner Probleme und Zerlegung derselben.

4. Die geodätischen Curven einer beliebigen Fläche sind die Integralcurven einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \psi(x\,y\,y')$$

zwischen den Gaussischen Punktcoordinaten $x\,y$ der Fläche. Eine infinitesimale Verschiebung der Fläche in sich findet in der eingeführten Terminologie ihren analytischen Ausdruck in einer infinitesimalen Transformation $\delta x = \xi\delta t$, $\delta y = \eta\delta t$ der Grössen x und y. Wird nun bei einer solchen infinitesimalen Verschiebung einer Fläche in sich jede geodätische Curve in eine benachbarte geodätische Curve derselben Fläche übergeführt, so heisst dies in der eingeführten Terminologie, dass die Differentialgleichung $y'' = \psi$ der geodätischen Curven die betreffende infinitesimale Transformation gestattet, oder anders ausgesprochen, dass die geodätischen Curven unserer Fläche jene Transformation gestatten. Die Aufgabe die Form des Bogenelementes einer

jeden Fläche zu finden, die eine infinitesimale Verschiebung in sich zulässt, bei der jede geodätische Curve der Fläche in eine ebensolche Curve übergeht, lässt sich hiernach auch folgendermassen formuliren:

Problem I. *Es wird verlangt, die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Curven eine infinitesimale Transformation gestatten.*

Dieses Problem zerlegt sich, wie wir am Schlusse dieses Paragraphen zeigen, naturgemäss in drei Unterprobleme. Denken wir uns das Bogenelement der gesuchten Fläche, wie bekanntlich erlaubt, auf die Form

$$ds^2 = \Phi(x\,y)\,dx\,dy$$

gebracht, so werden die betreffenden Unterprobleme charakterisirt durch die hinzutretende Forderung, dass unter den Grössen

$$\frac{d\xi}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{dx}$$

keine, eine oder *beide* verschwinden sollen.

Die Bemerkung, dass es Flächen giebt z. B. die Flächen constanter Krümmung, die *mehrere* infinitesimale Verschiebungen in sich gestatten, bei denen geodätische Curven in ebensolche Curven übergehen, führt uns zur Aufstellung des folgenden allgemeinen Problems:

Problem II. *Man soll die Form des Bogenelementes einer jeden Fläche bestimmen, deren geodätische Curven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.*

Auch dieses Problem zerlegt sich naturgemäss in eine Reihe von Unterproblemen, die wir successive in den Paragraphen 5—8 behandeln werden.

5. Indem wir jetzt das Problem I angreifen, müssen wir zunächst nach Gauss die Differentialgleichung der geodätischen Curven einer Fläche aufstellen. Dabei ist es zweckmässig nach Liouvilles*) Vorgange das Bogenelement der betreffenden Fläche auf die Form

$$ds = \sqrt{F(x\,y)\,dy\,dx} = \sqrt{F\cdot y'}\,dx$$

gebracht zu denken. Dann sind die geodätischen Curven bekanntlich bestimmt durch die Gleichung

$$\delta \int \sqrt{F\cdot y'}\,dx = 0$$

oder durch die äquivalente Differentialgleichung

$$\frac{d(\sqrt{F}\sqrt{y'})}{dy} - \frac{d}{dx}\,\frac{d(\sqrt{F}\sqrt{y'})}{dy'} = 0,$$

die durch Ausführung die Form

*) Siehe Liouville's Ausgabe von Monge's: Application de l'analyse à la géométrie, Paris 1850, p. 571.

$$y'' = \frac{d \log F}{dx} y' - \frac{d \log F}{dy} y'^2$$

annimmt. Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, setzen wir

$$\log F = w,$$

und also wird

$$ds = e^{\frac{w}{2}} \sqrt{y'}\, dx$$

unsere Form des Bogenelements und

$$y'' = \frac{dw}{dx} y' - \frac{dw}{dy} y'^2$$

die entsprechende Form der Differentialgleichung der geodätischen Curven.

6. Sollen daher die geodätischen Curven einer Fläche, deren Bogenelement durch die Gleichung

$$ds^2 = e^w\, dx\, dy$$

bestimmt wird, die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi(x\,y)\,\delta t$, $\delta y = \eta(x\,y)\,\delta t$ gestatten, so ist, wenn wir wie früher in Gleichung (1)

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{d\eta}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2 \frac{d\xi}{dy} = \zeta$$

und

$$y'' = \frac{dw}{dx} y' - \frac{dw}{dy} y'^2 = \psi$$

setzen, hierzu erforderlich und hinreichend (Satz 3), dass die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{d\eta}{dy} - 2\frac{d\xi}{dx} - 3y'\frac{d\xi}{dy}\right)\psi + \frac{d\zeta}{dy} y' + \frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\psi}{dx}\xi + \frac{d\psi}{dy}\eta + \frac{d\psi}{dy'}\zeta$$

oder die äquivalente

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{d^2\eta}{dx^2} + y'\left(2\frac{d^2\eta}{dx\,dy} - \frac{d^2\xi}{dx^2}\right) + y'^2\left(\frac{d^2\eta}{dy^2} - 2\frac{d^2\xi}{dx\,dy}\right) - y'^3\frac{d^2\xi}{dy^2} \\ & + \left(\frac{d\eta}{dy} - 2\frac{d\xi}{dx} - 3y'\frac{d\xi}{dy}\right)\left(y'\frac{dw}{dx} - y'^2\frac{dw}{dy}\right) - \xi\left(y'\frac{d^2w}{dx^2} - y'^2\frac{d^2w}{dx\,dy}\right) \\ & - \eta\left(y'\frac{d^2w}{dx\,dy} - y'^2\frac{d^2w}{dy^2}\right) - \left(\frac{d\eta}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2\frac{d\xi}{dy}\right)\left(\frac{dw}{dx} - 2y'\frac{dw}{dy}\right) \end{aligned}$$

identisch stattfindet. Da ξ, η und w nur von x und y abhängen, zerlegt sich die letzte Gleichung in die vier folgenden

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{dx^2} - \dfrac{d\eta}{dx}\dfrac{dw}{dx} = 0, \\ -\dfrac{d^2\xi}{dy^2} + \dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{dw}{dy} = 0, \\ 2\dfrac{d^2\eta}{dx\,dy} - \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - \xi\dfrac{d^2w}{dx^2} - \eta\dfrac{d^2w}{dx\,dy} + 2\dfrac{d\eta}{dx}\dfrac{dw}{dy} - \dfrac{d\xi}{dx}\dfrac{dw}{dx} = 0, \\ -2\dfrac{d^2\xi}{dx\,dy} + \dfrac{d^2\eta}{dy^2} + \xi\dfrac{d^2w}{dx\,dy} + \eta\dfrac{d^2w}{dy^2} - 2\dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy}\dfrac{dw}{dy} = 0, \end{cases}$$

mit deren allgemeiner Integration wir uns jetzt beschäftigen werden.

Die Behandlungsweise dieser 4 Relationen wird eine wesentlich verschiedene, jenachdem die beiden Grössen

$$\frac{d\xi}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{d\eta}{dx}$$

verschwinden oder von Null verschieden sind. Im nächsten Paragraphen erledigen wir den anscheinend speciellen Fall, der sich jedoch als der allgemeinste Fall ergiebt, dass

$$\frac{d\xi}{dy} = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = 0$$

ist. Da $x = \text{Const.}$ und $y = \text{Const.}$ die beiden Integralgleichungen von $ds^2 = 0$ sind, so kann dieser Fall dadurch charakterisirt werden, dass die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$ eine *conforme* ist.

In § 3. erledigen wir sodann den Fall, dass die eine der beiden Grössen $\frac{d\xi}{dy}$, $\frac{d\eta}{dx}$ gleich Null, die zweite von Null verschieden ist. Und endlich in § 4. setzen wir voraus, dass diese beiden Grössen von Null verschieden sind.

Sollen die geodätischen Curven einer Fläche mehrere, etwa r, infinitesimale Transformationen

$$\delta x = \xi_i \delta t, \quad \delta y = \eta_i \delta t \quad (i = 1, 2 \cdots r)$$

gestatten, so muss die Zahl r, wie wir später zeigen, gleich 2, 3 oder 8 sein. Dabei können eine Reihe von Unterfällen eintreten, jenachdem die $2r$ Grössen

$$\frac{d\xi_i}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{d\eta_i}{dx}$$

gleich Null oder theilweise von Null verschieden sind. Wir geben später eine rationelle und einfache Methode zur erschöpfenden Bestimmung aller möglichen Fälle.

§ 2.

Flächen, deren geodätische Curven eine conforme infinitesimale Transformation gestatten.

7. Bei der allgemeinen Integration der Gleichungen (4) erledigen wir zuerst und zwar in diesem Paragraphen den interessanten Fall, dass

$$\frac{d\xi}{dy} = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = 0$$

ist, und dass in Folge dessen die infinitesimale Transformation der geodätischen Curven unserer Fläche eine *conforme* ist. In diesem Falle sind die beiden ersten Gleichungen des Systems (4) an sich

identisch erfüllt, während die beiden letzten in die folgenden übergehen:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \xi \frac{d^2w}{dx^2} + \eta \frac{d^2w}{dx\,dy} + \frac{dw}{dx}\frac{d\xi}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dy^2} + \xi \frac{d^2w}{dx\,dy} + \eta \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{dw}{dy}\frac{d\eta}{dy} = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch folgendermassen schreiben

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dx} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d\eta}{dy} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy}\right) = 0,$$

und somit kommt durch Integration

$$(5) \qquad \begin{cases} \frac{d\xi}{dx} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} = \varphi(y), \\ \frac{d\eta}{dy} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} = f(x), \end{cases}$$

und durch Subtraction

$$\frac{d\xi}{dx} + f(x) = \frac{d\eta}{dy} + \varphi(y) = B = \text{Const.},$$

sodass die Gleichungen (5) sich durch die einzige Gleichung

$$(6) \qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} = B$$

ersetzen lassen.

Hier können wiederum verschiedene Fälle eintreten, indem ξ und η entweder gleich Null oder von Null verschieden sein werden.

Sind sowohl ξ wie η von Null verschieden, so führen wir statt x und y zwei Functionen dieser Grössen: $x'(x)$ und $y'(y)$ als unabhängige Variable ein. Alsdann wird

$$\frac{\delta x'}{\delta t} = \frac{dx'}{dx}\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{dx'}{dx}\xi = \xi',$$

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dy'}{dy}\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{dy'}{dy}\eta = \eta';$$

setzt man daher

$$dx' = \frac{dx}{\xi}, \quad dy' = \frac{dy}{\eta},$$

so wird $\xi' = 1$ und ebenfalls $\eta' = 1$. In den Gleichungen (5) und (6) können wir daher ohne wesentliche Beschränkung

$$\xi = 1, \quad \eta = 1$$

annehmen. Dies giebt

$$\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dy} = \varphi(y) = f(x) = a = \text{Const.}$$

und

$$(7)\qquad \begin{aligned} w &= \varrho(x-y) + ax, \\ e^w &= e^{ax}\Phi(x-y), \end{aligned}$$

womit der Fall, dass sowohl ξ wie η von Null verschieden sind, erledigt ist.

Da ξ uud η nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, indem sonst unsere infinitesimale Transformation alle Punkte der Fläche invariant liesse, so ist nur noch der Fall zu behandeln, dass die eine der Grössen ξ und η verschwindet, während die zweite von Null verschieden ist. Sei z. B.

$$\xi = 0, \quad \eta \gtrless 0.$$

Alsdann können wir immer durch Einführung einer zweckmässigen Function von y als neues y erreichen, dass $\eta = 1$ wird. In diesem Falle geben die Gleichungen (5)

$$\frac{dw}{dy} = \varphi(y) = f(x) = a$$

und

$$w = ay + X(x); \quad e^w = Y(y)\,X_1(x),$$

so dass die entsprechende Fläche, deren Bogenelement die Form

$$ds^2 = Y(y)\,X_1(x)\,dy\,dx$$

besitzt, developpabel sein muss und somit ein specieller Fall der durch (7) bestimmten Flächen ist.

Wir erhalten somit den Satz:

Satz 5. *Sollen die geodätischen Curven einer Fläche eine conforme infinitesimale Transformation gestatten, so ist es erforderlich und hinreichend, dass ihr Bogenelement die Form*

$$ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dy\,dx$$

wo a eine beliebige Constante, Φ eine arbiträre Function von $x-y$ bezeichnet, erhalten kann.

8. Die Gleichung (6) ist einer eleganten geometrischen Interpretation fähig, wie jetzt gezeigt werden soll.

Wir führen unsere infinitesimale Transformation auf die Gleichung

$$ds^2 = e^w\,dx\,dy$$

aus, indem wir die Relation

$$\frac{\delta}{\delta t}(ds^2) = \frac{\delta}{\delta t}(e^w\,dx\,dy)$$

bilden. Nun aber ist

$$\frac{\delta}{\delta t}(dx\,dy) = d\frac{\delta x}{\delta t}\,dy + d\frac{\delta y}{\delta t}\,dx = d\xi\,dy + d\eta\,dx,$$

und also kommt

$$\frac{\delta}{\delta t}(ds^2) = e^w\,dx\,dy\left(\frac{dw}{dx}\,\xi + \frac{dw}{dy}\,\eta + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right)$$

oder (6):

$$\frac{\delta}{\delta t} ds^2 = B ds^2$$

oder endlich

$$\frac{\delta}{\delta t} (ds) = \frac{B}{2} ds,$$

was sich folgendermassen aussprechen lässt:

Satz 6. *Gestatten die geodätischen Curven einer Fläche eine conforme infinitesimale Transformation, so werden die Bogenlängen aller auf der Fläche gelegenen Curven bei dieser Transformation nach constantem Verhältnisse geändert.**)

Wir wollen jetzt

$$B = 0$$

setzen, was darauf hinauskommt, dass unsere Fläche eine Verschiebung in sich *ohne Dehnung* gestatten soll, und überdiess, indem wir von den developpablen Flächen absehen, die Variablen x und y derart wählen, dass $\xi = 1$, $\eta = 1$ wird. Alsdann ist (7)

$$e^w = e^{ax} \Phi(x - y)$$

und (6)

$$0 = B = \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dy} = a,$$

so dass unser Bogenelement die für alle auf Rotationsflächen abwickelbare Flächen charakteristische Form

$$ds^2 = \Phi(x - y)\, dx\, dy$$

besitzen muss. Dies giebt den folgenden Satz (siehe Bour's Abhandlung im Journal de l'école pol. t. XXII, p. 79):

Satz 7. *Sollen die geodätischen Curven einer Fläche eine infinitesimale Transformation gestatten, die von keiner Dehnung begleitet ist, so muss die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar sein.***)

---

*) Der im Texte aufgestellte Satz lässt sich leicht als Corollar aus einem von Dini angegebenen Satze (Ann. di matem. S. 2, Bd. 3, p. 276) herleiten. Derselbe wird folgendermassen synthetisch erwiesen, und gleichzeitig auf n Dimensionen erweitert. Durch unsere (inf.) Transformation werden alle durch einen Punkt gehenden geodätischen Curven in eine ebensolche Curvenschaar übergeführt. Und da die Transformation conform sein soll, so geht jeder geodätische Kreis, der die vorgelegte Curvenschaar orthogonal schneidet, in einen geodätischen Kreis über. Hiermit ist unsere Behauptung erwiesen, und man erkennt nicht allein, dass unser Satz sich auf n Dimensionen erweitert, sondern zugleich, dass dies der Fall bleibt, wenn man das Wort „infinitesimale" weglässt. *Kann daher eine Fläche eines n-fach ausgedehnten Raumes derart auf sich selbst (oder auf eine andere Fläche dieses Raumes) abgebildet werden, dass geodätische Curven in ebensolche Curven übergehen, und ist dabei diese Abbildung conform, so werden alle Bogenlängen nach constantem Verhältnisse geändert.*

**) Kann eine Fläche in sich ohne Dehnung verschoben werden, so ist sie abwickelbar auf eine Rotationsfläche. Aus diesem längst bekannten Satze folgt der Satz des Textes natürlich unmittelbar als Corollar.

9. In früheren Arbeiten (z. B. Math. Ann. Bd. V, p. 204, 1872) beschäftigte ich mich gelegentlich mit Flächen, die in unendlich vielen Weisen mit sich selbst ähnlich sind. Diese Flächen lassen sich auch dadurch charakterisiren, dass sie eine infinitesimale Transformation gestatten, die gleichzeitig linear und conform ist. Ich fand, dass nicht allein die Haupttangentencurven*), sondern auch die Krümmungslinien derselben durch Quadratur bestimmt werden können. Ich zeigte ferner, dass die Bestimmung der geodätischen Curven dieser Flächen nur die Integration einer Differentialgleichung *erster* Ordnung verlangt.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass die geodätischen Curven einer jeden Fläche, die auf eine Fläche der besprochenen Art abwickelbar ist, eine conforme infinitesimale Transformation gestattet. Daher besitzt ihr Bogenelement die Form

$$ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy.$$

Andererseits ist auch nicht schwer zu erkennen, dass jede Fläche, deren Bogenelement diese Form besitzt, auf eine andere abwickelbar ist, die in unendlich vielen Weisen mit sich selbst ähnlich ist. Diesen letzten Satz gab zuerst Herr M. Levy in einer interessanten Note in den Comptes rendus der Pariser Akademie vom 18. November 1878.*)

§ 3.

Die zweite Flächenclasse, deren geodätische Curven eine infinitesimale Transformation gestatten.

Wir bestimmen jetzt die Form des Bogenelementes

$$ds^2 = e^w dx\,dy$$

einer jeden Fläche, deren geodätische Curven eine infinitesimale Transformation der Form

$$\delta x = \xi(x)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t$$

gestatten, wobei wir ausdrücklich festsetzen, dass $\frac{d\eta}{dx}$ von Null verschieden sein soll. Durch Einführung einer zweckmässigen Function $x'(x)$ als neues x und einer zweckmässigen Grösse $y'(y)$ als neues y

*) Vergleiche hierzu Klein's und meine gemeinsame Abhandlung im vierten Bande p. 84 dieser Zeitschrift.

*) In einer anderen Note in den Comptes rendus (t. LXXXVI, p. 463—466) lehrt Herr Levy zu entscheiden, ob eine quadratische Form von n Differentialen dx_i, deren Coefficienten Functionen der Variablen x_i sind, durch Transformation in eine andere solche Form übergehen kann, deren Coefficienten nur noch $n-k$ Variable enthalten. Sein hierauf bezüglicher Satz hängt genau zusammen mit einem allgemeinen Theoreme über permutable inf. Transformationen in meiner Theorie der Transformationsgruppen. Das betreffende Theorem deutete ich 1872 in den Verh. d. Gesellschaft d. W. zu Christiania an.

erreichen wir, dass die unbekannte Function e^w keine arbiträre Function, sondern nur gewisse arbiträre Constante enthält.

10. Die Bedingungsgleichungen (4) reduciren sich unter den gemachten Voraussetzungen auf die drei Gleichungen

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{dx^2} - \dfrac{dw}{dx}\dfrac{d\eta}{dx} = 0, \\ 2\dfrac{d^2\eta}{dxdy} - \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - \xi\dfrac{d^2w}{dx^2} - \eta\dfrac{d^2w}{dxdy} + 2\dfrac{dw}{dy}\dfrac{d\eta}{dx} - \dfrac{dw}{dx}\dfrac{d\xi}{dx} = 0, \\ \dfrac{d^2\eta}{dy^2} + \xi\dfrac{d^2w}{dxdy} + \eta\dfrac{d^2w}{dy^2} + \dfrac{dw}{dy}\dfrac{d\eta}{dy} = 0. \end{cases}$$

Die erste giebt durch Integration

$$(10)\qquad Y(y)\frac{d\eta}{dx} = e^w,$$

wo Y eine von Null verschiedene Function von y bezeichnet.

Ebenfalls giebt die dritte Gleichung des Systems (9):

$$\frac{d\eta}{dy} + \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} = f(x),$$

wo $f(x)$ eine gewisse Function von x bezeichnet. Um die zweite Gleichung (9) zu integriren, bringen wir sie auf die Form

$$\frac{d}{dx}\left\{2\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy}\right\} + 3\frac{dw}{dy}\frac{d\eta}{dx} = 0.$$

Nun aber giebt Gleichung (10):

$$Y'\frac{d\eta}{dx} + Y\frac{d^2\eta}{dxdy} = e^w\frac{dw}{dy} = Y\frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dy}.$$

Also kommt:

$$\frac{d}{dx}\left\{5\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy} + 3\frac{Y'}{Y}\eta\right\} = 0,$$

und durch Integration:

$$(11)\qquad 5\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy} + 3\frac{Y'}{Y}\eta = \varphi(y),$$

wo φ von x unabhängig ist.

Es ist möglich eine solche Grösse $y'(y)$ als neues y einzuführen, dass Y gleich 1 wird. Es ist in der That

$$c^w = c^{w'}\frac{dy'}{dy},$$
$$\frac{\delta y}{\delta t} = \eta = \frac{dy}{dy'}\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dy}{dy'}\eta',$$
$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx},$$

und also kommt (10)

$$Y\frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx} = e^{w'}\frac{dy'}{dy},$$

oder

$$Y\left(\frac{dy}{dy'}\right)^2\frac{d\eta'}{dx} = e^{w'}.$$

Bestimmen wir daher y' durch Integration der Gleichung

$$dy' = \sqrt{Y(y)}\,dy, \tag{12}$$

so kommt

$$\frac{d\eta'}{dx} = e^{w'}.$$

Hieraus folgt ohne weitere Rechnung, dass man in den Gleichungen (10) und (11) ohne wesentliche Beschränkung $Y = 1$ setzen kann. Also wird die gesuchte Flächenclasse bestimmt durch die drei Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dx} = e^{w}, \\ \dfrac{d\eta}{dy} + \xi\dfrac{dw}{dx} + \eta\dfrac{dw}{dy} = f(x), \\ 5\dfrac{d\eta}{dy} - \dfrac{d\xi}{dx} - \xi\dfrac{dw}{dx} - \eta\dfrac{dw}{dy} = \varphi(y) = \pi'(y), \end{cases} \tag{13}$$

die wir noch einmal integriren werden.

11. Durch Addition der beiden letzten Gleichungen kommt

$$6\frac{d\eta}{dy} = f(x) + \frac{d\xi}{dx} + \pi'(y), \tag{14}$$

und durch Integration, indem wir ξ' statt $\frac{d\xi}{dx}$ schreiben:

$$\begin{cases} 6\eta = (f + \xi')\,y + \pi(y) + \mathbf{F}(x), \\ 6e^{w} = (f' + \xi'')y + \mathbf{F}'(x). \end{cases} \tag{15}$$

Nun aber ist (13, 2.)

$$\left(\frac{d\eta}{dy} - f\right)e^{w} + \xi\frac{d}{dx}e^{w} + \eta\frac{d}{dy}e^{w} = 0, \tag{16}$$

also kommt durch Einsetzung der Werthe von η und e^{w}:

$$\begin{aligned}(-5f + \xi' + \pi')\,[(f' + \xi'')\,y + \mathbf{F}'] + 6\xi\,[(f'' + \xi''')\,y + \mathbf{F}''] \\ + [(f + \xi')\,y + \pi + \mathbf{F}]\,(f' + \xi'') = 0,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\pi'[(f' + \xi'')\,y + \mathbf{F}'] + \pi(f' + \xi'') + (\xi' - 5f)\,[(f' + \xi'')\,y + \mathbf{F}'] \\ + 6\xi\,[f'' + \xi''')\,y + \mathbf{F}''] + [(f + \xi')\,y + \mathbf{F}]\,(f' + \xi'') = 0,\end{aligned}$$

oder endlich

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}\{\pi[(f' + \xi'')\,y + \mathbf{F}']\} + y[(2\xi' - 4f)\,(f' + \xi'') + 6\xi(f'' + \xi''')] \\ + \mathbf{F}'(\xi' - 5f) + 6\xi\mathbf{F}'' + \mathbf{F}(f' + \xi'') = 0,\end{aligned}$$

woraus durch Integration eine Gleichung der Form

$$\pi[(f' + \xi'')\, y + \mathbf{F}'] = y^2 \Phi_2(x) + y\Phi_1(x) + \Phi_0(x)$$

hervorgeht. Hieraus folgt, dass $\pi(y)$ jedenfalls die Form

$$\pi(y) = c_1 y + c_2 + \frac{c(x)}{(f' + \xi'')\, y + \mathbf{F}'}$$

besitzt. Dabei sind c_1 und c_2 Constante, während $c(x)$ entweder gleich Null ist oder auch zwei Relationen der Form

$$\frac{f' + \xi''}{c(x)} = \text{Const.} = L, \quad \frac{\mathbf{F}'}{c(x)} = M$$

erfüllt. Die Annahme, dass $c(x)$ von Null verschieden ist, giebt somit (15)

$$6e^w = c(x)\,(Ly + M),$$

was nur developpable Flächen liefert. Daher können wir, indem wir von den developpablen Flächen absehen,

$$(17) \qquad \begin{cases} \pi(y) = c_1 y + c_2, \\ 6\eta = y(f + \xi' + c_1) + \mathbf{F}(x) + c_2, \\ 6e^w = y(f' + \xi'') + \mathbf{F}', \end{cases}$$

setzen, und dabei annehmen, dass

$$f' + \xi'' \gtrless 0$$

ist. Ueberdies können wir durch Einführung einer zweckmässigen Function von x als neues x immer erreichen, dass

$$f + \xi' + c_1 = x, \quad f' + \xi'' = 1, \quad \pi(y) = cy.$$
$$6e^w = y + \mathbf{F}'(x), \quad 6\eta = yx + \mathbf{F}(x)$$

wird. Es handelt sich darum die Functionen $\mathbf{F}(x)$ zu bestimmen. Durch Einführung der gefundenen Werthe in (16) kommt die Gleichung

$$(6\xi' - 5x + 6c)\,(y + \mathbf{F}') + 6\xi\mathbf{F}'' + xy + \mathbf{F} = 0$$

die sich in die beiden

$$6\xi' = 4x - 6c, \quad -x\mathbf{F}' + 6\xi\mathbf{F}'' + \mathbf{F} = 0$$

zerlegt. Also wird

$$6\xi = 2x^2 - 6cx + \varkappa,$$

und $\mathbf{F}(x)$ wird bestimmt durch die lineare Differentialgleichung

$$(18) \qquad (2x^2 - 6cx + \varkappa)\,\mathbf{F}'' - x\mathbf{F}' + \mathbf{F} = 0,$$

die das particuläre Integral $\mathbf{F} = x$ besitzt. Da es für uns wesentlich nur auf die Bestimmung von $\mathbf{F}'(x)$ ankommt, differentiiren wir die letzte Gleichung und bilden so die unmittelbar integrable Gleichung

$$(19) \qquad (2x^2 - 6cx + \varkappa)\,\mathbf{F}''' + (3x - 6c)\,\mathbf{F}'' = 0.$$

Wir resumiren die vorangehenden Entwickelungen in folgendem Satze:

Satz 8. *Sollen die geodätischen Curven einer Fläche eine infinitesimale Transformation der Form*

$$\delta x = \xi(x)\,\delta t, \quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t, \quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$$

gestatten, so kann das Bogenelement der Fläche immer die Form

$$ds^2 = [y + \mathbf{F}'(x)]\,dx\,dy$$

erhalten. Dabei wird $\mathbf{F}'$ *bestimmt durch die integrable Differentialgleichung*

(18) $$(2x^2 - 6cx + \varkappa)\,\mathbf{F}'' - x\mathbf{F}' + \mathbf{F} = 0.$$

Die entsprechenden Werthe von ξ *und* η *sind*

(20) $$\xi = 2x^2 - 6cx + \varkappa, \quad \eta = xy + \mathbf{F}(x).$$

Die hiermit definirten Flächenfamilien enthalten grösstentheils nur *imaginäre* Flächen. Beschränkt man sich auf *reelle* Flächen, so erhält man, wie wir später zeigen, nur eine hierher gehörige Flächenfamilie, deren Bogenelement die Form

$$\left(y + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx\,dy,$$

oder die äquivalente Form

$$(yx + 1)\,dx\,dy$$

besitzt.

§ 4.

Ueber die dritte Classe von Flächen, deren geodätische Curven eine infinitesimale Transformation gestatten.

Jetzt suchen wir alle Flächen, deren geodätische Curven eine infinitesimale Transformation der Form

$$\delta x = \xi\,\delta t, \quad \delta y = \eta\,\delta t, \quad \frac{d\xi}{dy} \gtrless 0, \quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$$

gestatten. Ich zeige, dass man immer die Coordinaten x und y derart wählen kann, dass e^ω die Liouville'sche Form:

$$e^\omega = \psi(x + y) + \Psi(x - y)$$

annimmt. Dabei sind die Grössen ψ und Ψ, deren jede nur von einem Argumente abhängt, bestimmt durch gewöhnliche Differentialgleichungen, die ich allerdings nicht integrire, während es mir doch gelingt eine Reihe bemerkenswerther Lösungen derselben aufzufinden.

12. Die Bedingungsgleichungen (4):

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\eta}{dx^2} - \dfrac{d\eta}{dx}\dfrac{dw}{dx} = 0, \\ \dfrac{d^2\xi}{dy^2} - \dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{dw}{dy} = 0, \\ 2\dfrac{d^2\eta}{dx\,dy} - \dfrac{d^2\xi}{dx^2} - \xi\dfrac{d^2w}{dx^2} - \eta\dfrac{d^2w}{dx\,dy} + 2\dfrac{d\eta}{dx}\dfrac{dw}{dy} - \dfrac{d\xi}{dx}\dfrac{dw}{dx} = 0, \\ 2\dfrac{d^2\xi}{dy\,dx} - \dfrac{d^2\eta}{dy^2} - \xi\dfrac{d^2w}{dx\,dy} - \eta\dfrac{d^2w}{dy^2} + 2\dfrac{d\xi}{dy}\dfrac{dw}{dx} - \dfrac{d\eta}{dy}\dfrac{dw}{dx} = 0 \end{cases}$$

gestatten auch jetzt eine erste Integration. Die beiden ersten Gleichungen geben nämlich

$$(21)\qquad Y(y)\,\frac{d\eta}{dx} = e^w = X(x)\,\frac{d\xi}{dy},$$

wo X und Y, wie wir sogleich zeigen werden, ohne wesentliche Beschränkung gleich 1 gesetzt werden können.

Statt x und y führen wir neue unabhängige Variable $x'(x)$ und $y'(y)$ ein. Es ist

$$\xi = \frac{dx}{dx'}\frac{\delta x'}{\delta t} = \frac{dx}{dx'}\,\xi',$$

$$\eta = \frac{dy}{dy'}\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dy}{dy'}\,\eta';$$

also kommt:

$$X\frac{d\xi}{dy} = X\frac{dx}{dx'}\frac{d\xi'}{dy'}\frac{dy'}{dy}, \qquad Y\frac{d\eta}{dx} = Y\frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx'}\frac{dx'}{dx},$$

$$e^w = e^{w'}\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy},$$

und also nimmt Gleichung (21) die Form an:

$$X\frac{dx}{dx'}\frac{d\xi'}{dy'}\frac{dy'}{dy} = e^{w'}\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy} = Y\frac{dy}{dy'}\frac{d\eta'}{dx'}\frac{dx'}{dx}.$$

Wählt man daher die Grössen x' und y' derart, dass

$$(21')\qquad dx' = \sqrt{X}\,dx, \quad dy' = \sqrt{Y}\,dy,$$

so kommt

$$\frac{d\xi'}{dy'} = e^{w'} = \frac{d\eta'}{dx'}.$$

Daher können wir in (21) ohne wesentliche Beschränkung $X = 1 = Y$ setzen, woraus

$$(22)\qquad \frac{d\eta}{dx} = e^w = \frac{d\xi}{dy},$$

und durch Differentiation

$$\frac{d^2\eta}{dx\,dy} = e^w\frac{dw}{dy} = \frac{d\eta}{dx}\frac{dw}{dy}; \qquad \frac{d^2\xi}{dx\,dy} = e^w\frac{dw}{dx} = \frac{d\xi}{dy}\frac{dw}{dx}.$$

Hierdurch erhalten die beiden letzten Bedingungsgleichungen (4) die Form

$$\frac{d}{dx}\left\{5\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy}\right\} = 0,$$

$$\frac{d}{dy}\left\{5\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy}\right\} = 0,$$

woraus durch Integration:

$$(23)\qquad \begin{cases} 5\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy} = \lambda(y), \\ 5\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} - \xi\frac{dw}{dx} - \eta\frac{dw}{dy} = f(x). \end{cases}$$

Die vereinigten Gleichungen (22) und (23) sind äquivalent mit den Gleichungen (4).

Die Gleichungen (22) zeigen, dass wir

$$(23')\qquad \xi = \frac{dU}{dx}, \quad \eta = \frac{dU}{dy}, \quad e^w = -\frac{d^2U}{dx\,dy}$$

setzen können, und zwar ist hierdurch die Bestimmung unserer Flächenclasse zurückgeführt auf die Bestimmung der Function U. Durch Subtraction der Gleichungen (23) kommt:

$$6\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) = \lambda(y) - f(x)$$

oder

$$6\left(\frac{d^2U}{dy^2} - \frac{d^2U}{dx^2}\right) = \lambda(y) - f(x).$$

Folglich besitzt U die Form:

$$U = \varphi(x+y) + \Phi(x-y) + X(x) + Y(y)$$

und dabei ist:

$$(24)\qquad \begin{cases} \xi = \varphi' + \Phi' + X', \\ \eta = \varphi' - \Phi' + Y', \\ e^w = \varphi''(x+y) - \Phi''(x-y). \end{cases}$$

Wir haben somit nur noch die vier Functionen φ, Φ, X und Y, deren jede nur von einem Argumente abhängt, zu bestimmen. Zu diesem Zwecke substituiren wir die Werthe (24) in (23) wodurch kommt

$$(25)\qquad \begin{cases} 4(\varphi''+\Phi'') + 5Y'' - X'' - \frac{(\varphi'+\Phi'+X')(\varphi'''-\Phi''')+(\varphi'-\Phi'+Y')(\varphi''+\Phi''')}{\varphi''-\Phi''} = \lambda(y \\ 4(\varphi''+\Phi'') + 5X'' - Y'' - \frac{(\varphi'+\Phi'+X')(\varphi'''-\Phi''')+(\varphi'-\Phi'+Y')(\varphi''+\Phi''')}{\varphi''-\Phi''} = f(x \end{cases}$$

woraus durch Subtraction:

$$6Y'' - 6X'' = \lambda(y) - f(x)$$

und

$$(26)\qquad 6Y''' = \lambda(y) + A, \quad 6X'' = f(x) + A,$$

wo A eine Constante bezeichnet. Hierdurch reduciren die beiden Bedingungsgleichungen (23) sich auf die einzige Gleichung

$$(27)\quad 0=A+4(\varphi''+\Phi'')-X''-Y''-\frac{2\varphi'\varphi'''-2\Phi'\Phi'''+(X'+Y')\varphi'''-(X'-Y')\Phi'''}{\varphi'-\Phi''},$$

welche die vier Functionen $\varphi(x+y)$, $\Phi(x-y)$, $X(x)$ und $Y(y)$ bestimmt. Um diese Bedingungsgleichung in allgemeinster Weise zu befriedigen, hätte man nach der gewöhnlichen Regel (Vergleiche Abel's Werke, Bd. 1, pag. 1 der neuen Ausgabe) so viele neue Gleichungen durch Differentiation zu bilden, dass es gelänge, zwei unter den vier unbekannten Functionen zu eliminiren. Ertheilt man darnach dem Argumente der einen unter den beiden zurückgebliebenen Functionen einen constanten Werth, so hat man eine gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unabhängigen und einer abhängigen Variablen. Diese Methode führt indess, wie es scheint, zu sehr complicirten Differentialgleichungen. Ich habe mich daher darauf beschränken müssen, durch allerdings specielle doch aber rationelle Methoden, die ich später auseinandersetze, eine Reihe von Particularlösungen, die ganz besonders interessant sind, zu bestimmen. In der nächsten Nummer finde ich einige solche Particularlösungen, indem ich $X''=Y''=\text{Const.}$ setze; am Schlusse dieser Abhandlung (Note 2) zeige ich, dass die dieser letzten Annahme entsprechende Flächenfamilie eine wohl begrenzte Unterabtheilung meiner dritten Flächenclasse bildet. In den Paragraphen 7 und 8 bestimme ich das Bogenelement aller Flächen, die nicht allein der dritten sondern gleichzeitig der ersten oder zweiten Flächenclasse angehören.

13. Eine ziemlich allgemeine Lösung von (27) erhält man, indem man setzt

$$X''=Y''=\alpha=\text{Const.}$$

oder

$$X'=\alpha x,\quad Y'=\alpha y,$$

wobei wir die Integrationsconstanten ohne wesentliche Beschränkung weggelassen haben. Hierdurch erhält (27) die Form

$$0=(A-2\alpha)(\varphi''-\Phi'')+4(\varphi''^2-\Phi''^2)-2\varphi'\varphi'''+2\Phi'\Phi'''-\alpha(x+y)\varphi'''+\alpha(x-y)\Phi'''$$

und zerlegt sich daher in die beiden Gleichungen

$$(28)\quad \begin{cases} B+(A-2\alpha)\varphi''+4\varphi''^2-2\varphi'\varphi'''-\alpha(x+y)\varphi'''=0, \\ B+(A-2\alpha)\Phi''+4\Phi''^2-2\Phi'\Phi'''-\alpha(x-y)\Phi'''=0, \end{cases}$$

in denen B eine arbiträre Constante bezeichnet.

Um diese Gleichungen, welche dieselbe Form besitzen, zu integriren, setzen wir:

$$\varphi'+\tfrac{\alpha}{2}(x+y)=\psi',\quad \Phi'+\tfrac{\alpha}{2}(x-y)=\Psi',$$

woraus

$$(29)\quad \begin{cases} B-\frac{\alpha A}{2}+2\alpha^2+(A-6\alpha)\,\psi''+4\psi''^2-2\psi'\,\psi'''=0, \\ B-\frac{\alpha A}{2}+2\alpha^2+(A-6\alpha)\Psi''+4\Psi''^2-2\Psi'\Psi'''=0. \end{cases}$$

Es handelt sich also darum eine Gleichung der Form

$$L+M\psi''+4\psi''^2-2\psi'\psi'''=0$$

zu integriren. Nach der gewöhnlichen Regel setzen wir $\psi'=z$, $\psi''=u$ und betrachten u als eine unbekannte Function von z. Es ist $\psi'''=u\frac{du}{dz}$ und also kommt

$$L+Mu+4u^2=2zu\frac{du}{dz}$$

und

$$\frac{dz}{z}=\frac{2u\,du}{L+Mu+4u^2}=\frac{u\,du}{2(u-\gamma)(u-\beta)},$$

woraus

$$z^{2(\beta-\gamma)}=K(u-\gamma)^{-\gamma}(u-\beta)^{\beta}$$

oder

$$\psi'^{2(\beta-\gamma)}=K(\psi''-\gamma)^{-\gamma}(\psi''-\beta)^{\beta}$$

oder endlich

$$(30)\qquad \psi'=K_1(\psi''-\gamma)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-\beta)}}(\psi''-\beta)^{\frac{\beta}{2(\beta-\gamma)}}=f(\psi'').$$

Um diese Gleichung zu integriren, differentiiren wir sie hinsichtlich $(x+y)$:

$$\psi''=f'(\psi'')\frac{d\psi''}{d(x+y)}$$

und finden so die Integralgleichung:

$$x+y=\int^{\psi''}\frac{f'(\psi'')}{\psi''}\,d\psi'',$$

welche die Grösse ψ'' als Function von $x+y$ bestimmt. Gleichzeitig finden wir Ψ'' als Function von $x-y$ und hiernach kommt durch Subtraction:

$$e^w=\varphi''-\Phi''=\psi''-\Psi'',$$

womit die betreffende Flächenfamilie bestimmt ist. Dabei ist zu bemerken, dass die Constante α ohne wesentliche Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann, indem die Differenz $\varphi''-\Phi''$ ungeändert bleibt, wenn eine jede der Grössen φ'' und Φ'' um eine Constante vermehrt wird.

Setzt man z. B. $L=0$, $M=-4$, so erhält man die Flächenfamilie

$$e^w=\frac{1}{\cos^2(x+y)}-\frac{1}{\cos^2(x-y)},$$

die wir später wiederfinden werden. Setzt man andererseits $M=0$, das heisst $\beta=-\gamma$, so erhält man eine andere bemerkenswerthe

Flächenfamilie, deren Bogenelement von elliptischen Functionen (lemniscatischen Functionen) abhängt.

Zu bemerken ist, dass man eine beliebige Lösung ψ' von (29, 1) mit einer beliebigen Lösung Ψ' von (29, 2) verbinden kann. Insbesondere ist es erlaubt $\Psi'' = K = \text{Const.}$ zu setzen, indem diese Annahme wirklich die letzte Gleichung (29) befriedigt. Die entsprechenden Flächen sind auf Rotationsflächen abwickelbar, deren geodätische Curven zwei verschiedene infinitesimale Transformationen gestatten. Auf diese interessante Flächenfamilie kommen wir später wieder zurück.

Abschnitt II.

Flächen, deren geodätische Curven mehrere infinitesimale Transformationen gestatten.

Wenn eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen x und y mehrere unabhängige infinitesimale Transformationen

$$\delta x = \xi_1(x, y)\delta t_1, \quad \delta y = \eta_1(x, y)\delta t_1; \cdots \delta x = \xi_r \delta t_r, \quad \delta y = \eta_r \delta t_r$$

gestattet, so bestehen zwischen den ξ_k und η_k gewisse Differentialrelationen, die wir jetzt entwickeln werden, indem wir uns dabei auf den für uns allein wichtigen Fall beschränken, dass die betreffende Differentialgleichung von der *zweiten* Ordnung ist. Dabei benutzen wir den Ausdruck

$$B_k f = \xi_k \frac{df}{dx} + \eta_k \frac{df}{dy} \tag{31}$$

als Symbol der infinitesimalen Transformation

$$\delta x = \xi_k \delta t, \quad \delta y = \eta_k \delta t. \tag{32}$$

Die Berechtigung dieser (von mir schon in einer Reihe von Abhandlungen angewandten) Ausdrucksweise beruht darauf, dass bei Einführung neuer Variabeln x' und y' einerseits die infinitesimale Transformation die Form

$$\delta x' = B_k x' \cdot \delta t, \quad \delta y' = B_k y' \cdot \delta t$$

annimmt, andererseits der Ausdruck $B_k f$ die entsprechende Form

$$B_k f = B_k x' \cdot \frac{df}{dx'} + B_k y' \cdot \frac{df}{dy'}$$

erhält, was wieder heisst, dass ξ_k und η_k in derselben Weise transformirt werden in der Gleichung (31) wie in den Gleichungen (32).

Wir fügen die Bemerkung hinzu, dass r infinitesimale Transformationen $B_1 f, B_2 f, \cdots, B_r f$ nach unserer früher eingeführten Terminologie unabhängig sind, wenn keine lineare Relation mit constanten Coefficienten von der Form

$$c_1 B_1 f + c_2 B_2 f + \cdots + c_r B_r f = 0$$

identisch stattfindet.

14. Setzen wir

$$L_1 f = \xi_1 \frac{df}{dx} + \eta_1 \frac{df}{dy} + \zeta_1 \frac{df}{dz},$$

$$L_2 f = \xi_2 \frac{df}{dx} + \eta_2 \frac{df}{dy} + \zeta_2 \frac{df}{dz},$$

$$L_3 f = \xi_3 \frac{df}{dx} + \eta_3 \frac{df}{dy} + \zeta_3 \frac{df}{dz}$$

und lassen dabei vorläufig die Grössen ξ_k, η_k und ζ_k *beliebige* Functionen der *drei* Variabeln $x\,y\,z$ bezeichnen, setzen wir ferner wie gewöhnlich

$$L_i\big(L_k(f)\big) - L_k\big(L_i(f)\big) = (L_i L_k),$$

so lehrt die sogenannte Jacobische Identität, dass die Gleichung

$$\big((L_1 L_2) L_3\big) + \big((L_2 L_3) L_1\big) + \big((L_3 L_1) L_2\big) = 0$$

identisch stattfindet. Wir setzen dies Theorem, das in jedem nicht zu knappen Werke*) über partielle Differentialgleichungen 1. O. bewiesen wird, als bekannt voraus.

Vermöge dieses Satzes lässt sich nun zeigen, dass, wenn eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = \psi(x y y')$$

zwei vorgelegte infinitesimale Transformationen,

$$B_1 f = \xi_1(x, y) \frac{df}{dx} + \eta_1(x, y) \frac{df}{dy},$$

$$B_2 f = \xi_2(x, y) \frac{df}{dx} + \eta_2(x, y) \frac{df}{dy}$$

zulässt, sich eine dritte von ihnen unabhängige oder abhängige infinitesimale Transformation angeben lässt, welche die Gleichung $y'' = \psi$ ebenfalls gestattet. Um dies zu beweisen, setzen wir

$$A' f = \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} + \psi \frac{df}{dy'},$$

$$B_1' f = \xi_1 \frac{df}{dx} + \eta_1 \frac{df}{dy} + \zeta_1 \frac{df}{dy'},$$

$$B_2' f = \xi_2 \frac{df}{dx} + \eta_2 \frac{df}{dy} + \zeta_2 \frac{df}{dy'},$$

wobei wir die Ausdrücke

$$\frac{d\eta_i}{dx} + y' \left(\frac{d\eta_i}{dy} - \frac{d\xi_i}{dx} \right) - y'^2 \frac{d\xi_i}{dy} \qquad (i = 1, 2)$$

*) Vergleiche z. B. Imschenetzky's verdienstvolles Werk: Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, traduit pas J. Houël, Paris 1869; p. 53—55.

wie in Nummer 1 zur Abkürzung mit ζ_i bezeichnet haben. Sodann bilden wir die Jacobische Identität

$$(33) \qquad \big((A'B_1')B_2'\big)+\big((B_1'B_2')A'\big)+\big((B_2'A')B_1'\big)=0.$$

Da die Gleichung $y''=\psi$ die beiden infinitesimalen Transformationen B_1f und B_2f gestatten soll, so bestehen (Satz 4) Relationen der Form:

$$(A'B_1')=\lambda_1(xyy')\cdot A'f,$$
$$(A'B_2')=\lambda_2(xyy')\cdot A'f,$$

und also kommt durch Substitution dieser Werthe in (33)

$$(34) \qquad \big((B_1'B_2')A'\big)=(B_2'\lambda_1-B_1'\lambda_2)A'(f)=\lambda(xyy')A'f.$$

Nun aber ist

$$(B_1'B_2')=(B_1\xi_2-B_2\xi_1)\frac{df}{dx}+(B_1\eta_2-B_2\eta_1)\frac{df}{dy}+(B_1'\zeta_2-B_2'\zeta_1)\frac{df}{dy'}$$
$$=B_1\big(B_2(f)\big)-B_2\big(B_1(f)\big)+(B_1'\zeta_2-B_2'\zeta_1)\big)\frac{df}{dy'}$$

und dabei hängen die beiden Grössen

$$B_1\xi_2-B_2\xi_1 \quad \text{und} \quad B_1\eta_2-B_2\eta_1$$

nur von x und y ab. Daher zeigt die Gleichung (34) nach dem Satze 4, dass die Differentialgleichung $y''=\psi$ zugleich diejenige infinitesimale Transformation gestattet, deren Symbol ist:

$$B_1\big(B_2(f)\big)-B_2\big(B_1(f)\big)=(B_1\xi_2-B_2\xi_1)\frac{df}{dx}+(B_1\eta_2-B_2\eta_1)\frac{df}{dy}.$$

Wenden wir daher wiederum den abgekürzten Ausdruck (B_1B_2) an, so können wir den folgenden fundamentalen Satz aussprechen:

Satz 9. *Gestattet die Differentialgleichung $y''=\psi(x,y,y')$ die beiden infinitesimalen Transformationen B_1f und B_2f, so gestattet sie ebenfalls diejenige Transformation, deren Symbol (B_1B_2) ist.**)

Ist nun die neue infinitesimale Transformation (B_1B_2), die wir kurzweg mit B_3f bezeichnen, von B_1f und B_2f unabhängig, so sind (B_1B_3) und (B_2B_3) wiederum infinitesimale Transformationen, die möglicherweise von B_1f, B_2f und B_3f unabhängig sind, und dabei jedenfalls die Gleichung $y''=\psi$ in sich überführen. In dieser Weise kann man nun weitergehen. Gestattet $y''=\psi$ nur eine begrenzte

*) In meiner Theorie der Transformationsgruppen beweise ich den allgemeineren Satz, dass eine Transformationsgruppe, welche die beiden infinitesimalen Transformationen B_1f und B_2f enthält, immer die durch ihre *Zusammensetzung* entstandene Transformation (B_1B_2) enthält. Hier kann ich mich auf den im Texte bewiesenen Specialfall meines Satzes beschränken.

Anzahl*) unabhängiger infinitesimaler Transformationen, so muss man zuletzt zu einem Ausdrucke $(B_i B_k)$ kommen, der sich als Summe der früher gefundenen $B_k f$, multiplicirt mit Constanten ausdrückt. Wir können daher den folgenden Satz aufstellen.

Satz 10. *Gestattet eine Differentialgleichung zweiter Ordnung r und nicht mehrere unabhängige infinitesimale Transformationen $B_1 f \cdots B_r f$, so drückt jedes $(B_i B_k)$ sich als Summe der $B_k f$ multiplicirt mit Constanten aus, das heisst es bestehen $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Relationen der Form*

$$(B_i B_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} B_s f.$$

15. Unter den r infinitesimalen Transformationen $B_k f$, welche eine vorgelegte Differentialgleichung $y'' = \psi$ gestattet, nehmen wir eine beliebige heraus, etwa $B_1 f$; alsdann ist es, behaupten wir, immer möglich $r - 1$ solche, nicht sämmtlich verschwindende Constanten $\lambda_2 \cdots \lambda_r$ zu wählen, dass die infinitesimale Transformation

$$Bf = \lambda_2 B_2 f + \cdots + \lambda_r B_r f$$

eine Relation von der Form

$$(B_1 B) = \omega Bf + \omega_1 B_1 f \quad (\omega_i = \text{Const.})$$

befriedigt. Zum Beweise bilden wir die Gleichung

$$(B_1 B) = \Big(B_1, \sum_{i=2}^{i=r} \lambda_i B_i f\Big) = \sum_{i=2}^{i=r} \lambda_i (B_1 B_i) = \sum_{i=2}^{i=r} \lambda_i \sum_{s=1}^{s=r} c_{1is} B_s f$$

$$= \sum_{s=1}^{s=r} B_s f \sum_{i=2}^{i=r} \lambda_i c_{1is},$$

welche zeigt, dass unsere Forderung durch die r Relationen

$$\begin{aligned}
c_{121}\lambda_2 + c_{131}\lambda_3 + \cdots + c_{1r1}\lambda_r &= \omega_1, \\
c_{122}\lambda_2 + c_{132}\lambda_3 + \cdots + c_{1r2}\lambda_r &= \omega\lambda_2, \\
c_{123}\lambda_2 + c_{132}\lambda_3 + \cdots + c_{1r3}\lambda_r &= \omega\lambda_3, \\
\cdots\cdots\cdots

der λ_k befriedigt werden, die nicht sämmtlich verschwinden, so können wir, wie oben behauptet wurde, den folgenden Satz aufstellen:

Satz 11. *Stehen r unabhängige infinitesimale Transformationen $B_1 f \cdots B_r f$ paarweise in der Beziehung*

$$(B_i B_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{ik,s} B_s f,$$

so ist es, wenn wir eine beliebige unter diesen Transformationen, etwa $B_1 f$, wählen, immer möglich $r-1$ solche Constante $\lambda_2 \cdots \lambda_r$ zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$Bf = \lambda_2 B_2 f + \cdots + \lambda_r B_r f$$

eine Relation der Form

$$(B_1 B) = \omega Bf + \omega_1 B_1 f,$$

wo ω und ω_1 constant sind, befriedigt.

Und als Corollar fliesst hieraus der folgende Satz, der für die Entwicklungen dieses Abschnittes die Grundlage bildet.

Satz 12. *Gestattet eine Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \psi(x, y, y')$ r unabhängige infinitesimale Transformationen $B_1 f \cdots B_r f$, so ist es immer möglich einen Ausdruck*

$$Bf = \lambda_1 B_1 f + \cdots + \lambda_r B_r f$$

mit constanten Coefficienten λ_k zu bilden, der z. B. zu $B_1 f$ in der durch die Gleichung

$$(B_1 B) = \omega B(f) + \omega_1 B_1(f) \quad (\omega_i = \text{Const.})$$

ausgedrückten Beziehung steht.

§ 5.

Flächen, deren geodätische Curven mehrere conforme infinitesimale Transformationen gestatten.

16. Gestatten die geodätischen Curven einer Fläche, deren Bogenelement die Form

$$ds^2 = e^w dx\, dy$$

besitzt, mehrere conforme infinitesimale Transformationen

$$B_k f = \xi_k(x) \frac{df}{dx} + \eta_k(y) \frac{df}{dy},$$

so kann man nach dem Vorangehenden unter ihnen immer zwei, etwa $B_1 f$ und $B_2 f$, wählen, die durch eine Gleichung der Form

$$B_1\big(B_2(f)\big) - B_2\big(B_1(f)\big) = \omega_1 B_1 f + \omega_2 B_2 f$$

verbunden sind. Dabei können wir von dem Falle absehen, dass die beiden Constanten ω_1 und ω_2 gleichzeitig verschwinden. Denn in diesem Falle beständen Relationen der Form:

$$\xi_1 \frac{d\xi_2}{dx} - \xi_2 \frac{d\xi_1}{dx} = 0, \quad \eta_1 \frac{d\eta_2}{dy} - \eta_2 \frac{d\eta_1}{dy_1} = 0,$$

sodass die Grössen ξ_1 und ξ_2 (und ebenfalls die Grössen η_1 und η_2) im constanten Verhältnisse stehen würden:

$$\xi_2 = a\xi_1 \quad (a = \text{Const.}).$$

Dann aber gestatteten die geodätischen Curven unserer Fläche eine infinitesimale Transformation

$$B_2 f - aB_1 f = (\xi_2 - a\xi_1) \frac{df}{dx_1} + (\eta_2 - a\eta_1) \frac{df}{dy},$$

deren ξ, nämlich die Grösse $\xi_2 - a\xi_1$ identisch verschwände, und dann wäre unsere Fläche (Nr. 7) developpabel. Wir können daher, indem wir von den developpablen Flächen absehen, immer ohne Beschränkung annehmen, dass z. B. die Constante ω_1 von Null verschieden ist. Setzen wir dann

$$B_1' f = \omega_1 B_1 f + \omega_2 B_2 f, \quad B_2' f = \frac{1}{\omega_1} B_2 f,$$

so ist

$$(B_1' B_2') = (B_1 B_2) = \omega_1 B_1 f + \omega_2 B_2 f = B_1' f.$$

Wenn daher die geodätischen Curven einer nicht developpablen Fläche mehrere conforme infinitesimale Transformationen gestatten, so können wir immer unter ihnen zwei wählen, etwa $B_1' f$ und $B_2' f$, oder kurz $B_1 f$ und $B_2 f$, die in der Beziehung $(B_1 B_2) = B_1 f$ stehen. Dieses vorausgesetzt, können wir nach den Entwickelungen der Nummer 7 immer annehmen, dass die Variabeln x und y derart gewählt sind, dass $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 1$ sind und dass $B_1 f$ in Folge dessen die Form

$$B_1 f = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy},$$

annimmt, während e^w die Form

$$e^w = e^{ax} \Phi(x - y)$$

besitzt. Alsdann zerlegt die Gleichung $(B_1 B_2) = B_1 f$ sich in die beiden

$$\frac{d\xi_2}{dx} = 1, \quad \frac{d\eta_2}{dy} = 1,$$

sodass ξ_2 und η_2 die Werthe $\xi_2 = x + a$, $\eta_2 = y + b$ besitzen. Ueberdies kann man durch Einführung von $x + a$ als neues x und von $y + b$ als neues y erreichen, dass

$$\xi_2 = x, \quad \eta_2 = y$$

wird.

Es handelt sich jetzt also darum das Bogenelement $e^w = e^{ax} \Phi(x - y)$ in allgemeinster Weise zu bestimmen derart, dass die geodätischen Curven der betreffenden Fläche ausser der infinitesimalen Transformation $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}$ noch die Transformation $x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy}$ gestatten. Wir müssen also in die Gleichung (6):

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \xi \frac{dw}{dx} + \eta \frac{dw}{dy} = B$$

die Werthe $\xi = x$, $\eta = y$ einsetzen, und finden so die Relation

$$x \frac{dw}{dx} + y \frac{dw}{dy} = B - 2 = m = \text{Const.}$$

Nun aber hat w die Form

$$w = ax + \log \Phi(x - y),$$

und also wird

$$ax + \frac{(x-y)\,\Phi'(x-y)}{\Phi(x-y)} = m,$$

so dass a gleich Null ist, während Φ die Form $A(x-y)^m$ besitzt. Hierdurch erhalten wir den Satz:

Satz 13. *Die Rotationsflächen, deren Bogenelement die Form*

$$ds^2 = (x-y)^m\,dx\,dy$$

besitzt, und die auf sie abwickelbaren Flächen sind die einzigen Flächen, deren geodätische Curven mehrere conforme infinitesimale Transformationen gestatten.

Die hiermit definirte interessante Flächenfamilie gestattet eine sehr schöne *geometrische* Definition, wie ich in der letzten Nummer dieses Paragraphen im Anschlusse an bekannte Untersuchungen von Weingarten und Dini zeigen werde.

17. Jetzt fragen wir nach allen Flächen, deren geodätischen Curven *mehr als zwei conforme* Transformationen gestatten. Das Bogenelement der betreffenden Flächen hat nach dem Vorangehenden jedenfalls die Form

$$ds^2 = (x-y)^m\,dx\,dy.$$

Zur näheren Bestimmung der Constante m substituiren wir in die Gleichung (6) den Werth $e^w = (x-y)^m$, und erhalten so die Relation

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{m}{x-y}(\xi - \eta) = B = \text{Const.}$$

Durch successive Differentiation derselben hinsichtlich x und y folgt die Gleichung

$$m\frac{d\xi}{dx} + m\frac{d\eta}{dy} - \frac{2m}{x-y}(\xi - \eta) = 0,$$

oder da die Annahme $m=0$ nur developpable Flächen liefert, und somit ausgeschlossen werden kann, die äquivalente Gleichung

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} - \frac{2}{x-y}(\xi - \eta) = 0,$$

die mit der nächstvorangehenden Gleichung verbunden, die Relation

$$\frac{m+2}{x-y}(\xi - \eta) = A$$

liefert. Ist nun $m+2$ von Null verschieden, so haben ξ und η die lineare Form hinsichtlich x und y:

$$\xi = ax + b, \quad \eta = cy + d.$$

Bezeichnet man die betreffende infinitesimale Transformation

$$(ax+b)\frac{df}{dx} + (cy+d)\frac{df}{dy}$$

mit $B_3 f$ und erinnert sich dabei, dass $B_1 f$ und $B_2 f$ die Form

$$B_1 f = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}, \qquad B_2 f = x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy}$$

haben, so ergiebt sich, dass die geodätischen Curven unserer Fläche eine infinitesimale Transformation, nämlich

$$B_3 f - aB_2 f - bB_1 f,$$

gestatten, deren ξ gleich Null ist. Die Annahme $m+2 \gtrless 0$ liefert somit (Nr. 7) nur developpable Flächen. Es bleibt daher nur die Annahme $m+2=0$, die bekanntlich auf die Flächen constanter Krümmung führt. Dies giebt den Satz:

Satz 14. *Wenn die geodätischen Curven einer Fläche mehr als zwei conforme infinitesimale Transformationen gestatten, so hat die Fläche constante Krümmung. Ihr Bogenelement hat die Form*

$$ds^2 = (x-y)^{-2}\,dx\,dy,$$

und die drei zugehörigen conformen infinitesimalen Transformationen sind die folgenden:

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}, \quad x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy}, \quad x^2\frac{df}{dx} + y^2\frac{df}{dy}.$$

18. Diejenigen im Vorangehenden betrachteten Flächen, deren geodätische Curven zwei und nur zwei conforme infinitesimale Transformationen gestatten, lassen sich in einer anderen merkwürdigen Weise definiren. Nach Weingarten's bekannten Untersuchungen (Journal für die reine und angew. Math. Bd. 59) über Flächen, deren Krümmungshalbmesser ϱ, ϱ' durch eine Relation

$$\varrho' = f(\varrho)$$

verknüpft sind, können nämlich die Centraflächen dieser letzten Flächen auf Rotationsflächen abgewickelt werden. Das Bogenelement der betreffenden Centraflächen besitzt in der That die für Rotationsflächen charakteristische Form

$$ds^2 = d\varrho^2 + e^{2\int \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho'}} dv^2. \tag{35}$$

Ich will nun mit Dini insbesondere annehmen, die Relation $\varrho' = f(\varrho)$ sage aus, dass ϱ und ϱ' im constanten Verhältnisse stehen, dass also

$$\varrho' = k\varrho \qquad (k = \text{Const.})$$

ist. In diesem speciellen Falle geht die Gleichung (35) über in

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^{\frac{2}{1-k}} dv^2$$

oder in

$$ds^2 = \varrho^{\frac{2}{1-k}}\left[\varrho^{\frac{2}{k-1}} d\varrho^2 + dv^2\right].$$

Setzen wir daher

$$\varrho^{\frac{1}{k-1}} d\varrho + i dv = d\xi, \quad \varrho^{\frac{1}{k-1}} d\varrho - i dv = d\eta$$

oder

$$\frac{k-1}{k}\varrho^{\frac{k}{k-1}} + iv = \xi, \qquad \frac{k-1}{k}\varrho^{\frac{k}{k-1}} - iv = \eta,$$

so wird:

$$ds^2 = \left(\frac{2k-2}{k}\right)^{\frac{2}{k}} (\xi + \eta)^{-\frac{2}{k}} d\xi\, d\eta, \tag{36}$$

wobei die Fälle $k = 1$, und $k = 0$ ausgeschlossen sind. Setzt man hier

$$\xi = x, \quad \eta = -y, \quad -\frac{2}{k} = m$$

und sieht dabei von einen unwesentlichen constanten Factor ab, so geht die Formel (36) über in die früher betrachtete Gleichung

$$ds^2 = (x - y)^m dx\, dy,$$

wobei m alle möglichen endlichen constanten Werthe mit Ausnahme von -2 annehmen kann. Hiermit ist der folgende schöne Satz erwiesen:

Satz 15. *Flächen, deren geodätische Curven zwei und nur zwei conforme infinitesimale Transformationen gestatten, lassen sich auch definiren als Centraflächen von Flächen, deren Hauptkrümmungshalbmesser in constantem Verhältnisse stehen.*

Wir zeigen später, dass die Annahme, dass $k = -2$ und also $m = 1$ ist, ganz besonders bemerkenswerth ist. In diesem Falle gestatten die geodätischen Curven der betreffenden Centralfläche ausser den beiden schon besprochenen conformen infinitesimalen Transformationen noch ein dritte infinitesimale Transformation, die nicht conform ist.

§ 6.

Flächen, die sowohl der ersten wie der zweiten Flächenclasse angehören.

In diesem Paragraphen bestimmen wir das Bogenelement aller Flächen, deren geodätische Curven zwei (oder noch mehrere) infinitesimale Transformationen gestatten, unter denen eine die Form

$$\xi_1(x)\frac{df}{dx} + \eta_1(y)\frac{df}{dy}$$

aufweist, während eine andere die Form

$$\xi_2(x)\frac{df}{dx}+\eta_2(xy)\frac{df}{dy},\quad \frac{d\eta_2}{dx}\gtrless 0$$

besitzt. Die betreffenden Flächen gehören somit gleichzeitig unserer ersten und zweiten Flächenclasse an.

19. Da die gesuchten Flächen der zweiten Flächenclasse angehören sollen, so können wir

$$e^{w'}=y'+\Phi(x')$$

setzen, und dabei soll es möglich sein, solche durch die Gleichungen

$$y'=Y(y),\quad x'=X(x)$$

bestimmten, neue Variabelen x, y einzuführen, dass e^w die Form

$$e^w=e^{ax}\Psi(x-y)\qquad (a=\text{Const.})$$

annimmt. Dies giebt die Bedingungsgleichung

$$[Y+\Phi(X)]\,Y'(y)\,X'(x)=e^{ax}\Psi(x-y)=W,$$

wobei W die Relation

$$\frac{dW}{dx}+\frac{dW}{dy}=aW$$

erfüllt. Setzen wir daher

$$X'=f(x),\quad \Phi(X)X'=F(x),$$

so erhalten wir zur Bestimmung der drei unbekannten Functionen Y, f und F die Relation:

$$\frac{d}{dx}(YY'f+Y'F)+\frac{d}{dy}(YY'f+Y'F)=a(YY'f+Y'F)$$

oder die äquivalente:

$$(37)\quad YY'f'+Y'F'+(YY''+Y'^2-aYY')f+(Y''-aY')F=0.$$

Wir geben zuerst die allgemeinste Lösung der Functionalgleichung (37) und bestimmen daher zunächst alle Flächen, deren Bogenelement sowohl die Form $e^w=e^{ax}\Psi(x-y)$ wie die Form $e^{w'}=y'+\Phi(x')$ erhalten kann. Durch Particularisation der gefundenen Lösung erhält man sodann alle Flächen, die sowohl der ersten als der zweiten Classe angehören. Wir zeigen später (Note 1), dass auch die allgemeine Lösung von (37) Interesse darbietet.

Bestände keine oder nur eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten zwischen f', F', f und F, etwa:

$$(38)\qquad Af'+BF'+Cf+DF=0,$$

so verschwände jedenfalls ein Ausdruck der Form $Y'(a+bY)$, sodass Y constant sein müsste, was indess mit der Gleichung $y'=Y$ im Widerspruche steht. Also finden jedenfalls zwei Relationen der Form (38) statt. Dabei bemerken wir, dass f und F nicht im constanten

Verhältnisse stehen können, indem das Bogenelement $e^w = y'f + F$ sonst einer developpablen Fläche entspräche, und dieser Ausnahmefall von uns immer ausgeschlossen wird. Hieraus folgt, dass nicht mehr als zwei unabhängige Relationen der Form (38) stattfinden können, indem sich sonst immer eine Gleichung der Form $Cf + DF = 0$ herleiten liesse.

In dieser Weise erkennen wir die Existenz *zweier* Relationen der Form

$$f' = \alpha f + \beta F, \quad F' = \gamma f + \delta F.$$

Durch Einführung dieser Werthe in (37) kommt:

$$(39) \qquad \begin{cases} Y Y'' + Y'^2 + (\alpha - a) Y Y' + \gamma Y' = 0, \\ Y'' + \beta Y Y' + (\delta - a) Y' \qquad\quad = 0, \end{cases}$$

woraus durch Elimination von Y''

$$Y'^2 + \gamma Y' + (\alpha - \delta) Y Y' - \beta Y^2 Y' = 0$$

oder da Y' von Null verschieden ist:

$$Y' + \gamma + (\alpha - \delta) Y - \beta Y^2 = 0.$$

Durch Differentiation kommt

$$Y'' + (\alpha - \delta) Y' - 2\beta Y Y' = 0$$

und durch Vergleichung mit (39) folgt

$$\alpha - \delta = \delta - a, \quad a = 2\delta - \alpha, \quad \beta = 0.$$

Bei der weiteren Discussion werden wir die beiden Fälle $\delta \gtrless \alpha$ und $\delta = \alpha$ getrennt behandeln.

20. Sei zunächst $\delta \gtrless \alpha$. Alsdann werden die drei Gleichungen

$$(40) \qquad f' = \alpha f, \quad F' = \gamma f + \delta F, \quad Y' = (\delta - \alpha) Y - \gamma$$

in allgemeinster Weise befriedigt, wenn man setzt

$$(41) \qquad f = B e^{\alpha x}, \quad F = M e^{\delta x} + \frac{B\gamma}{\alpha - \delta} e^{\alpha x},$$

$$Y = \frac{\gamma}{\delta - \alpha} + A e^{(\delta - \alpha) y}.$$

Die entsprechende Form des Bogenelementes ist:

$$(42) \quad e^w = e^{(2\delta - \alpha) x} [A^2 B (\delta - \alpha) e^{2(\delta - \alpha)(y - x)} + A M (\delta - \alpha) e^{(\delta - \alpha)(y - x)}],$$

sodass die betreffenden Flächen wirklich, wie vorauszusehen war, unserer ersten Flächenclasse angehören. Um zu entscheiden, ob sie zugleich der zweiten Classe angehören, kehren wir zu den Variabeln x', y' zurück, indem wir setzen:

$$\frac{dx'}{dx} = X' = f = B e^{\alpha x}, \quad y' = Y.$$

Ist dabei $\alpha \gtrless 0$, so wird

$$x' = \frac{B}{\alpha} e^{\alpha x} + k, \qquad e^{\alpha x} = \frac{\alpha (x' - k)}{B}$$

und

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{X'} = y' + \frac{M}{B} e^{(\delta - \alpha)x} + \frac{\gamma}{\alpha - \delta}$$

oder

$$e^{w'} = y' + \frac{M}{B}\left(\frac{\alpha}{B}\right)^{\frac{\delta-\alpha}{\alpha}} (x' - k)^{\frac{\delta-\alpha}{\alpha}} + \frac{\gamma}{\alpha - \delta}$$

oder endlich durch Einführung dreier neuer Constanten a, b und ε

$$e^{w'} = y' + a(x' - k)^{\varepsilon} + b.$$

Es fragt sich (Satz 8), ob die Grösse

$$a(x' - k)^{\varepsilon} + b,$$

die wir in Uebereinstimmung mit dem im citirten Satze angewandten Symbole mit $\mathrm{F}' = \frac{d\mathrm{F}}{dx'}$ bezeichnen werden, durch passende Particularisation der Constanten die Differentialgleichung

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\,\mathrm{F}''' + (3x' - 6c)\,\mathrm{F}'' = 0$$

befriedigt. Indem wir von der, nur developpable Flächen liefernden Annahme: $\varepsilon = 0$ absehen, ist hierzu, wie wir finden, erforderlich und hinreichend, dass

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}, \quad c = k, \quad K = -4k^2$$

sind. Unser Bogenelement erhält also die Form

$$e^{w'} = y' + a\,(x' - k)^{-\frac{1}{2}} + b,$$

oder wenn wir $k = b = 0$ setzen, was erlaubt ist, die äquivalente Form

$$e^{w'} = y' + ax'^{-\frac{1}{2}}.$$

Die entsprechende infinitesimale Transformation

$$\xi(x')\,\frac{df}{dx'} + \eta(x'y')\,\frac{df}{dy'}$$

hat nach Satz (8) die Form $\xi = 2x'^2$, $\eta = x'y' + \mathrm{F}(x')$, wo die Grösse $\mathrm{F}(x') = 2ax'^{\frac{1}{2}} + L$ die Gleichung

$$2x'^2\mathrm{F}'' - x'\mathrm{F}' + \mathrm{F} = 1$$

befriedigen soll, sodass die Integrationsconstante L gleich Null ist. Ausser der hiermit bestimmten infinitesimalen Transformation

$$2x'^2\frac{df}{dx'} + \left(x'y' + 2ax'^{\frac{1}{2}}\right)\frac{df}{dy'}$$

gestatten die geodätischen Curven unserer Fläche noch eine Transformation und zwar die conforme infinitesimale Transformation*)

$$2x' \frac{df}{dx'} - y' \frac{df}{dy'},$$

indem die Werthe $\xi = 2x'$, $\eta = -y'$, $e^{w'} = y' + ax'^{-\frac{1}{2}}$ die Gleichung (6)

$$\frac{d\xi}{dx'} + \frac{d\eta}{dy'} + \xi \frac{dw'}{dx'} + \eta \frac{dw'}{dy'} = \text{Const.}$$

identisch erfüllen.

Führen wir die Grösse $\sqrt{x'} = x''$ als neues x ein, so erhält unser Bogenelement die bemerkenswerthe Form

$$e^{w''} = x''y'' + a^{**}),$$

die hinsichtlich x'' und $y'' = y'$ symmetrisch ist. Zu den früher gefundenen infinitesimalen Transformationen, die in den neuen Variabeln die Form

$$B_1 f = x''^3 \frac{df}{dx''} + (x''^2 y'' + 2ax'') \frac{df}{dy''},$$

$$B_2 f = x'' \frac{df}{dx''} - y'' \frac{df}{dy''}$$

besitzen, können wir wegen der Symmetrie des Bogenelementes hinsichtlich x'' und y'' die dritte Transformation

$$B_3 f = (x''y''^2 + 2ay'') \frac{df}{dx''} + y''^3 \frac{df}{dy''}$$

fügen. Zwischen ihnen bestehen, wie man durch Ausführung findet, die Relationen

$$(B_1 B_2) = -2B_1, \quad (B_2 B_3) = -2B_3, \quad (B_1 B_3) = 4a_2 B_2.$$

Wir beweisen später, dass die hiermit bestimmten *drei* infinitesimalen Transformationen die einzigen sind, welche die geodätischen Curven unserer Flächen in sich überführen.

Setzen wir

$$B_1 f + B_3 f = \xi \frac{df}{dx''} + \eta \frac{df}{dy''},$$

so ist

$$\frac{d\xi}{dy''} \gtrless 0, \quad \frac{d\eta}{dx''} \gtrless 0,$$

sodass unsere Flächen auch der dritten Flächenclasse angehören.

*) Wir haben früher gefunden, dass die Grösse $\varepsilon = \frac{\delta - \alpha}{\alpha}$ gleich $-\frac{1}{2}$ ist, und dass daher $2\delta - \alpha = 0$ ist. Also zeigt Formel (42), dass unsere Flächen auf eine Rotationsfläche abwickelbar sind.

**) Flächen mit dem Bogenelemente $ds^2 = (xy + a)\,dx\,dy$ haben nur wenn a verschwindet, eine constante Krümmung, und sind dann gleichzeitig developpabel. Ist a von Null verschieden, so kann man ohne wesentliche Beschränkung $a = 1$ setzen.

Diejenigen Flächen, deren Bogenelement die Form

$$e^w = xy + a$$

besitzt, gestatten drei unabhängige infinitesimale Transformationen. Sie gehören gleichzeitig der ersten, der zweiten und der dritten Flächenclasse an.

Ich will jetzt annehmen, dass $\alpha = 0$ ist, während δ von Null verschieden ist; die Differentialgleichungen (40)

$$f' = 0, \quad F' = \gamma f + \delta F, \quad Y' = \delta Y - \gamma$$

werden dann in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir

$$f = B, \quad F = M e^{\delta x} - \frac{B\gamma}{\delta}, \quad Y = \frac{\gamma}{\delta} + A e^{\delta y}$$

setzen. Die entsprechende Form des Bogenelementes

$$e^w = e^{2\delta x}\left\{A^2 B\delta\, e^{2\delta(y-x)} + AM\delta\, e^{\delta(y-x)}\right\}$$

ist, wie wir sehen, nur ein specieller Fall der Formel (42). Um zu entscheiden, ob die betreffenden Flächen zu der zweiten Classe gehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x', y' zurück, indem wir

$$\frac{dx'}{dx} = X' = f = B, \quad y' = Y$$

setzen. Alsdann wird $Bx = x' - k$, und

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{X'} = y' + \frac{M}{B} e^{\delta x} - \frac{\gamma}{\delta}$$

oder

$$e^{w'} = y' + \frac{M}{B} e^{\frac{\delta}{B}(x'-k)} - \frac{\gamma}{\delta}$$

oder endlich durch Einführung dreier neuer Constanten a, b und ε:

$$e^{w'} = y' + a e^{\varepsilon x'} + b.$$

Es fragt sich (Satz 8) ob die Grösse

$$a e^{\varepsilon x'} + b = \mathrm{F}'$$

die Differentialgleichung

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\,\mathrm{F}''' + (3x' - 6c)\,\mathrm{F}'' = 0$$

nach einer passenden Particularisation der Constanten befriedigt. Dies ist, wie wir finden, nur der Fall, wenn $a = 0$ ist. *Die Annahme* $\alpha = 0$, $\delta \gtrless 0$ *liefert daher jedenfalls nur developpable Flächen, welche gleichzeitig der ersten und der zweiten Classe angehören.*

21. Ich will ferner annehmen, dass $\alpha = \delta$ ist und dass sie beide von Null verschieden sind. Dann werden die Gleichungen (40)

$$f' = \alpha f, \quad F' = \gamma f + \alpha F, \quad Y' = -\gamma$$

in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir

$$f = Be^{\alpha x}, \quad F = \gamma Bx e^{\alpha x} + De^{\alpha x}, \quad Y = -\gamma y + E$$

setzen. Die entsprechende Form des Bogenelementes

$$e^w = e^{\alpha x}\{\gamma B(x-y) + EB + D\}$$

zeigt, dass unsere Flächen wirklich der ersten Classe angehören. Um zu entscheiden, ob sie ebenfalls zu der zweiten Classe gehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x', y' zurück, indem wir

$$\frac{dx'}{dx} = Be^{\alpha x}, \quad y' = Y$$

setzen. Dann wird

$$x' - k = \frac{B}{\alpha} e^{\alpha x}, \quad x = \frac{1}{\alpha} \log \frac{\alpha(x'-k)}{B}$$

und

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{f} = y' + \gamma x + \frac{D}{B}$$

oder

$$e^{w'} = y' + \frac{\gamma}{\alpha} \log \frac{\alpha(x'-k)}{B} + \frac{D}{B}$$

oder endlich durch Einführung zweier neuen Constanten a und b:

$$e^{w'} = y' + a \log(x'-k) + b.$$

Es fragt sich (Satz 8), ob die Grösse

$$a \log(x'-k) + b = \mathrm{F}'$$

die Differentialgleichung

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\mathrm{F}''' + (3x' - 6c)\mathrm{F}'' = 0$$

für passende Werthe der Constanten befriedigt. Man sieht durch Ausführung, dass dies nur geschieht, wenn $a = 0$ ist, das heisst wenn die betreffenden Flächen developpabel sind.

Die Annahme $\delta = \alpha \gtrless 0$ liefert somit nur developpable Flächen, welche gleichzeitig der ersten und der zweiten Classe angehören.

22. Es bleibt jetzt nur noch die Annahme zu erledigen, dass $\alpha = \delta = 0$ ist. Dann werden die Gleichungen (40):

$$f' = 0, \quad F' = \gamma f, \quad Y' = -\gamma$$

in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir

$$f = B, \quad F = \gamma Bx + C, \quad Y = -\gamma y + D$$

setzen. Die entsprechende Form des Bogenelementes

$$e^w = \gamma B(x-y) + BD + C$$

zeigt, dass unsere Flächen auf Rotationsflächen abwickelbar sind, und dass sie somit der ersten Classe angehören. Um zu entscheiden, ob sie ebenfalls der zweiten Classe angehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x', y' zurück, indem wir

$$\frac{dx'}{dx} = B, \quad y' = Y$$

setzen. Dann wird $x' - k = Bx$ und

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{f} = y' + \gamma x + \frac{C}{B},$$

oder

$$e^{w'} = y' + \frac{\gamma}{B}(x' - k) + \frac{C}{B},$$

oder endlich durch Einführung zweier neuer Constanten a und b

$$e^{w'} = y' + ax' + b.$$

Nun aber verificirt man leicht, dass die Grösse $ax' + b = \mathbf{F}'$ der Differentialgleichung

$$(2x'^2 - cx' + K)\, F''' + (3x' - 6c)\, F'' = 0$$

nicht genügt, ausser wenn $a = 0$ ist.

Die Annahme $\delta = \alpha = 0$ liefert daher nur developpable Flächen.

Wir resumiren die obenstehenden Entwickelungen im folgenden Satze:

Satz 16. *Gestatten die geodätischen Curven einer Fläche eine conforme infinitesimale Transformation und daneben eine Transformation der Form*

$$\xi(x)\frac{df}{dx} + \eta(xy)\frac{df}{dy} \quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0,$$

so kann das entsprechende Bogenelement auf die Form

$$e^w = y + \frac{a}{\sqrt{x}},$$

oder auf die äquivalente Form

$$e^w = xy + a$$

gebracht werden. Die betreffenden Flächen gehören nicht allein der ersten und der zweiten, sondern zugleich der dritten Flächenclasse an.

Es giebt indess, haben wir gefunden, noch weitere Flächenfamilien, deren Bogenelement sowohl die Form $e^w = \psi(x+y) + \Psi(x-y)$ wie die Form $e^{w'} = y' + \Phi(x')$ erhalten kann.

23. Jetzt suchen wir alle Flächen, deren geodätische Curven zwei oder noch mehrere infinitesimale Transformationen der Form

$$\xi_\varkappa(x)\frac{df}{dx} + \eta_\varkappa(xy)\frac{df}{dy}, \quad \frac{d\eta_\varkappa}{dx} \gtrless 0$$

gestatten. Für jede solche Fläche können wir

$$e^w = y + F(x), \quad \frac{d\eta_1}{dx} = e^w, \quad Y(y)\frac{d\eta_2}{dx} = e^w$$

setzen. Wir werden zunächst zeigen, dass $Y(y)$ eine Constante sein muss. Führen wir eine neue Variable y' ein, indem wir

$$dy' = \sqrt{Y}\, dy$$

setzen, so soll der Ausdruck $e^{w'} = e^{w} \frac{dy}{dy'}$ die Form $y'\varphi(x) + \Phi(x)$ annehmen:

$$(y + F)\frac{dy}{dy'} = y'\varphi(x) + \Phi(x).$$

Setzen wir daher:

$$\frac{1}{\varphi} = \psi, \quad \frac{F}{\varphi} = \Psi, \quad y = Y_1(y'),$$

so kommt durch Differentiation

$$\frac{d}{dy'}(Y_1 Y_1') \cdot \psi + \frac{d}{dy'}(Y_1') \cdot \Psi = 1,$$

und wenn man hier der Variable y' successiv verschiedene constante Werthe ertheilt, so erhält man jedenfalls eine Relation der Form

$$a\psi + b\Psi = 1.$$

Beständen nun mehrere solche Relationen, so müssten $\psi(x)$ und $\Psi(x)$ im constanten Verhältnisse stehen, und die betreffenden Flächen in Folge dessen developpabel sein. Sehen wir daher von den developpablen Flächen ab, so können wir

$$\frac{d}{dy'}(Y_1 Y_1') = a, \quad \frac{d}{dy'}(Y_1') = b$$

und

$$Y_1 Y_1' = ay' + a_1, \quad Y_1' = by' + b_1$$

und also

$$y = Y_1 = cy' + c_1, \quad \frac{dy}{dy'} = c$$

setzen. Hiermit ist erwiesen, dass die Grösse $\sqrt{Y}$ und also auch Y constant ist. Und also wird

$$\frac{d\eta_1}{dx} = e^{w} = k\frac{d\eta_2}{dx}, \quad \frac{d(\eta_1 - k\eta_2)}{dx} = 0,$$

wo k eine Constante bezeichnet, sodass die geodätischen Curven unserer Fläche eine *conforme* infinitesimale Transformation, nämlich

$$(\xi_1 - k\xi_2)\frac{df}{dx} + (\eta_1 - k\eta_2)\frac{df}{dy}$$

gestatten. Dann aber kann das betreffende Bogenelement die Form

$$e^{w} = xy + a$$

erhalten. Dies giebt

Satz 17. *Gestatten die geodätischen Curven einer Fläche zwei oder noch mehrere infinitesimale Transformationen von der Form*

$$\xi(x)\frac{df}{dx} + \eta(xy)\frac{df}{dy}, \quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0,$$

so kann das zugehörige Bogenelement immer die Form

$$e^{w} = xy + a$$

erhalten.

§ 7.

Flächen, die gleichzeitig der zweiten und der dritten Classe angehören.

In diesem Paragraphen bestimme ich das Bogenelement aller Flächen, die gleichzeitig meiner zweiten und meiner dritten Classe angehören.

Dieselben sind dadurch charakterisirt, dass ihre geodätischen Curven eine infinitesimale Transformation der Form

$$\xi(x)\frac{df}{dx} + \eta(xy)\frac{df}{dy}, \qquad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$$

und eine andere der Form

$$\xi(xy)\frac{df}{dx} + \eta(xy)\frac{df}{dy}, \qquad \frac{d\xi}{dy} \gtrless 0, \qquad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$$

gestatten.

23. Da die gesuchten Flächen der zweiten Classe angehören sollen, so kann ihr Bogenelement die Form

$$e^{w'} = y' + \Phi(x')$$

annehmen, und da sie gleichzeitig der dritten Classe angehören sollen, so muss es möglich sein, solche neue Variable x und y einzuführen, dass eine Relation der Form

$$e^{w} = e^{w'}\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy} = \psi(x+y) + \Psi(x-y)$$

stattfindet. Setzen wir

$$y' = Y(y), \qquad \frac{dx'}{dx} = f(x), \qquad \Phi\frac{dx'}{dx} = F(x),$$

so kommt

$$YY'f(x) + Y'F(x) = \psi(x+y) + \Psi(x-y),$$

woraus:

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(YY'f(x) + Y'F(x)\right) - \frac{d^2}{dx^2}(YY'f + Y'F) = 0,$$

oder entwickelt:

$$(YY''' + 3Y'Y'')f + Y'''F - YY'f'' - Y'F'' = 0. \tag{43}$$

Wir geben zuerst die allgemeine Lösung dieser Functionalgleichung und bestimmen daher zunächst alle Flächen, deren Bogenelement sowohl die Form $e^w = \psi(x+y) + \Psi(x-y)$, wie die Form $e^{w'} = y' + \Phi(x')$ erhalten kann. Durch Particularisation finden wir sodann alle Flächen, die sowohl der zweiten wie der dritten Classe angehören. Wir zeigen später (Note 1.), dass auch die allgemeinere hier erledigte Frage ein wirkliches Interesse darbietet.

Bestände in (43) keine oder nur eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten zwischen f, F, f'' und F'' von der Form

$$af + bF + cf'' + dF'' = 0, \tag{44}$$

so wäre Y constant, was mit der Gleichung $y' = Y(y)$ im Widerspruche steht. Bemerken wir nun ferner, dass mehr als zwei Relationen der Form (44) nicht bestehen können, indem f und F dann im constanten Verhältnisse ständen und somit die betreffende Fläche developpabel wäre, so können wir schliessen, dass sicher zwei Relationen der Form

$$\begin{cases} F''' + \alpha f + \beta F = 0, \\ f'' + \gamma f + \delta F = 0 \end{cases} \tag{45}$$

stattfinden.

Durch Einsetzung dieser Werthe in (43) folgt eine Gleichung, die sich in die beiden folgenden zerlegt:

$$\begin{cases} Y Y''' + 3 Y' Y'' + \gamma Y Y' + \alpha Y' = 0, \\ Y''' + \delta Y Y' + \beta Y' = 0. \end{cases} \tag{46}$$

Durch Elimination von Y''' folgt

$$Y'\left(3 Y'' - \delta Y^2 + (\gamma - \beta) Y + \alpha\right) = 0,$$

woraus durch Division mit Y' und Differentiation

$$3 Y''' - 2\delta Y Y' + (\gamma - \beta) Y' = 0,$$

so dass durch Vergleichung mit (46, 2) hervorgeht, dass $\delta = 0$ $\gamma = 4\beta$ ist. Die Grössen f, F und Y werden hiernach bestimmt durch die Gleichungen

$$\begin{cases} f'' = -4\beta f, \quad F'' = -\alpha f - \beta F, \\ Y'' = -\beta Y - \frac{\alpha}{3}, \end{cases} \tag{47}$$

bei deren Integration verschiedene Fälle eintreten können.

24. Ich will zunächst annehmen, dass $\beta \gtrless 0$ ist. Alsdann werden die Gleichungen (47) in allgemeinster Weise befriedigt, wenn wir

$$Y = -\frac{\alpha}{3\beta} + G \sin(y\sqrt{\beta} + \gamma), \quad f = L \sin(2x\sqrt{\beta} + \lambda),$$

$$F = \frac{\alpha}{3\beta} L \sin(2x\sqrt{\beta} + \lambda) + M \sin(x\sqrt{\beta} + \mu)$$

setzen. Die entsprechende Form von e^w ist:

$$e^w = \{GL \sin(2x\sqrt{\beta} + \lambda) \sin(y\sqrt{\beta} + \gamma) + M \sin(x\sqrt{\beta} + \mu)\} \cos(y\sqrt{\beta} + \gamma),$$

oder

$$e^w = \frac{GL}{2} \sin(2x\sqrt{\beta} + \lambda) \sin(2y\sqrt{\beta} + 2\gamma) + M \cos\mu \cdot \sin x\sqrt{\beta} \cdot \cos(y\sqrt{\beta} + \gamma) + M \sin\mu \cdot \cos x\sqrt{\beta} \cdot \cos(y\sqrt{\beta} + \gamma),$$

und dabei sieht man unmittelbar, dass diese Grösse die Form $\psi(x+y) + \Psi(x-y)$ erhalten kann.

Um zu entscheiden, ob die entsprechenden Flächen der zweiten Classe angehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x', y' zurück, indem wir

$$y' = Y(y), \quad \frac{dx'}{dx} = f = L \sin(2x\sqrt{\beta} + \lambda)$$

setzen. Dies giebt:

$$x' = -\frac{L}{2\sqrt{\beta}} \cos(2x\sqrt{\beta} + \lambda) + k$$

und

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{\frac{dx'}{dx}} = y' + \frac{\alpha}{3\beta} + \frac{M \sin(x\sqrt{\beta} + \mu)}{L \sin(2x\sqrt{\beta} + \lambda)}.$$

Um die Grösse x zwischen den beiden letzten Gleichungen zu eliminiren, setzen wir beiläufig

$$x\sqrt{\beta} + \frac{\lambda}{2} = x''.$$

Alsdann erhalten die betreffenden Gleichungen die Form

$$\cos 2x'' = -\frac{2\sqrt{\beta}(x' - k)}{L},$$

$$e^{w'} = y' + \frac{a}{\sin x''} + \frac{b}{\cos x''} + d,$$

wo a, b und d drei neue Constante sind. Drücken wir $\sin x''$ und $\cos x''$ zuerst durch $\cos 2x''$, und sodann durch x' aus, so erhält $e^{w'}$ die Form:

$$e^{w'} = y' + a_1(x' + A)^{-\frac{1}{2}} + b_1(-x' + B)^{-\frac{1}{2}} + d$$

und dabei bemerken wir, dass die Summe der Constanten A und B von Null verschieden ist.

Es fragt sich (Satz 8), ob die Grösse

$$a_1(x' + A)^{-\frac{1}{2}} + b_1(-x' + B)^{-\frac{1}{2}} + d,$$

die wir nach der Ausdrucksweise des citirten Satzes mit $\mathrm{F}'(x')$ bezeichnen, bei passender Particularisation der Constanten die Differentialgleichung

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\,\mathrm{F}''' + (3x' - 6c)\,\mathrm{F}'' = 0$$

befriedigt. Schreiben wir diese Gleichung folgendermassen

$$\frac{\mathrm{F}'''}{\mathrm{F}''} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_1(x' + A)^{-\frac{5}{2}} + b_1(-x' + B)^{-\frac{5}{2}}}{-a_1(x' + A)^{-\frac{3}{2}} + b_1(-x' + B)^{-\frac{3}{2}}} = -\frac{3x' - 6c}{2x'^2 - 6cx' + K}$$

und schaffen sodann die Irrationalitäten des zweiten Nenners in der bekannten Weise weg, so ergiebt sich, dass die Grösse

$$a_1 b_1 (x' + A)^{-\frac{3}{2}} (-x' + B)^{-\frac{3}{2}} \{(x' + A)^{-1} + (-x' + B)^{-1}\}$$

eine rationale Function von x' sein muss, was, da $A + B$ von Null verschieden ist, das Verschwinden des Productes $a_1 b_1$ verlangt. Daher muss entweder a_1 oder b_1 z. B. b_1 gleich Null sein, und *somit das Bogenelement unserer Flächen die Form*

$$e^{w'} = y' + a_1 (x' + b)^{-\frac{1}{2}} + d,$$

die wir schon in dem vorigen Paragraphen mehreremal trafen, besitzen. Dass die betreffenden Flächen wirklich sowohl der zweiten wie der dritten Classe angehören, ist uns schon von früher bekannt.

25. Sei jetzt $\beta = 0$. Alsdann werden die Gleichungen

$$f'' = 0, \quad F'' = -\alpha f, \quad Y'' = -\frac{\alpha}{3}$$

in allgemeinster Weise erfüllt durch die Integralgleichungen

$$(48) \qquad \begin{cases} f = Ax + B, \quad Y = -\frac{\alpha}{6} y^2 + \beta y + \gamma, \\ F = -\frac{\alpha A}{6} x^3 - \frac{\alpha B}{2} x^2 + Cx + D. \end{cases}$$

Setzen wir dabei voraus, dass A von Null verschieden ist, so können wir $Ax + B = Ax''$ und also

$$f = Ax'', \quad F = -\frac{\alpha A}{6} x''^3 + C_1 x'' + D_1$$

setzen. Das entsprechende Bogenelement

$$e^w = \left\{Ax''\left(-\frac{\alpha}{6} y^2 + \beta y + \gamma\right) - \frac{\alpha A}{6} x''^3 + C_1 x'' + D_1\right\}\left(-\frac{\alpha}{3} y + \beta\right)$$

kann, wie man leicht verificirt, unmittelbar auf die Form

$$\psi(x'' + y) + \Psi(x'' - y)$$

gebracht werden.

Um zu entscheiden, ob die betreffenden Flächen meiner zweiten Classe angehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln zurück, indem wir

$$y' = Y(y), \quad \frac{dx'}{dx} = f(x)$$

und also

$$\frac{dx'}{dx''} = Ax'', \quad x' = \frac{A}{2} x''^2 + k$$

setzen. Dann wird

$$e^{w'} = y' + \Phi(x) = y' + \frac{F(x)}{f(x)}$$
$$= y' - \frac{\alpha}{6} x''^2 + \frac{D_1}{A} x''^{-1} + \frac{C_1}{A},$$

oder durch Wegschaffung von x'', wenn wir gleichzeitig drei neue Constante a, b und d einführen:

$$e^{w'} = y' + a(x' - k) + b(x' - k)^{-\frac{1}{2}} + d.$$

Es fragt sich ob die Grösse

$$a(x' - k) + b(x' - k)^{-\frac{1}{2}} + d,$$

die wir wie gewöhnlich $\mathrm{F}'(x')$ nennen, die Differentialgleichung

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\,\mathrm{F}''' + (3x' - 6c')\,\mathrm{F}'' = 0$$

durch passende Particularisation der Constanten befriedigt. Hierzu ist, finden wir, nothwendig, dass a verschwindet, so dass wir wiederum nur die Form

$$e^{w'} = y' + b(x' - k)^{-\frac{1}{2}} + d$$

erhalten.

26. Ich will endlich annehmen, dass in den Integralgleichungen (48) die Grösse A verschwindet und dass also

$$f = B, \quad Y = -\frac{\alpha}{6} y^2 + \beta y + \gamma, \quad F = -\frac{\alpha B}{2} x^2 + Cx + D$$

ist. Das entsprechende Bogenelement

$$e^w = \left\{B\left(-\frac{\alpha}{6} y^2 + \beta y + \gamma\right) - \frac{\alpha B}{2} x^2 + Cx + D\right\}\left(-\frac{\alpha}{3} y + \beta\right)$$

kann auch jetzt auf die beiden Formen

$$e^w = \psi(x + y) + \Psi(x - y), \quad e^{w'} = y' + \Phi(x')$$

gebracht werden.

Um zu entscheiden, ob die betreffenden Flächen meiner zweiten Classe angehören, kehren wir zu den ursprünglichen Variabeln x', y' zurück, indem wir

$$y' = Y, \quad \frac{dx'}{dx} = f(x) = B, \quad x' = Bx + k$$

setzen. Dann wird

$$e^{w'} = y' + \frac{F(x)}{f(x)} = y' - \frac{\alpha}{2} x^2 + bx + c$$

und

$$e^{w'} = y' + ax'^2 + bx' + c.$$

Es fragt sich, ob die Grösse $ax'^2 + bx' + c$, die wir wie gewöhnlich mit $\mathrm{F}'(x')$ bezeichnen, die Differentialgleichung

$$(2x'^2 - 6cx' + K)\,\mathbf{F}''' + (3x' - 6c)\,\mathbf{F}'' = 0$$

bei passender Particularisation der Constanten befriedigt. Hierzu ist, finden wir, erforderlich, dass $a = b = 0$ ist, und dass daher die betreffenden Flächen developpabel sind.

Wir fassen die vorangehenden Entwickelungen in folgendem Satze zusammen.

Satz 18. *Es giebt mehrere Familien von Flächen, deren Bogenelement sowohl die Form* $e^w = \psi(x + y) + \Psi(x - y)$, *wie die Form* $e^{w'} = y' + \Phi(x')$ *erhalten kann. Verlangt man, dass dieselben sowohl meiner zweiten wie meiner dritten Classe angehören sollen, so muss ihr Bogenelement die Form* $e^w = xy + a$ *erhalten können.*

27. Die Entwickelungen dieses Paragraphen geben unmittelbar die Lösung einer anderen für uns wichtigen Frage.

In der That, fragen wir nach allen Flächen, deren geodätische Curven nicht allein eine infinitesimale Transformation der Form

$$B_1 f = \xi_1(x)\,\frac{df}{dx} + \eta_1(xy)\,\frac{df}{dy}, \quad \frac{d\eta_1}{dx} \gtrless 0,$$

sondern zugleich eine Transformation der Form

$$B_2 f = \xi_2(xy)\,\frac{df}{dx} + \eta_2(y)\,\frac{df}{dy}, \quad \frac{d\xi_2}{dy} \gtrless 0$$

gestatten, so ist klar, dass die betreffenden Curven zugleich eine infinitesimale Transformation der Form

$$B_1 f + B_2 f = \xi\,\frac{df}{dx} + \eta\,\frac{df}{dy}, \quad \frac{d\xi}{dy} \gtrless 0, \quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$$

gestatten, und dass daher die aufgestellte Frage sich unter das in diesem Paragraphen erledigte Problem subsumirt. Hiermit erhalten wir also den Satz:

Satz 19. *Sollen die geodätischen Curven einer Fläche eine infinitesimale Transformation der Form*

$$\xi_1(x)\,\frac{df}{dx} + \eta_1(xy)\,\frac{df}{dy}, \quad \frac{d\eta_1}{dx} \gtrless 0$$

und eine andere der Form

$$\xi_2(xy)\,\frac{df}{dx} + \eta_2(y)\,\frac{df}{dy}, \quad \frac{d\xi_2}{dy} \gtrless 0$$

gestatten, so muss ihr Bogenelement die Form $e^w = xy + a$. *erhalten können.*

§ 8.

Flächen, die gleichzeitig der ersten und der dritten Classe angehören.

Indem ich mir jetzt die Aufgabe stelle, alle Flächen zu finden, die gleichzeitig der ersten und der dritten Classe angehören, kann ich von denjenigen früher gefundenen Flächen, die zugleich der zweiten Classe angehören, absehen. Ebenfalls sehe ich vorläufig von denjenigen schon bestimmten Flächen ab, deren Bogenelement die Form $e^w = (x-y)^m$ besitzt, und welche *zwei* conforme infinitesimale Transformationen gestatten.

28. Ich suche also alle Flächen, deren geodätische Curven eine und nur *eine* conforme infinitesimale Transformation, etwa:

$$B_1 f = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy},$$

und gleichzeitig eine oder mehrere Transformationen der Form:

$$\xi_\varkappa(xy)\frac{df}{dx} + \eta_\varkappa(xy)\frac{df}{dy}, \quad \frac{d\xi}{dy} < 0, \quad \frac{d\eta}{dx} \gtrless 0$$

gestatten. Unter den letztgenannten Transformationen giebt es dann (Satz 12) jedenfalls eine, z. B.

$$B_2 f = \xi\frac{df}{dx} + \eta\frac{df}{dy},$$

die mit $B_1 f$ durch eine Relation der Form

$$(49) \qquad B_1\big(B_2(f)\big) - B_2\big(B_1(f)\big) = c_1 B_1 f + c_2 B_2 f$$

mit den constanten Coefficienten c_1 und c_2 verbunden ist. Hier sind drei verschiedene Fälle möglich. Der erste Fall ist, dass c_1 und c_2 beide gleich Null sind. Der zweite Fall ist, dass c_2 verschwindet, während c_1 von Null verschieden ist; in diesem Falle kann man durch Einführung von $\frac{1}{c_1} B_2 f$ als neues $B_2 f$ erreichen, dass die Relation (49) die Form

$$B_1\big(B_2(f)\big) - B_2\big(B_1(f)\big) = B_1 f$$

erhält. Der dritte und letzte Fall ist, dass c_2 von Null verschieden ist; in diesem Falle führen wir $B_2 f + \frac{c_1}{c_2} B_1 f$ als neues $B_2 f$ und ferner $\frac{1}{c_2} B_1 f$ als neues $B_1 f$ ein, und erreichen dadurch, dass die Relation (49) die Form

$$B_1\big(B_2(f)\big) - B_2\big(B_1(f)\big) = B_2 f$$

annimmt.

29. Ich will annehmen, dass die zwischen $B_1 f$ und $B_2 f$ bestehende Relation die Form

$$B_1\big(B_2(f)\big) - B_2\big(B_1(f)\big) = \varepsilon B_1 f$$

besitzt, wobei wir unentschieden lassen, ob die Constante ε gleich Null oder von Null verschieden ist. Unsere Bedingungsgleichung zerlegt sich in die beiden

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi}{dy} = \varepsilon, \qquad \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = \varepsilon,$$

die durch Integration und Wegwerfung der unwesentlichen Integrationsconstanten die Formeln

$$\xi = f(x-y) + \varepsilon x, \quad \eta = \varphi(x-y) + \varepsilon y$$

geben. Da die conforme infinitesimale Transformation $B_1 f$ nach Voraussetzung die Form $\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}$ besitzt, so hat das Bogenelement der gesuchten Flächen in den Variabeln x und y die Form $e^w = e^{\alpha x} \cdot \lambda(x-y)$, wo α eine Constante, $\lambda(x-y)$ eine Function von $x-y$ bezeichnet. Aber andererseits besteht nach (21) eine Gleichung der Form

$$X(x)\frac{d\xi}{dy} = e^w = Y(y)\frac{d\eta}{dx},$$

die in die folgende übergeht:

$$-Xf'(x-y) = e^{\alpha x}\lambda(x-y) = Y\varphi'(x-y).$$

Hieraus erhält man, indem man mit K und L zwei Constanten bezeichnet, die folgenden Werthe der Functionen X, Y, f und φ:

$$X = Ke^{\alpha x}, \qquad Y = Le^{\alpha y},$$
$$\lambda(x-y) = -Kf'(x-y) = Le^{\alpha(y-x)}\varphi'(x-y).$$

Hiermit ist Alles zurückgeführt auf die Bestimmung der Constanten α und der Function λ.

Wir führen neue Variable x', y' ein, indem wir vermöge (21′)

$$dx' = \sqrt{X}\,dx = \sqrt{K}\cdot e^{\frac{\alpha}{2}x}dx, \quad dy = \sqrt{Y}\cdot dy = \sqrt{L}\cdot e^{\frac{\alpha}{2}y}dy$$

setzen. Durch Integration kommt, *wenn α von Null verschieden ist:*

$$x' + \beta = \frac{2\sqrt{K}}{\alpha}e^{\frac{\alpha}{2}x}, \qquad y' + \gamma = \frac{2\sqrt{L}}{\alpha}e^{\frac{\alpha}{2}y}$$

oder wenn wir $x' + \beta = x''$, $y' + \gamma = y''$ setzen:

$$x'' = \frac{2\sqrt{K}}{\alpha}e^{\frac{\alpha}{2}x}, \qquad y'' = \frac{2\sqrt{L}}{\alpha}e^{\frac{\alpha}{2}y}$$

und durch Auflösung:

$$x = \frac{2}{\alpha}\log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}}, \qquad y = \frac{2}{\alpha}\log\frac{\alpha y''}{2\sqrt{L}}.$$

Die Grösse $e^{w'}$ wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$e^{w'} = e^{w}\frac{dx}{dx'}\cdot\frac{dy}{dy'} = \frac{e^{w}\cdot e^{-\frac{\alpha}{2}(x+y)}}{\sqrt{KL}} = \frac{e^{\frac{\alpha}{2}(x-y)}\cdot\lambda(x-y)}{\sqrt{KL}} = \mu(x-y)$$

und erhält daher in den neuen Variabeln x', y' (oder x'', y'') die Form:

$$e^{w'} = \mu\left(\frac{2}{\alpha}\log\frac{\sqrt{L}\cdot x''}{\sqrt{K}\cdot y''}\right) = \Theta\left(\frac{x''}{y''}\right) = \Theta(\omega),$$

wo wir $\frac{x''}{y''} = \omega$ gesetzt haben. Bemerken wir nun, dass $\Theta\left(\frac{x''}{y''}\right)$ sicher auf die Form $\psi(x''+y'')+\Psi(x''-y'')$ gebracht werden kann, so erhalten wir zur Bestimmung von Θ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{d^2\Theta}{dx''^2} - \frac{d^2\Theta}{dy''^2} = 0, \tag{50}$$

die wir in eine gewöhnliche Differentialgleichung zwischen Θ und ω überführen werden. Es ist:

$$\frac{d\Theta}{dx''} = \frac{1}{y''}\frac{d\Theta}{d\omega}, \qquad \frac{d\Theta}{dy''} = -\frac{x''}{y''^2}\frac{d\Theta}{d\omega},$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx''^2} = \frac{1}{y''^2}\frac{d^2\Theta}{d\omega^2}, \qquad \frac{d^2\Theta}{dy''^2} = 2\frac{x''}{y''^3}\frac{d\Theta}{d\omega} + \frac{x''^2}{y''^4}\frac{d^2\Theta}{d\omega^2},$$

und also erhalten wir durch Einsetzung in (50) die lineare Differentialgleichung

$$(1-\omega^2)\frac{d^2\Theta}{d\omega^2} - 2\omega\frac{d\Theta}{d\omega} = 0 = \frac{d}{d\omega}\left\{(1-\omega^2)\frac{d\Theta}{d\omega}\right\},$$

deren allgemeine Lösung die Form

$$\Theta = M\log\frac{\omega+1}{\omega-1} + N$$

besitzt. Setzen wir hier $M = 1$, wie wir ohne Beschränkung thun können, und andererseits $\omega = \frac{x''}{y''}$, so wird:

$$\Theta = \log(x''+y'') - \log(x''-y'') + N$$

oder (§ 4, Formel (23′))

$$e^{w'} = \log(x''+y'') - \log(x''-y'') + N = \frac{d^2U}{dx''\,dy''}.$$

Dabei sind die Grössen ξ' und η' nach den Entwickelungen des soeben citirten Paragraphen bestimmt durch die Formeln:

$$\xi' = \frac{dU}{dx''}, \qquad \eta' = \frac{dU}{dy''},$$

welche

$$\xi' = (x''+y'')\log(x''+y'') + (x''-y'')\log(x''-y'') + Ny'' + X_1(x''),$$
$$\eta' = (x''+y'')\log(x''+y'') - (x''-y'')\log(x''-y'') + Nx'' + Y_1(y'')$$

ergeben.

Zur Bestimmung der noch unbekannten Functionen $X_1(x'')$ und $Y_1(y'')$ benutzen wir die Gleichungen:

$$\xi' = \xi \frac{dx'}{dx} = \xi \frac{dx''}{dx} = \left(f(x-y) + \varepsilon x\right) \frac{\alpha}{2} x'',$$

$$\eta' = \eta \frac{dy'}{dy} = \eta \frac{dy''}{dy} = \left(\varphi(x-y) + \varepsilon y\right) \frac{\alpha}{2} y''.$$

Die erste giebt durch Division mit x'':

$$\left(1+\frac{y''}{x''}\right)\log\left(1+\frac{y''}{x''}\right)+\left(1-\frac{y''}{x''}\right)\log\left(1-\frac{y''}{x''}\right)+2\log x''+N\frac{y''}{x''}+\frac{X_1(x'')}{x''}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(f(x-y)+\varepsilon x\right) = \frac{\alpha}{2}\,\Omega\left(\frac{x''}{y}\right)+\varepsilon\log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}},$$

und wenn der Grösse $\frac{y''}{x''}$ ein constanter Werth ertheilt wird, folgt:

$$2\log x'' + \frac{X_1(x'')}{x''} = \varepsilon \cdot \log\frac{\alpha x''}{2\sqrt{K}} + P \qquad (P = \text{Const.})$$

oder

$$X_1(x'') = (\varepsilon-2)\,x''\log x'' + P_1 x''. \qquad (P_1 = \text{Const.})$$

Eine ganz analoge Rechnung giebt:

$$Y_1(y'') = (\varepsilon-2)\,y''\log y'' + R_1 y'' \cdot (R_1 = \text{Const.})$$

Indem wir jetzt zu den Bezeichnungen des Paragraphen 4 zurückkehren, finden wir

$$\varphi' = (x''+y'')\log(x''+y'') + \frac{N}{2}(x''+y''),$$

$$\Phi' = (x''-y'')\log(x''-y'') - \frac{N}{2}(x''-y''),$$

$$\varphi'' = \log(x''+y'') + 1 + \frac{N}{2}, \quad \Phi'' = \log(x''-y'') + 1 - \frac{N}{2},$$

$$\varphi''' = \frac{1}{x''+y''}, \quad X' = (\varepsilon-2)\,x''\log x'' + P_1 x'',$$

$$\Phi''' = \frac{1}{x''-y''}, \quad Y' = (\varepsilon-2)\,y''\log y'' + R_1 y''.$$

Diese Werthe setzen wir in die Fundamentalgleichung (27) ein und finden hierdurch eine nicht identische algebraische Relation zwischen x'', y'',

$$\log(x''+y''), \quad \log(x''-y''), \quad \log x'', \quad \log y''.$$

Da eine solche Relation indess unmöglich ist, so schliessen wir, dass die Annahme $\alpha \gtrless 0$ keine Fläche liefert, welche gleichzeitig meiner ersten und meiner dritten Classe angehört.

Nichtsdestoweniger werden wir später finden (Note 1), dass die Flächenfamilie

$$e^w = \log(x''+y'') - \log(x''-y'') + N$$

bei Untersuchungen über geodätische Curven Interesse darbietet.

Ich will nunmehr annehmen, dass $\alpha = 0$ ist. Alsdann wird:

$$\xi = f(x-y) + \varepsilon x, \qquad \eta = \varphi(x-y) + \varepsilon y,$$

$$e^{w} = \lambda(x-y) = X(x)\frac{d\xi}{dy} = Y(y)\frac{d\eta}{dx}$$

und

$$X(x) = K^2 = \text{Const.}, \qquad Y(y) = L^2 = \text{Const.}$$

Wir führen wiederum neue Variable x' und y' ein, indem wir setzen:

$$dx' = K dx; \qquad dy' = L dy$$

und

$$x'' = x' + \beta = Kx, \qquad y'' = y' + \beta = Ly.$$

Es ist

$$e^{w'} = e^{w}\frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'} = \frac{\lambda(x-y)}{KL} = \frac{1}{KL}\lambda\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right),$$

und da $e^{w'}$ die Form $\psi(x''+y'') + \Psi(x''-y'')$ besitzen soll, so muss λ die Gleichung

$$\frac{d^2\lambda}{dx''^2} - \frac{d^2\lambda}{dy''^2} = 0 = \left(\frac{1}{K^2} - \frac{1}{L^2}\right)\lambda'' = 0$$

befriedigen, was in zwei verschiedenen Weisen geschehen kann, jenachdem $K^2 - L^2$ gleich Null oder von Null verschieden ist. Ist $K^2 - L^2 \gtrless 0$, so wird:

$$e^{w'} = C + D\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right) = \frac{d^2U}{dx'\,dy'}$$

und

$$\xi' = \frac{dU}{dx'} = Cy'' + \frac{D}{K}x''y'' - \frac{D}{2L}y''^2 + X_1(x''),$$

$$\eta' = \frac{dU}{dy'} = Cx'' + \frac{D}{2K}x''^2 - \frac{D}{L}x''y'' + Y_1(y'').$$

Andererseits ist:

$$\xi' = \xi\frac{dx'}{dx} = K\xi = Kf(x-y) + K\varepsilon x,$$

$$\eta' = \eta\frac{dy'}{dy} = L\eta = L\varphi(x-y) + L\varepsilon y.$$

Also wird:

$$CLy + DLxy - \frac{D}{2}Ly^2 + X_1(x) = Kf(x-y) + K\varepsilon x,$$

$$CKx + \frac{D}{2}Kx^2 - DKxy + Y_1(y) = L\varphi(x-y) + L\varepsilon y$$

und

$$X_1 = -\frac{DL}{2}x^2 + (K\varepsilon - CL)x + A,$$

$$Y_1 = \frac{DK}{2}y^2 + (L\varepsilon - CK)y + B,$$

und endlich

$$\xi' = -\frac{DL}{2}\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right)^2 + \frac{K\varepsilon - CL}{K}x'' + Cy'' + A,$$
$$\eta' = \frac{DK}{2}\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right)^2 + \frac{L\varepsilon - CK}{L}y'' + Cx'' + B.$$

Diese Werthe substituiren wir in die Bedingungsgleichungen (23), die wir zuerst mit e^w multipliciren. Indem wir sodann bemerken, dass der Coefficient der Grösse $\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right)^2$ in beiden Gleichungen verschwinden muss, erkennen wir, dass die Constante D gleich Null ist, und dass daher die betreffenden Flächen developpabel sind.

Sei jetzt $K^2 - L^2 = 0$, und $K = \pm L$ z. B. $K = +L = 1$. Alsdann wird, wenn wir $\lambda(x-y) = \mu'(x-y)$ setzen:

$$e^w = \lambda(x-y) = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx} = \mu'(x-y)$$

und durch Integration:

$$\xi = -\mu(x-y) + X', \qquad \eta = \mu(x-y) + Y'.$$

Nun aber ist, wissen wir,

$$\xi = f(x-y) + \varepsilon x, \qquad \eta = \psi(x-y) = \varepsilon y,$$

sodass wir

$$X' = \varepsilon x + \varepsilon_1, \qquad Y' = \varepsilon y + \varepsilon_2$$

und

$$\xi = -\mu(x-y) + \varepsilon x + \varepsilon_1, \qquad \eta = \mu(x-y) + \varepsilon y + \varepsilon_2$$

setzen können. Kehren wir jetzt zu den Bezeichnungen des § 4 zurück, so wird

$$\varphi'' = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \Phi'' = -\mu'(x-y), \quad \Phi' = -\mu(x-y),$$
$$\xi' = \varphi' + \Phi' + X', \quad \eta' = \varphi' - \Phi' + Y'; \quad X' = \varepsilon x + \varepsilon_1, \quad Y' = \varepsilon y + \varepsilon_2$$

und, wenn wir diese Werthe in die Bedingungsgleichung (27) substituiren, so erhalten wir die Gleichung:

$$\big(2\mu - \varepsilon(x-y) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\big)\mu'' + (A - 2\varepsilon)\mu' - 4\mu'^2 = 0$$

oder, da $\Phi' = -\mu$ ist, die äquivalente Gleichung

$$\big(2\Phi' + \varepsilon(x-y) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2\big)\Phi''' + (2\varepsilon - A)\Phi'' - 4\Phi''^2 = 0,$$

die wir schon in Nummer 13 getroffen und integrirt haben. *In dieser Weise finden wir eine interessante Familie von Flächen, die einerseits auf Rotationsflächen abwickelbar sind, andererseits unserer dritten Classe angehören.*

30. Jetzt erledigen wir den Fall, dass die zwischen den beiden infinitesimalen Transformationen

$$B_1 f = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}, \quad B_2 f = \xi(xy)\frac{df}{dx} + \eta(xy)\frac{df}{dy}$$

bestehende Relation die Form

$$B_1\big(B_2(f)\big) - B_2\big(B_1(f)\big) = B_2 f$$

besitzt, und dass daher die Grössen ξ und η die Gleichungen

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi}{dy} = \xi, \quad \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = \eta,$$

erfüllen, und somit die Form

$$\xi = e^x f(x-y), \quad \eta = e^y \varphi(x-y) \tag{51}$$

besitzen. Da die geodätischen Curven unserer Flächen die infinitesimale Transformation $B_1 f = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}$ gestatten, so hat das entsprechende Bogenelement die Form $e^w = e^{\alpha x}\lambda(x-y)$; und da die betreffenden Flächen überdies der dritten Classe angehören sollen, so bestehen Relationen der Form

$$X(x)\frac{d\xi}{dy} = e^w = Y(y)\frac{d\eta}{dx}$$

und

$$-Xe^x f'(x-y) = e^{\alpha x}\lambda(x-y) = Ye^y \varphi'(x-y).$$

Daher kann man schliessen, dass X und Y die Form

$$X = K^2 e^{(\alpha-1)x}, \quad Y = L^2 e^{(\alpha-1)y}$$

besitzen, und dass dabei K^2 und L^2 gewisse Constante bezeichnen.

Wünschen wir das Bogenelement auf die Form $\psi(x'+y')+\Psi(x'-y')$ zu bringen, so müssen wir nach (21′)

$$dx' = Ke^{\frac{\alpha-1}{2}x}\,dx, \quad dy' = Le^{\frac{\alpha-1}{2}y}\,dy \tag{52}$$

setzen. *Ist hier $\alpha - 1$ von Null verschieden*, so wird:

$$\frac{2K}{\alpha-1}e^{\frac{\alpha-1}{2}x} = x' + \beta = x'', \quad \frac{2L}{\alpha-1}e^{\frac{-1}{2}y} = y' + \beta = y''$$

und

$$x = \frac{2}{\alpha-1}\log\frac{(\alpha-1)x''}{2K}, \quad y = \frac{2}{\alpha-1}\log\frac{(\alpha-1)y''}{2L}.$$

Es ist

$$e^{w'} = e^w \frac{dx}{dx'}\frac{dy}{dy'} = \frac{e^{\alpha x}\lambda(x-y)}{KL}e^{\frac{1-\alpha}{2}(x+y)} = e^x \Omega(x-y)$$

und also besteht eine Relation der Form:

$$e^{w'} = x''^{\frac{2}{\alpha-1}}\Theta\left(\frac{y''}{x''}\right) = x''^{\frac{2}{\alpha-1}}\Theta(\omega),$$

wo zur Abkürzung $\frac{y''}{x''} = \omega$ gesetzt ist. Zur Bestimmung der Function $\Theta(\omega)$ bilden wir die Gleichung:

$$\frac{d^2}{dx''^2}e^{w'} - \frac{d^2}{dy''^2}e^{w'} = 0,$$

die stattfinden muss, da $e^{w'}$ die Form $\psi(x''+y'')+\Psi(x''-y'')$ besitzen soll, und finden hierdurch die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(\omega^2-1)\,\Theta''-2\,\tfrac{3-\alpha}{\alpha-1}\,\omega\Theta'+\tfrac{2}{\alpha-1}\cdot\tfrac{3-\alpha}{\alpha-1}\,\Theta=0,$$

deren allgemeines Integral

$$L(1+\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}+M(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}$$

die beiden Constanten L und M besitzt. Dies giebt:

$$e^{w'}=L(x''+y'')^{\frac{2}{\alpha-1}}+M(x''-y'')^{\frac{2}{\alpha-1}}=\frac{d^2U}{dx''\,dy''}; \tag{53}$$

dabei ist $\xi'=\frac{dU}{dx''}$, $\eta'=\frac{dU}{dy''}$. Schliessen wir daher den Fall, dass $\alpha=-1$ ist, aus, so kommt durch Integration:

$$\xi'=\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\,L(x''+y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}-\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\,M(x''-y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}+X'.$$

$$\eta'=\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\,L(x''+y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}+\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\,M(x''-y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}+Y'.$$

Nun aber ist:

$$\xi'=\frac{dx'}{dx}\,\xi=\tfrac{\alpha-1}{2}\,x''e^x f(x-y)=x''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}F\left(\frac{y''}{x''}\right),$$

$$\eta'=\frac{dy'}{dy}\,\eta=\tfrac{\alpha-1}{2}\,y''e^y\varphi(x-y)=y''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\Phi\left(\frac{y''}{x''}\right),$$

und also besitzen X' und Y' die Form:

$$X'=Rx''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},\quad Y'=Sy''^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},$$

wobei R und S zwei Constanten sind.

Jetzt kehren wir zu den Bezeichnungen des § 4 zurück. Es ist

$$\varphi''=L(x''+y'')^{\frac{2}{\alpha-1}},\qquad \Phi''=-M(x''-y'')^{\frac{2}{\alpha-1}},$$

$$\varphi'=\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\,L(x''+y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},\quad \Phi'=-\tfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\,M(x''-y'')^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},$$

$$\varphi'''=\tfrac{2}{\alpha-1}\,L(x''+y'')^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}},\quad \Phi'''=-\tfrac{2}{\alpha-1}\,M(x''-y'')^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}.$$

Diese Werthe substituiren wir in die Bedingungsgleichung (27)

$$0=A(\varphi''-\Phi'')+4(\varphi''^2-\Phi''^2)-(X''+Y'')(\varphi''-\Phi'')$$
$$-2\varphi'\varphi'''+2\Phi'\Phi'''-(X'+Y')\varphi'''+(X'-Y')\Phi''',$$

und erhalten hierdurch eine Gleichung, deren Glieder mit Ausnahme

von $A(\varphi''-\Phi'')$ hinsichtlich x'', y'' homogen von der Dimension $\frac{4}{\alpha-1}$ sind; während das ausgeschlossene Glied $A(\varphi''-\Phi'')$ von der Dimension $\frac{2}{\alpha-1}$ ist. Also können wir zunächst schliessen, dass die Constante A gleich Null sein muss. Es ist, wenn wir wie früher $\frac{y''}{x''}=\omega$ setzen:

$$(\ 4\varphi''^2-2\varphi'\varphi''')\colon x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=\frac{4\alpha}{\alpha+1}L^2(1+\omega)^{\frac{4}{\alpha-1}},$$

$$(-4\Phi''^2+2\Phi'\Phi''')\colon x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=-\frac{4\alpha}{\alpha+1}M^2(1-\omega)^{\frac{4}{\alpha-1}},$$

$$(-X''\varphi''-X'\varphi''')\colon x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=-RL\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(1+\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}+\frac{2}{\alpha-1}(1+\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right\},$$

$$(\ X''\Phi'+X'\Phi''')\colon x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=-RM\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}+\frac{2}{\alpha-1}(1-\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right\},$$

$$(-Y''\varphi''-Y'\varphi''')\colon x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=-SL\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\omega^{\frac{2}{\alpha-1}}(1+\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}+\frac{2}{\alpha-1}\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(1+\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right\}$$

$$(\ Y''\Phi''-Y'\Phi''')\colon x''^{\frac{4}{\alpha-1}}=-SM\left\{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\omega^{\frac{2}{\alpha-1}}(1-\omega)^{\frac{2}{\alpha-1}}-\frac{2}{\alpha-1}\omega^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}(1-\omega)^{\frac{3-\alpha}{\alpha-1}}\right\}$$

und da die Summe der links stehenden Glieder gleich Null ist, so verschwindet ebenfalls die Summe der rechts stehenden Glieder. Setzen wir jetzt zunächst voraus, dass $\frac{2}{\alpha-1}$ keine ganze positive oder negative Zahl ist, so erkennen wir durch Reihenentwickelungen, dass die Summe der beiden letzten rechtsstehenden Glieder verschwindet und dass in Folge dessen

$$S(L+M)=0,\quad S(L-M)=0$$

ist; da L und M nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, schliessen wir, dass $S=0$ ist. Und durch Vertauschung der gleichberechtigten Grössen x'', y'' schliessen wir unter den genannten Voraussetzungen, dass auch $R=0$ ist. Unsere Bedingungsgleichung reducirt sich hierdurch auf die beiden ersten Glieder, deren Summe nur dann verschwindet, wenn $\alpha=0$ ist.

Die Annahme $\alpha=0$ liefert die Flächenfamilie

$$e^w=\frac{L}{(x+y)^2}+\frac{M}{(x-y)^2};$$

die entsprechenden Flächen sind auf Rotationsflächen abwickelbar und gehören zugleich meiner dritten Classe an. Ich zeige später, dass die betreffenden geodätischen Curven drei unabhängige infinitesimale Transformationen gestatten.

Ist andererseits $\frac{2}{\alpha-1}$ eine ganze negative Zahl, so erkennen wir, indem wir von der Annahme $\frac{2}{\alpha-1} = -1$ absehen, die auf den schon früher ausgeschlossenen Fall $\alpha = -1$ führen würde, dass auch jetzt $R = S = 0$ sein muss. In Folge dessen müsste wiederum $\alpha = 0$ sein, was indess jetzt ausgeschlossen ist.

Setzen wir endlich voraus, dass $\frac{2}{\alpha-1}$ eine ganze positive Zahl ist, so werden wir zunächst annehmen, dass $\frac{2}{\alpha-1} > 2$ ist. Alsdann erhalten wir jedenfalls die sechs folgenden Relationen zwischen L, M, R, S und α:

$$\frac{4\alpha}{\alpha+1}(L^2 - M^2) - \frac{\alpha+3}{\alpha-1} R(L+M) = 0,$$

$$\frac{2\alpha}{\alpha+1}(L^2 + M^2) - \frac{1}{\alpha-1} R(L-M) = 0,$$

$$\frac{8\alpha}{\alpha+1}(L^2 - M^2) - \frac{3-\alpha}{\alpha-1} R(L+M) = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{8\alpha}{\alpha+1}(L^2 - M^2) - \frac{3-\alpha}{\alpha-1} S\left(L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0,$$

$$\frac{2\alpha}{\alpha+1}(L^2 + M^2) - \frac{1}{\alpha-1} S\left(L - (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0,$$

$$\frac{4\alpha}{\alpha+1}(L^2 - M^2) - \frac{\alpha+3}{\alpha-1} S\left(L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0.$$

Hier combiniren wir die erste Gleichung mit der dritten, und andererseits die vierte mit der sechsten, und erhalten hierdurch die beiden Relationen:

$$\frac{3(\alpha+1)}{\alpha-1} R(L+M) = 0, \quad \frac{3(\alpha+1)}{\alpha-1} S\left(L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0,$$

die sich, da die Annahme $\alpha + 1 = 0$ den ausgeschlossenen Fall $\frac{2}{\alpha-1} = -1$ geben würde, auf die Gleichungen

$$R(L+M) = 0, \quad S\left(L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M\right) = 0$$

reduciren.

Wäre $R = 0$, so gäben die beiden ersten unter den sechs obenstehenden Relationen die Gleichungen

$$\alpha(L^2 - M^2) = 0, \quad \alpha(L^2 + M^2) = 0,$$

so dass sowohl L wie M verschwinden müssten, was indess absurd wäre. Ein analoges Raisonnement zeigt, dass auch S nicht verschwinden darf. Also wird:

$$L + M = 0, \quad L + (-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} M = 0$$

und

$$(-1)^{\frac{2}{\alpha-1}} = 1,$$

so dass $\frac{2}{\alpha-1}$ eine gerade Zahl sein muss, und dabei unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls grösser als 3. In Folge dessen können wir zu den sechs obenstehenden Relationen sicher noch weitere, insbesondere die nachstehende, fügen:

$$\frac{4\alpha(5-\alpha)}{\alpha+1}(L^2+M^2) - \frac{(2-\alpha)(3-\alpha)}{\alpha-1} R(L-M) = 0.$$

In dieselbe substituiren wir den Werth $M = -L$ und zugleich den aus der zweiten unter den sechs obenstehenden Relationen hervorgehenden Werth

$$R = \frac{2\alpha(\alpha-1)}{\alpha-1} L$$

und erhalten hierdurch die Gleichung

$$\alpha^2 - 3\alpha = 4,$$

deren Wurzeln -1 und 4 der Grösse $\frac{2}{\alpha-1}$ die ausgeschlossenen Werthe -1 und $\frac{2}{3}$ geben würden. Die Annahme, dass $\frac{2}{\alpha-1}$ eine ganze positive Zahl, und dabei grösser als 2 ist, giebt somit nichts.

Ich will sodann annehmen, dass $\frac{2}{\alpha-1} = 2$ und also $\alpha = 2$ ist. Dann erhalten wir die Relationen:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{8}{3}\ (L^2 - M^2) - 5R(L+M) = 0,\\
&\tfrac{8}{3}\cdot 4(L^2+M^2) - 8R(L-M) = 0,\\
&16\ (L^2 - M^2) - 3(R+S)(L+M) = 0,\\
&\tfrac{8}{3}\cdot 4(L^2+M^2) - 8S(L-M) = 0,\\
&\tfrac{8}{3}\ (L^2 - M^2) - 5S(L+M) = 0,
\end{aligned}$$

aus denen

$$(R-S)(L+M) = 0, \qquad (R-S)(L-M) = 0$$

hervorgeht, sodass wir $R = S$ setzen können. Also wird

$$\begin{aligned}
&\tfrac{8}{3}(L^2 - M^2) - 5R(L+M) = 0,\\
&16(L^2 - M^2) - 6R(L+M) = 0,
\end{aligned}$$

und

$$L^2 - M^2 = 0, \quad R(L+M) = 0.$$

Wäre nun $R = 0 = S$, so ergäben sich wie früher die absurden Werthe $L = M = 0$. Also ist $L + M = 0$, sodass unser Bogenelement die Form

$$e^{w'} = L(x'' + y'')^2 - L(x'' - y'')^2 = 4Lx''y''$$

annimmt. *Dieser Fall führt somit nur auf developpable Flächen.*

Ich will endlich annehmen, dass $\frac{2}{\alpha - 1} = 1$ ist. Dann werden L, M, R und S bestimmt durch die Gleichungen:

$$L^2 - M^2 - R(L + M) = 0,$$
$$6(L^2 + M^2) - 2R(L - M) - 2S(L + M) = 0,$$
$$L^2 - M^2 - S(L - M) = 0,$$

welche uns, da die Annahme $L \pm M = 0$ nur developpable Flächen liefert und somit ausgeschlossen werden kann, die folgenden Werthe giebt:

$$M = iL, \quad R = L(1 - i), \quad S = L(1 + i).$$

Durch Weglassung von unwesentlichen constanten Factoren können wir hiernach

$$e^{w'} = x'' - iy'',$$
$$\xi' = 3x''^2 + 2ix''y'' + y''^2, \quad \eta' = ix''^2 + 2x''y'' + 3iy''^2$$

setzen. Die betreffenden Flächen gehören, wie man sieht, zu denjenigen, deren geodätische Curven zwei conforme infinitesimale Transformationen nämlich

$$\frac{df}{dx''} - i\frac{df}{dy''}, \quad x''\frac{df}{dx''} + y''\frac{df}{dy''}$$

gestatten.

Die geodätischen Curven der Flächen $e^w = x - iy$ gestatten somit drei infinitesimale Transformationen, nämlich:

$$B_1 f = \frac{df}{dx} - i\frac{df}{dy}, \quad B_2 f = x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy},$$

$$B_3 f = (3x^2 + 2ixy + y^2)\frac{df}{dx} + (ix^2 + 2xy + 3iy^2)\frac{df}{dy}.$$

Dieselben sind, wie man sieht, verbunden durch die Relationen:

$$(B_1 B_2) = B_1 f, \quad (B_1 B_3) = 8B_2 f, \quad (B_2 B_3) = B_3$$

Ich will nun annehmen, dass in den Gleichungen (52) die Grösse $\alpha = 1$ ist; dann sind die neuen unabhängigen Variabeln $x'\, y'$ bestimmt durch die Gleichungen:

$$dx' = K dx, \quad dy' = L dy,$$

die durch Integration

$$Kx = x' + \beta = x'', \quad Ly = y' + \gamma = y''$$

geben. Also wird:

$$e^{w'} = e^{w}\,\frac{dx}{dx'}\,\frac{dy}{dy'} = \frac{e^{x}\lambda(x-y)}{KL} = \frac{e^{\frac{x''}{K}}\lambda\left(\frac{x''}{K}-\frac{y''}{L}\right)}{KL},$$

und dabei ist die unbekannte Function λ bestimmt durch die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dx''}\left(e^{\frac{x''}{K}}\lambda\right) - \frac{d^2}{dy''}\left(e^{\frac{x''}{K}}\lambda\right) = 0,$$

oder durch die äquivalente gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(L^2 - K^2)\,\lambda'' + 2L^2\lambda' + L^2\lambda = 0,$$

deren allgemeines Integral, da wir von der, nur developpable Flächen liefernden Hypothese $L^2 - K^2 = 0$ absehen können, die Form

$$Ae^{-\frac{L}{L+K}\left(\frac{x''}{K}-\frac{y''}{L}\right)} + Be^{-\frac{L}{L-K}\left(\frac{x''}{K}-\frac{y''}{L}\right)}$$

besitzt. In Folge dessen können wir

$$e^{w'} = Ae^{\frac{x''+y''}{L+K}} + Be^{-\frac{x''-y''}{L-K}} = \frac{d^2U}{dx''\,dy''}$$

setzen. Durch Integration erhalten die Grössen

$$\xi' = \frac{dU}{dx''}, \quad y' = \frac{dU}{dy''}$$

die Werthe:

$$\xi' = A(L+K)e^{\frac{x''+y''}{L+K}} + B(L-K)e^{-\frac{x''-y''}{L-K}} + X',$$

$$\eta' = A(L+K)e^{\frac{x''+y''}{L+K}} - B(L-K)e^{-\frac{x''-y''}{L-K}} + Y',$$

und da ξ' und η' andererseits (51) die Form:

$$\xi' = \xi\,\frac{dx'}{dx} = e^{x}f(x-y) = e^{\frac{x''}{K}}f\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right),$$

$$\eta' = \eta\,\frac{dy'}{dy} = e^{y}\varphi(x-y) = e^{\frac{y''}{L}}\varphi\left(\frac{x''}{K} - \frac{y''}{L}\right)$$

besitzen sollen, so erkennen wir, dass X' und Y' in die Form gesetzt werden können:

$$X' = Re^{\frac{x''}{K}}, \quad Y' = Se^{\frac{y''}{L}},$$

wobei K und L Constante sind.

Kehren wir jetzt zu den Bezeichnungen des vierten Paragraphen zurück, so wird

$$\varphi' = A(L+K)e^{\frac{x''+y''}{L+K}}, \quad \Phi' = B(L-K)e^{-\frac{x''-y''}{L-K}}.$$

Setzen wir diese Werthe wie auch die soeben gefundenen Werthe von X' und Y' in die Bedingungsgleichung (27) ein, und sehen dabei von

der Annahme $AB = 0$, die nur developpable Flächen liefert, ab, so werden wir auf Widerspruch geführt, und erkennen somit, *dass die Hypothesen* $\alpha = 1$ *keine nicht developpable Fläche dritter Classe liefert.*

Es bleibt noch die Annahme zu erledigen, dass in den Gleichungen (53) die Grösse $\alpha = -1$ ist. Dann wird:

$$e^{w'} = \frac{L}{x'' + y''} + \frac{M}{x'' - y''} = \frac{d^2 U}{dx'' dy''}$$

und

$$\xi' = \frac{dU}{dx''} = L \log (x'' + y'') - M \log (x'' - y'') + X',$$

$$\eta' = \frac{dU}{dy''} = L \log (x'' + y'') + M \log (x'' - y'') + Y'.$$

Nun aber bestehen (51) Gleichungen der Form:

$$\xi' = \xi \frac{dx'}{dx} = f(x - y) = \Theta\left(\frac{y''}{x''}\right),$$

$$\eta' = \eta \frac{dy'}{dy} = \varphi(x - y) = \Omega\left(\frac{y''}{x''}\right),$$

und also haben X' und Y' die Werthe:

$$X' = (M - L) \log x'' + R,$$

$$Y' = -(M + L) \log y'' + S,$$

wo R und S gewisse Constante bezeichnen. Setzen wir die gefundenen Ausdrücke in die Bedingungsgleichung (27) ein, so werden wir wiederum zu Widerspruch geführt, und erkennen somit, dass auch die Annahme $\alpha = -1$ keine Fläche dritter Classe liefert.

31. Um die Untersuchungen dieses Paragraphen zum vollständigen Abschlusse zu bringen, müssen wir schliesslich alle der dritten Classe gehörigen Flächen suchen, deren Bogenelement die Form $e^w = (x - y)^m$ besitzt.

Unser Verlangen führt auf die Functionalgleichung:

$$(X + Y)^m X' Y' = \psi(x + y) + \Psi(x - y),$$

und also zugleich auf die Differentialgleichung:

$$(54) \quad (X+Y)^2 \left(\frac{X'''}{X'} - \frac{Y'''}{Y'}\right) + 3m(X + Y)(X'' - Y'') + m(m-1)(X'^2 - Y'^2) = 0,$$

die durch die Substitution

$$X = z, \quad X'^2 = w, \quad Y = \zeta, \quad Y'^2 = \omega$$

die Form

$$w'' - \omega'' + \frac{3m}{z + \zeta}(w' - \omega') + \frac{2m(m-1)}{(z+\zeta)^2}(w - \omega) = 0$$

annimmt. Durch Differentiation hinsichtlich ζ kommt die Gleichung:

$$\frac{3m}{(z+\zeta)^2}(w'-\omega') + \frac{4m(m-1)}{(z+\zeta)^3}(w-\omega) + \omega''' + \frac{3m}{z+\zeta}\omega'' + \frac{2m(m-1)}{(z+\zeta)^2}\omega' = 0$$

oder die äquivalente:

$$3m(w'-\omega') + \frac{4m(m-1)}{z+\zeta}(w-\omega) + \omega'''(z+\zeta)^2 + 3m\,\omega''(z+\zeta) + 2m(m-1)\omega' = 0,$$

und durch neue Differentiation hinsichtlich ζ:

$$-\frac{4m(m-1)}{(z+\zeta)^2}(w-\omega) - \frac{4m(m-1)}{z+\zeta}\omega' + 2m(m-1)\omega'' + (3m+2)(z+\zeta)\omega''' + (z+\zeta)^2\omega^{(4)} = 0.$$

Wenn wir endlich mit $(z+\zeta)^2$ multipliciren, und sodann hinsichtlich ζ differentiiren, so erhalten wir die Relation:

$$(2m^2+7m+6)(z+\zeta)^2\omega''' + (3m+6)(z+\zeta)^3\omega^{(4)} + (z+\zeta)^4\omega^{(5)} = 0,$$

welche zeigt, dass die Grösse $\omega^{(4)}$ sicher verschwindet, und dass ω''' nur, wenn $2m^2+7+6$ verschwindet, von Null verschieden sein kann. In dieser Weise erkennen wir, dass $X(x)$ und $Y(y)$ immer zwei Differentialgleichungen der Form

$$X'^2 = a + bX + cX^2 + dX^3,$$
$$Y'^2 = \alpha + \beta Y + \gamma Y^2 + \delta Y^3$$

mit constanten Coefficienten erfüllen. Setzen wir diese Werthe in die Bedingungsgleichung (54) ein, so erkennen wir, dass m gleich -2, 0 oder 1 sein muss. *Die beiden erstgenannten Hypothesen liefern nur Flächen constanter Krümmung. Die Annahme $m=1$ liefert die wichtige Flächenfamilie $c^w = x+y$*, die wir indess schon früher gefunden und discutirt haben.

Hiermit kennen wir das Bogenelement einer jeden Fläche dritter Classe, die gleichzeitig entweder der ersten oder der zweiten Classe angehört. Dagegen ist es mir nicht gelungen, alle Flächen zu bestimmen, die in mehrfacher Weise der dritten Classe angehören. Ich weiss nur, dass Flächen mit dem Bogenelemente

$$c^w = \frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2}$$

in *zweifacher* Weise dieser Classe angehören (Note 1). Ob es Flächen giebt, die in *dreifacher* Weise der dritten Classe angehören, ist mir nicht gelungen, definitiv zu entscheiden; ich betrachte es indess als ausserordentlich wahrscheinlich, dass dies bei den Flächen

$$c^w = \left(\frac{1}{u'+Mu^2+K} - \frac{1}{v'+Mu^2+K}\right)\left(\frac{du^2}{u'+Mu^2+K} - \frac{dv^2}{v'+Mv^2+K}\right),$$

die ich in der nachfolgenden Note 1 betrachte, der Fall ist. In der dritten Note zeige ich, dass Flächen, deren Krümmung nicht constant ist, nie mehr als *drei* infinitesimale Transformationen ihrer geodätischen Curven gestatten können.

Note 1.

Ueber die allgemeinste geodätische Abbildung einer reellen oder imaginären Fläche.

In einer schönen Abhandlung der Annali di Matematica, Serie II, t. 3, beschäftigt sich Dini, wie schon bemerkt, mit der allgemeinsten Bestimmung zweier Flächen, die sich derart auf einander abbilden lassen, dass zu einem gegebenen Punkte der einen Fläche ein Punkt oder einige Punkte der zweiten Fläche zugeordnet sind, und dabei den geodätischen Curven der ersten Fläche ebensolche Curven der zweiten Fläche entsprechen. Zwei solche Flächen sind, sagt Dini, *geodätisch auf einander abgebildet.* Verlangt man mit Dini sowohl, dass die betreffenden Flächen reell sind, wie dass die Abbildung sich durch *reelle* Gleichungen zwischen den Cartesischen Punktcoordinaten der beiden Flächen ausdrücken lassen soll, so geben Dini's Entwickelungen die allgemeinste Erledigung des gestellten Problems. Lässt man dagegen alle Beschränkungen hinsichtlich der Realität fallen, so erhält man, wie ich in dieser Note zeigen werde, noch weitere Resultate.

32. Dini nimmt seinen Ausgangspunkt in dem folgenden von Tissot herrührenden Satze: Sind zwei reelle Flächen durch eine ganz beliebige reelle Punkttransformation auf einander abgebildet, so giebt es immer auf der einen Fläche ein Orthogonalsystem von Curven, deren entsprechende Curven auf der zweiten Fläche ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden. Um einen naturgemässen Ausgangspunkt für die Erledigung unserer allgemeineren Fragestellung zu gewinnen, werden wir zunächst die Beschränkungen suchen, unter denen sich Tissot's Satz auf imaginäre Flächen ausdehnen lässt.

Wir wollen annehmen, dass zwei Strahlenbüschel (t) und (τ) projectiv auf einander bezogen sind, und dass dabei t und τ entsprechende Gerade sind. Wir setzen ausdrücklich voraus, dass die Ebenen dieser Strahlenbüschel den Kugelkreis nicht berühren, vielmehr ihn in resp. verschiedenen Punkten schneiden. Seien m_1 und m_2 die beiden getrennten Geraden des ersten Büschels, die den Kugelkreis schneiden, und seien m_1' und m_2' diejenigen Geraden desselben Büschels, deren entsprechende Gerade μ_1', μ_2' im zweiten Büschel den Kugelkreis schneiden. Setze ich nun zuerst voraus, dass weder m_1 noch m_2 mit m_1' oder m_2' zusammenfällt, so giebt es immer im ersten Büschel *ein und nur ein Geradenpaar* t_1 *und* t_2, *das sowohl hinsichtlich* $m_1\, m_2$, *wie*

hinsichtlich $m_1' m_2'$ harmonische Lage besitzt. Dass aber t_1 und t_2 hinsichtlich $m_1 m_2$ harmonisch liegen, heisst eben, dass t_1 und t_2 senkrecht auf einander stehen. Und dass t_1 und t_2 hinsichtlich $m_1' m_2'$ harmonisch liegen, sagt ebenfalls, dass die beiden zu t_1 und t_2 zugeordneten Geraden τ_1 und τ_2 senkrecht auf einander stehen.

Wenn daher zwei Strahlenbüschel projectiv auf einander bezogen sind und dabei diejenigen Geraden des einen Büschels, die den Kugelkreis schneiden, solchen Geraden des zweiten Büschels zugeordnet sind, welche den Kugelkreis nicht schneiden, so giebt es in jedem Büschel ein und nur ein Paar getrennter und senkrechter Geraden, deren entsprechende Gerade ebenfalls senkrecht auf einander stehen.

Wir wollen ferner, indem wir die oben eingeführten Bezeichnungen m_1, m_2, m_1', m_2', μ_1', μ_2' festhalten, annehmen, dass m_1 mit m_1' zusammenfällt, während m_2 und m_2' unterschiedene Gerade sind. Sollen jetzt zwei Gerade t_1 und t_2 sowohl hinsichtlich $m_1 m_2$, wie hinsichtlich $m_1' m_2'$ harmonisch liegen, so müssen t_1 und t_2 mit einander und gleichzeitig mit m_1 zusammenfallen.

Sind daher zwei Strahlenbüschel projectiv auf einander bezogen, und ist dabei die eine und nur die eine Gerade des ersten Büschels, die den Kugelkreis schneidet, zu einer Geraden des zweiten Büschels zugeordnet, die ebenfalls den Kugelkreis schneidet, so giebt es keine zwei getrennte und senkrechte Gerade im ersten Büschel, deren entsprechende Gerade im zweiten Büschel senkrecht auf einander stehen.

Fallen endlich m_1 mit m_1' und gleichzeitig m_2 mit m_2' zusammen, so liefert *jedes* Paar senkrechter Geraden im ersten Büschel zwei orthogonale Geraden im zweiten Büschel.

33. Die vorangehenden Entwicklungen zeigen fast unmittelbar, unter welchen Beschränkungen Tissot's Satz sich auf die allgemeinste analytische Abbildung zweier reellen oder imaginären Flächen ausdehnen lässt. Zieht man nämlich alle Tangenten in einem willkürlichen Punkte der einen Fläche, und ebenfalls alle Tangenten in dem zugeordneten Punkte der zweiten Fläche, so erhält man zwei Strahlenbüschel, deren Gerade durch die Abbildung nothwendig *projektiv* auf einander bezogen sind. Es sind hierbei drei wesentlich verschiedene Fälle denkbar, jenachdem die auf unseren Flächen gelegenen Curven, deren Bogenlänge gleich Null ist (die sogenannten *Minimalcurven*) bei der Transformation in ebensolche Curven übergeführt werden oder nicht werden. Jede Fläche enthält zwei Schaaren Minimalcurven. Gehen bei der Transformation beide Schaaren Minimalcurven der einen Fläche in Curven der zweiten Fläche über, deren Bogenlänge von Null verschieden ist, so giebt es nach dem Vorangehenden in jedem Punkte der ersten Fläche zwei und nur zwei unterschiedene und senk-

rechte Fortschreitungsrichtungen, denen ebenfalls auf der zweiten Fläche senkrechte Fortschreitungsrichtungen zugeordnet sind.

Wenn daher zwei Flächen in solcher Weise auf einander abgebildet sind, dass den beiden Schaaren Minimalcurven der einen Fläche auf der anderen Fläche Curven zugeordnet sind, deren Bogenlänge von Null verschieden ist, so giebt es auf der ersten Fläche immer zwei (und nie mehrere) Schaaren von Curven, die einander orthogonal schneiden und deren zugeordnete Curven ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden.

Setzen wir sodann voraus, dass bei der gegenseitigen Abbildung zweier Flächen die eine und nur die eine Schaar Minimalcurven der einen Fläche ebensolchen Curven der zweiten Fläche zugeordnet sind, so giebt es nach dem Vorangehenden in einem willkürlichen Punkte der einen Fläche keine zwei distincte und orthogonale Fortschreitungsrichtungen, denen auf der zweiten Fläche orthogonale Fortschreitungsrichtungen zugeordnet sind.

Geht daher die eine und nur die eine Schaar von Minimalcurven bei der Abbildung in ebensolche Curven über, so giebt es auf der ersten Fläche kein Paar von Curvenschaaren, deren einzelne Curven einander orthogonal schneiden, während die zugeordneten Curven ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden.

In diesem Falle bleibt also Tissot's Satz*) nicht mehr gültig. Dieser Ausnahmfall kann offenbar eintreten, wenngleich die beiden Flächen reell sind, vorausgesetzt dass die Abbildung durch *imaginäre* Relationen zwischen den Cartesischen Punktcoordinaten der betreffenden Flächen vermittelt wird.

Sind endlich zwei Flächen in solcher Weise auf einander abgebildet, dass beiden Schaaren Minimalcurven der einen Fläche ebensolche Curven der zweiten Fläche entsprechen, so ist die betreffende Abbildung bekanntlich eine conforme, und daher liefert *jedes* Orthogonalsystem der einen Fläche ein ebensolches Curvensystem auf der zweiten Fläche.

34. Nach diesen Vorbereitungen können wir unser Problem angreifen. Ich will zunächst annehmen, dass zwei Flächen in solcher Weise geodätisch auf einander abgebildet sind, dass es möglich ist auf der einen Fläche zwei Schaaren orthogonaler Curven anzugeben, deren Bildcurven ebenfalls ein Orthogonalsystem auf der zweiten Fläche bilden. In diesem Falle führt die von Dini (Annali di mat. Ser. II, t. III, p. 276—279) entwickelte Methode zum Ziele. Reproducirt man seine Entwickelungen und Rechnungen [p. 276—279 seiner Abhandlung], indem man nur diejenigen Betrachtungen weglässt, in denen

*) Ich kann nicht bezweifeln, dass die im Texte angegebene Beschränkung in Tissot's Abhandlung, die ich nicht kenne, berücksichtigt worden ist.

Beschränkungen hinsichtlich der Realität implicite enthalten sind, so erhält man den folgenden Satz:

Satz 20. *Sind zwei Flächen geodätisch auf einander abgebildet, und giebt es dabei auf der einen Fläche ein und nur ein System orthogonaler Curven, deren entsprechende Curven ebenfalls ein Orthogonalsystem bilden, so ist es immer möglich, das Bogenelement der einen Fläche auf die Form*

$$ds^2 = \{U(u) - V(v)\}\left(U_1(u)\,du^2 + V_1(v)\,dv^2\right)^{*)}$$

und gleichzeitig das Bogenelement der zweiten Fläche auf die Form

$$\left(\frac{1}{aV+b} - \frac{1}{aU+b}\right)\left(\frac{U_1}{a(aU+b)}\,du^2 + \frac{V_1}{a(aV+b)}\,dv^2\right)$$

zu bringen. Dabei sind $U(u)$, $U_1(u)$, $V(v)$, $V_1(v)$ arbiträre Functionen ihrer Argumente, während a und b beliebige Constante bezeichnen.

Wünscht man alle Flächen zu finden, auf denen sich eine vorgelegte Fläche vermöge dieses Satzes geodätisch abbilden lässt, so muss man zunächst das Bogenelement der gegebenen Fläche *in allgemeinster Weise* auf die Form

$$\left(U(u) - V(v)\right)\left(U_1(u)\,du^2 + V_1(v)\,dv^2\right)$$

bringen; sodann giebt Dini's Satz die Form des Bogenelementes der gesuchten Flächen. Ich führe später die Anwendung dieser Theorie auf ein interessantes Beispiel vollständig durch.

35. Ich suche jetzt die allgemeinste geodätische Abbildung einer vorgelegten Fläche, bei der ihre Minimalcurven der einen Schaar in Minimalcurven der neuen Fläche übergehen, während die Minimalcurven der zweiten Schaar in geodätische Curven, deren Bogenlänge von Null verschieden ist, sich umwandeln.

Ist das Bogenelement der gegebenen Fläche auf die Form

$$ds^2 = 2F(xy)\,dx\,dy \tag{55}$$

gebracht und ordne ich dabei jedem Punkte der neuen Fläche diejenigen Coordinatenwerthe xy zu, welche dem entsprechenden Punkte der vorgelegten Fläche zukommen, sodass die Abbildung durch die Gleichungen

$$x = x, \quad y = y$$

vermittelt wird, so kann ich annehmen, dass das Bogenelement der neuen Fläche die Form

$$ds_1^2 = E dx^2 + 2F dx\,dy \tag{56}$$

*) Man kann im Texte ohne wesentliche Beschränkung $U_1 = 1$, $V_1 = 1$ setzen. Die betreffenden Flächen lassen sich übrigens auch dadurch charakterisiren, dass ihr Bogenelement die Form

$$ds^2 = [\psi(x+y) + \Psi(x-y)]\,dx\,dy$$

erhalten kann.

besitzt. Die eine Schaar von Minimalcurven wird auf jeder Fläche bestimmt durch die Gleichung $dx = 0$; die zweite Schaar Minimalcurven wird für die erste Fläche durch $dy = 0$, dagegen für die zweite Fläche durch die Differentialgleichung: $Edx + 2Fdy = 0$ bestimmt. Da die geodätischen Curven beider Flächen durch *dieselbe* Relation zwischen x und y bestimmt werden sollen, so müssen die Differentialgleichungen der geodätischen Curven unserer beiden Flächen identisch sein.

Die Differentialgleichung der geodätischen Curven der Fläche (56) hat nach Gauss die Form

$$\frac{dE}{dx} dx^2 + 2 \frac{dF}{dx} dx\, dy = 2ds \cdot d \frac{Edx + Fdy}{ds},$$

woraus durch Entwickelung die Gleichung

$$2F^2 y'' + 2F \frac{dF}{dy} y'^2 + \left(3F \frac{dE}{dy} - 2F \frac{dF}{dx}\right) y'$$
$$+ \left(E \frac{dE}{dy} - 2E \frac{dF}{dx} + F \frac{dE}{dx}\right) = 0$$

hervorgeht. Dementsprechend bestimmt die Differentialgleichung

$$2\mathrm{F}^2 y'' + 2\mathrm{F} \frac{d\mathrm{F}}{dy} y'^2 - 2\mathrm{F} \frac{d\mathrm{F}}{dx} y' = 0$$

die geodätischen Curven der Fläche (55). Und da unsere beiden Differentialgleichungen identisch sein sollen, so findet das vorliegende Problem seinen analytischen Ausdruck in den Relationen:

$$(57) \quad \begin{cases} \frac{d \log F}{dy} = \frac{d \log \mathrm{F}}{dy}, & E \frac{dE}{dy} - 2E \frac{dF}{dx} + F \frac{dE}{dx} = 0, \\ & \frac{1}{F}\left(3 \frac{dE}{dy} - 2 \frac{dF}{dx}\right) = -\frac{2}{\mathrm{F}} \frac{d\mathrm{F}}{dx}, \end{cases}$$

die wir jetzt integriren werden. Die erste Gleichung zeigt, dass F die Form

$$F = \mathrm{F} \cdot X(x)$$

besitzt. Hierdurch nimmt die letzte Gleichung (57) die Form an:

$$3 \frac{dE}{dy} = 2\mathrm{F} \frac{dX}{dx}.$$

Um die Formeln zu vereinfachen, führen wir die Grösse $X(x)$ als neues x ein. Dann wird

$$F = x\mathrm{F}, \quad 3 \frac{dE}{dy} = 2\mathrm{F},$$

und die zweite Gleichung (57) liefert die partielle Differentialgleichung:

$$-2E \frac{dE}{dy} + \frac{3}{2} x \frac{dE}{dx} \frac{dE}{dy} - 3xE \frac{d^2E}{dx\,dy} = 0,$$

die durch die Substitution

$$E = x^{-\frac{4}{3}} \mathrm{E}$$

die einfachere Form

$$2\mathrm{E}\frac{d^2\mathrm{E}}{dx\,dy} - \frac{d\mathrm{E}}{dx}\frac{d\mathrm{E}}{dy} = 0$$

annimmt. Also ist:

$$\mathrm{E} = (X_1 + Y_1)^2,$$

wo X_1 eine arbiträre Function von x, Y_1 eine arbiträre Function von y bezeichnet. Durch Substitution kommt:

$$E = x^{-\frac{4}{3}}(X_1 + Y_1)^2, \quad \mathrm{F} = 3x^{-\frac{4}{3}}(X_1 + Y_1)\,Y_1',$$

$$F = 3x^{-\frac{1}{3}}(X_1 + Y_1)\,Y_1',$$

wo Y_1' wie gewöhnlich die derivirte Function von $Y_1(y)$ hinsichtlich y bezeichnet.

Die Bogenelemente unserer beiden zusammengehörigen Flächen besitzen somit die Form

$$ds_1^2 = x^{-\frac{4}{3}}(X_1 + Y_1)^2\,dx^2 + 6x^{-\frac{1}{3}}(X_1 + Y_1)\,Y_1'\,dx\,dy,$$

$$ds^2 = 6x^{-\frac{4}{3}}(X_1 + Y_1)\,Y_1'\,dx\,dy.$$

Durch Einführung von Y_1 als neues y und von $-x^{-\frac{1}{3}}$ als neues x und durch Weglassung eines unwesentlichen constanten Factors erhalten wir daher die allgemeine Erledigung des vorliegenden Problems in folgendem Satze:

Satz 21. *Sollen zwei Flächen sich in solcher Weise geodätisch auf einander abbilden lassen, dass die eine und nur die eine Schaar von Minimalcurven der einen Fläche einer Minimalcurvenschaar auf der zweiten Fläche entspricht, so kann das Bogenelement der ersten Fläche die Form*

$$ds^2 = \big(y + X(x)\big)\,dx\,dy$$

und gleichzeitig das Bogenelement der zweiten Fläche die Form

$$ds_1^2 = \tfrac{1}{2}x^{-4}(y + X)^2\,dx^2 - x^{-3}(y + X)\,dx\,dy$$

erhalten.

Man sieht, dass die hiermit gefundene allgemeine Flächenkategorie meine sogenannte zweite Flächenclasse als speciellen Fall umfasst.

Kann das Bogenelement einer *reellen* Fläche die Form

$$ds^2 = (y + X)\,dx\,dy$$

erhalten, so muss dasselbe ebenfalls die Form

$$ds^2 = \big(x' + \psi(y')\big)\, dx'\, dy'$$

annehmen können. Setzt man daher

$$y = Y(y'), \quad \frac{dx}{dx'} = X_1,$$

so werden die betreffenden Flächen bestimmt durch die Bedingungsgleichung

$$(Y + X)\, Y' X_1 = x' + \psi(y'),$$

die durch Differentiation nach x' die äquivalente Relation

$$Y Y' X_1' + Y'(X X_1)' = 1$$

liefert. Giebt man hier der Grösse x' successiv verschiedene constante Werthe, so darf man nur *eine* Relation der Form

$$a\, Y Y' + b\, Y' = 1$$

erhalten, indem die Fläche sonst developpabel wäre. Daher findet man zur Bestimmung der drei unbekannten Functionen Y, X, X_1 die einfachen Gleichungen

$$X_1' = a, \quad (X X_1)' = b, \quad a\, Y Y' + b\, Y' = 1,$$

die durch Integration

$$X_1 = a x' + c, \quad X X_1 = b x' + d, \quad a\, Y^2 + 2b\, Y = 2y' + k$$

geben, wobei a, b, c, d und k arbiträre Constante sind. Hier treten zwei wesentlich verschiedene Fälle ein, jenachdem a gleich Null oder von Null verschieden ist. In dieser Weise erhalten wir den Satz:

Satz 22. *Soll das Bogenelement*

$$ds^2 = \big(y + X(x)\big)\, dx\, dy$$

durch Einführung neuer Variabeln $x'y'$, bestimmt durch $y = Y(y')$, $x = F(x')$, die Form:

$$ds^2 = \big(x' + \psi'(y')\big)\, dx'\, dy'$$

erhalten können, so sind zwei wesentlich verschiedene Fälle möglich, indem ψ entweder gleich by' oder gleich $\frac{b}{Vy'}$ gesetzt werden kann.

Die beiden soeben gefundenen Flächenfamilien haben bekanntlich schon in den vorangehenden Untersuchungen eine wichtige Rolle gespielt. Wir wissen, dass jedes unter den betreffenden Bogenelementen auf die Form

$$\psi(x + y) + \Psi(x - y)$$

gebracht werden kann. Und also können wir durch Verknüpfung der vorangehenden Entwickelungen den folgenden Satz aussprechen:

Satz 22. *Gestattet eine reelle Fläche eine geodätische Abbildung auf Flächen, auf welche sie nicht abwickelbar ist, so kann ihr Bogenelement sicher die Form*

$$ds^2 = \big(\psi(x+y) + \Psi(x-y)\big)\, dx\, dy$$

erhalten; dabei wird die betreffende Abbildung im Allgemeinen durch Dini's Formel geliefert. Wenn jedoch das betreffende Bogenelement entweder die Form

$$ds^2 = \{(x+y)^2 - (x-y)^2 + 1\}\, dx\, dy$$

oder auch die Form

$$ds^2 = \{a(x+y) + b(x-y)\}\, dx\, dy$$

erhalten kann, so gestattet die betreffende Fläche nicht allein solche geodätische Abbildungen, die durch Dini's Formel geliefert werden, sondern noch weitere geodätische Abbildungen, die sich indess nie durch reelle Relationen zwischen den betreffenden Punktcoordinaten ausdrücken lassen.

36. Zur Illustration der vorangehenden Theorien werden wir die allgemeinste geodätische Abbildung der wichtigen Flächenfamilie

$$ds^2 = (y' + x')\, dx'\, dy'$$

bestimmen.

Wir setzen $y' = Y(y)$, $x' = X(x)$ und verlangen, dass die Relation

$$(Y + X)\, Y'X' = \psi(x+y) + \Psi(x-y)$$

in allgemeinster Weise befriedigt werden soll. Dies giebt die Bedingungsgleichung:

$$YY'X''' + Y'(XX')'' - (YY')''X' - Y'''XX' = 0,$$

oder die äquivalente:

$$-\frac{(XX')''}{X'} + \frac{X'''}{X'}\,Y - \frac{(YY')''}{Y'} - \frac{Y'''}{Y'}\,X = 0, \tag{58}$$

und durch zweimalige Differentiation hinsichtlich X:

$$\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{(XX')''}{X'}\right) + \frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{X'''}{X'}\right) Y = 0.$$

Da Y keine Constante und noch weniger eine Function von x sein darf, so wird

$$\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{(XX')''}{X'}\right) = 0, \quad \frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{X'''}{X'}\right) = 0$$

und

$$\begin{cases} -\dfrac{(XX')''}{X'} = a_0 + b_0 X, \\ \dfrac{X'''}{X'} = a_1 + b_1 X, \end{cases} \tag{59}$$

wo a_0, a_1, b_0, b_1 constant sind. Durch Einsetzung dieser Werthe in (58) erhält man die analogen Gleichungen:

$$(60)\qquad \begin{cases} \dfrac{(YY')''}{Y'} = a_0 + a_1 Y = \dfrac{YY''' + 3Y'Y''}{Y'}, \\ \dfrac{Y'''}{Y'} = b_0 + b_1 Y, \end{cases}$$

die zusammen mit (59) die unbekannten Functionen X und Y vollständig bestimmen. Durch Elimination von Y''' kommt:

$$3Y'' = a_0 + (a_1 - b_0)\, Y - b_1 Y^2$$

und durch Differentiation hinsichtlich y:

$$\frac{3Y'''}{Y'} = a_1 - b_0 - 2b_1 Y$$

und endlich durch Vergleichung mit (60):

$$a_1 = 4b_0, \quad b_1 = 0.$$

Durch analoge Behandlung der Gleichungen (59) ergiebt sich, dass

$$b_0 = 4a_1, \quad b_1 = 0$$

wird, was wieder heisst, dass

$$b_0 = a_1 = b_1 = 0$$

ist. Also wird:

$$3Y'' = a_0, \quad 3X'' = a_0$$

und

$$(61)\qquad Y = \frac{a_0}{6} y^2 + \beta y + \gamma, \quad X = \frac{a_0}{6} x^2 + \delta x + \varepsilon,$$

wo ein wesentlicher Unterschied eintritt, jenachdem a_0 gleich Null oder von Null verschieden ist.

Ist a_0 von Null verschieden, so können wir ohne wesentliche Beschränkung $a_0 = 6$, $\beta = \delta = 0$ setzen, so dass unser Bogenelement die Form

$$ds^2 = 4(y^2 + x^2 + \gamma + \varepsilon)\, xy\, dx\, dy,$$

oder durch Wegwerfung eines unwesentlichen Factors die äquivalente Gestalt

$$ds^2 = \{(x+y)^4 + M(x+y)^2 - (x-y)^4 - M(x-y)^2\}\, dx\, dy$$

annimmt. Setzen wir hier

$$x + y = u, \quad x - y = v,$$

so wird

$$ds^2 = \frac{1}{4}(u^4 + Mu^2 - v^4 - Mv^2)(du^2 - dv^2),$$

und also lehrt Dini's Satz (21), dass unsere Flächen sich geodätisch abbilden lassen auf jeder Fläche, deren Bogenelement die Form

$$(62)\qquad ds^2 = \left\{\frac{1}{u^4 + Mu^2 + K} - \frac{1}{v^4 + Mv^2 + K}\right\}\left\{\frac{du^2}{u^4 + Mu^2 + K} - \frac{dv^2}{v^4 + Mv^2 + K}\right\}$$

besitzt. Wir bemerken beiläufig, dass dieses neue Bogenelement durch Einführung der elliptischen Functionen sich wesentlich vereinfachen lässt*).

Der einfachste Fall ist, dass die Grösse $u^4 + Mu^2 + K$ ein vollständiges Quadrat

$$u^4 + Mu^2 + K = (u^2 + a^2)^2$$

ist. Setzen wir in diesem Falle

$$\frac{du}{u^2 + a^2} = du_1, \quad \frac{dv}{v^2 + a^2} = dv_1$$

so können wir, wenn a von Null verschieden ist, ohne Beschränkung

$$\text{arc tg } \frac{u}{a} = au_1, \qquad \text{arc tg } \frac{v}{a} = av_1$$

annehmen; und folglich wird

$$(\cos^4 au_1 - \cos^4 av_1)\,(du_1^2 - dv_1^2),$$

oder

$$\left(\cos^4 \frac{x_1 + y_1}{2} - \cos^4 \frac{x_1 - y_1}{2}\right) dx_1\, dy_1,$$

oder endlich

$$\sin x_1 \sin y_1 (1 + \cos x_1 \cos y_1)\, dx_1\, dy_1$$

das entsprechende Bogenelement. Dasselbe erhält bei der Substitution $\cos x_1 = x''$, $\cos y_1 = y''$ die Form

$$(1 + x''y'')\, dx''\, dy'',$$

die wir früher so oft angetroffen haben.

Flächen mit dem Bogenelement $ds^2 = (x + y)\, dx\, dy$ *lassen sich daher geodätisch abbilden auf einer jeden Fläche, deren Bogenelement die Form* $ds^2 = (xy + 1)\, dx\, dy$ *besitzt.*

Jetzt müssen wir annehmen, dass in der Formel (61) die Grösse a_0 verschwindet. Das vorgelegte Bogenelement $ds^2 = (y' + x')\, dx'\, dy'$ erhält unter dieser Voraussetzung die Form:

$$[a(x + y) - b(x - y) + c]\, dx\, dy,$$

oder da die Grösse c ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann, die einfachere Form:

$$[a(x + y) - b(x - y)]\, dx\, dy,$$

die wir auch folgendermassen schreiben können:

$$(au - bv)\,(du^2 - dv^2)$$

*) Es ist selbstverständlich, dass die durch die Formel (62) definirten Flächen drei unabhängige infinitesimale Transformationen ihrer geodätischen Curven gestatten, und ich *vermuthe*, dass diese sämmtlichen Transformationen für allgemeine Werthe der Constanten M und K meiner dritten Classe angehören. Ist diese Vermuthung richtig, so definirt die citirte Formel eine neue sehr bemerkenswerthe Flächenfamilie.

schreiben können. Die betreffenden Flächen lassen sich nach Dini's Satze geodätisch abbilden auf jede Fläche, deren Bogenelement die Form

$$\left(\frac{1}{au+\varepsilon} - \frac{1}{bv+\varepsilon}\right)\left(\frac{du^2}{au+\varepsilon} - \frac{dv^2}{bv+\varepsilon}\right)$$

besitzt. Setzen wir hier:

$$\frac{du}{\sqrt{au+\varepsilon}} = du_1 = d(x_1 + y_1), \qquad \frac{dv}{\sqrt{bv+\varepsilon}} = dv_1 = d(x_1 - y_1),$$

so erkennen wir, dass unser neues Bogenelement auch die Gestalt

$$\left\{\frac{\frac{1}{a^2}}{(x+y)^2} - \frac{\frac{1}{b^2}}{(x-y)^2}\right\} dx\,dy$$

erhalten kann.

Die Flächen mit dem Bogenelemente $ds^2 = (y' + x')\,dx'\,dy'$ *lassen sich daher geodätisch abbilden auf alle Flächen, deren Bogenelement die Form erhalten kann:*

$$ds^2 = \left\{\frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2}\right\} dx\,dy,$$

wo A und B Constante sind.

Hiermit kennen wir die allgemeinste geodätische Abbildung einer Fläche mit dem Bogenelemente $ds^2 = (y + x)\,dx\,dy$, die sich aus Dini's Untersuchungen herleiten lässt. Es bleiben noch diejenigen weiteren Abbildungen zu untersuchen, die durch meinen Satz 21 geleistet werden. Wir müssen zuerst das Bogenelement $ds^2 = (y' + x')\,dx'\,dy'$ in allgemeinster Weise durch die Substitution $y' = Y(y)$, $x' = X(x)$ auf die Form $ds^2 = (y + X_1)\,dx\,dy$ bringen. Unsere Forderung wird durch die Bedingungsgleichung:

$$(Y + X)\,Y'\,X' = y + X_1(x)$$

oder durch die äquivalente Gleichung:

$$(YY')'X' + Y''XX' = 1$$

ausgedrückt. Geben wir hier der Grösse y successiv verschiedene constante Werthe, so dürfen wir bekanntlich nur *eine* Relation der Form

$$aX' + bXX' = 1$$

erhalten. Also wird

$$(YY')' = a, \qquad Y'' = b,$$

sodass Y die Form $cy + d$ besitzt, während b gleich Null, $X' = \frac{1}{a}$ wird. Wir müssen daher den Satz 21 auf das Bogenelement

$$ds^2 = (y + Ax + B)\,dx\,dy = (y + X)\,dx\,dy$$

anwenden, und erhalten hierdurch das neue Bogenelement:

$$ds_1^2 = \tfrac{1}{2}\,x^{-4}(y + Ax + B)^2\,dx^2 - x^{-3}(y + Ax + B)\,dx\,dy.$$

Um dasselbe auf die Form $2F dx' dy'$ zu bringen, bemerken wir, dass die Differentialgleichung

$$y + Ax + B - 2x \frac{dy}{dx} = 0$$

das Integral

$$\frac{y}{\sqrt{x}} - A\sqrt{x} + \frac{B}{\sqrt{x}} = \eta$$

besitzt, und dass in Folge dessen

$$ds_1^2 = \left(\eta + \frac{2A}{\sqrt{\frac{1}{x}}}\right) d\eta\, d\left(\frac{1}{x}\right)$$

wird.

Flächen mit dem Bogenelemente $ds^2 = (x + y)\, dx\, dy$ lassen sich daher auch in solcher Weise auf eine Fläche mit dem Bogenelemente $ds'^2 = (x'y' + 1)\, dx'\, dy'$ abbilden, dass die Minimalcurven der einen Schaar der vorgelegten Fläche in Minimalcurven der neuen Fläche übergehen.

Hiermit ist die allgemeinste geodätische Abbildung einer Fläche mit dem Bogenelemente $ds^2 = (y + x)\, dx\, dy$ bestimmt. Gleichzeitig finden wir u. A. die allgemeinste geodätische Abbildung aller Flächen, deren Bogenelement entweder die Form $ds^2 = (xy + 1)\, dx\, dy$ oder die Form

$$ds^2 = \frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2} \quad \left(A \gtrless 0,\ B \gtrless 0\right)$$

besitzt.

38. Wenn man eine vorgelegte Fläche dritter Classe

$$e^w = \psi(x + y) + \Psi(x - y)$$

durch Dini's Transformation in eine neue Fläche überführt, so kann man immer aus den bekannten infinitesimalen Transformationen der geodätischen Curven der ersten Fläche die entsprechenden infinitesimalen Transformationen der neuen Fläche herleiten. Wendet man diese Bemerkung auf die Fläche $e^w = x + my$ mit ihren drei bekannten infinitesimalen Transformationen an, so findet man u. A., dass die Fläche

$$e^w = \frac{1}{(m+1)^2 (x+y)^2} - \frac{1}{(m-1)^2 (x-y)^2}$$

die drei infinitesimalen Transformationen

$$B_1 f = \frac{2(m^2+1)x + 4my}{x^2 - y^2} \frac{df}{dx} - \frac{4mx + 2(m^2+1)x}{x^2 - y^2} \frac{df}{dy},$$

$$B_2 f = \frac{x^3 y(2mx + (1+m^2)y)}{x^2 - y^2} \frac{df}{dx} - \frac{xy^3(2my + (m^2+1)x)}{x^2 - y^2} \frac{df}{dy},$$

$$B_3 f = x \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy}$$

besitzt. Diese Fläche gestattet somit zwei unabhängige infinitesimale Transformationen dritter Classe, nämlich:

$$B_1 f = \xi_1 \frac{df}{dx} + \eta_1 \frac{df}{dy}, \quad B_2 f = \xi_2 \frac{df}{dx} + \eta_2 \frac{df}{dy}.$$

Bilden wir nun den Ausdruck $a_1 B_1 f + a_2 B_2 f$ und lassen dabei a_1 und a_2 willkürliche Constanten bezeichnen, so können wir unser Bogenelement nach den Regeln des vierten Paragraphen in *unendlich vielen* Weisen auf die Form $e^w = \varphi''(x+y) - \Phi''(x-y)$ bringen. Wir werden diese recht interessante Rechnung andeuten. Durch Ausführung erhalten wir die beiden Relationen

$$\frac{d(a_1\xi_1 + a_2\xi_2)}{dy} e^{-w} = b + cx^4,$$
$$\frac{d(a_1\eta_1 + a_2\eta_2)}{dx} e^{-w} = b + cy^4,$$

in denen b und c gewisse Constante bezeichnen. Setzen wir sodann

$$dx'' = \frac{dx}{\sqrt{b+cx^4}}, \quad dy'' = \frac{dy}{\sqrt{b+cy^4}},$$

so soll unser Bogenelement in den neuen Variabeln x'' y'' immer die Form $\psi(x''+y'') + \Psi(x''-y'')$ erhalten. Ich überlasse dem Leser, die hierzu erforderlichen Rechnungen mit Hülfe der elliptischen Functionen wirklich durchzuführen.

Hier bemerke ich noch ausdrücklich, dass im § 7 das Bogenelement aller Flächen bestimmt wurde, welche sowohl vermöge des Satzes 20 wie vermöge des Satzes 21 geodätisch abgebildet werden können. Im § 6 bestimmte ich alle Flächen, deren Bogenelement die Form $ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy$ erhalten kann, die sich also vermöge des Satzes 21 geodätisch abbilden lassen. Und endlich im § 8 fand ich eine Reihe Flächen mit dem Bogenelemente $ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy$, die sich vermöge des Satzes 20 geodätisch abbilden lassen.

Note 2.

Ueber die Bestimmung von geodätischen Curven, die infinitesimale Transformationen gestatten.

Wenn die geodätischen Curven einer Fläche eine infinitesimale Transformation gestatten, so vereinfacht sich immer die Bestimmung dieser Curven. Um dies nachzuweisen, gebe ich zunächst den Beweis eines merkwürdigen Satzes, den ich schon früher und sogar in allgemeinerer Form aufgestellt habe (Math. Ann. Bd. XI, p. 508).

39. Sei

$$Af = X_1 \frac{df}{dx_1} + X_2 \frac{df}{dx_2} + \cdots + X_n \frac{df}{dx_n} = 0$$

eine vorgelegte lineare partielle Differentialgleichung, die zu einem bekannten Ausdrucke

$$Bf = \xi_1 \frac{df}{dx_1} + \xi_2 \frac{df}{dx_2} + \cdots + \xi_n \frac{df}{dx_n}$$

in solcher Beziehung steht, dass eine Relation der Form

$$(63) \qquad B\big(A(f)\big) - A\big(B(f)\big) = \lambda (x_1 x_2 \cdots x_n) \cdot Af$$

stattfindet. Ist dann M ein Jacobischer Multiplicator von $Af = 0$, was durch die Bedingungsgleichung

$$\frac{d(MX_1)}{dx_1} + \frac{d(MX_2)}{dx_2} + \cdots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0 = A(M) + M \sum_k \frac{dX_k}{dx_k}$$

ausgedrückt wird, so ist es folgendermassen möglich eine Lösung von $Af = 0$ zu finden.

Wir differentiiren die Gleichung (63):

$$\sum_q \left(\xi_q \frac{dX_j}{dx_q} - X_q \frac{d\xi_j}{dx_q} \right) = \lambda X_j$$

nach x_j und summiren sodann nach j. Dies giebt, wenn wir die sich aufhebenden Glieder weglassen:

$$\sum_j \sum_q \left(\xi_q \frac{d^2 X_j}{dx_q dx_j} - X_q \frac{d^2 \xi_j}{dx_q dx_j} \right) = A(\lambda) + \lambda \sum_j \frac{dX_j}{dx_j}$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt:

$$B\left(\sum_j \frac{dX_j}{dx_j} \right) - A\left(\sum_j \frac{d\xi_j}{dx_j} \right) = A(\lambda) + \lambda \sum_j \frac{dX_j}{dx_j}.$$

Nun aber ist nach Voraussetzung:

$$\sum_j \frac{dX_j}{dx_j} = -A(\log M);$$

also folgt:

$$-B\big(A(\log M)\big) - A\left(\sum_j \frac{d\xi_j}{dx_j} \right) = A\lambda - \lambda A(\log M)$$

und durch Berücksichtigung von (63):

$$-A\big(B(\log M)\big) - A\left(\sum_j \frac{d\xi_j}{dx_j} \right) - A\lambda = 0.$$

Diese letzte Gleichung, die sich auch folgendermassen schreiben lässt:

$$A\left(B(\log M) + \sum_j \frac{d\xi_j}{dx_j} + \lambda \right) = 0$$

zeigt, dass es uns wirklich gelungen ist, einen Ausdruck aufzustellen, der die Gleichung $Af = 0$ erfüllt. Dies giebt:

Satz 23. *Stehen die beiden Ausdrücke*

$$Af = \sum_q X_q \frac{df}{dx_q}, \qquad Bf = \sum_j \xi_j \frac{df}{dx_j}$$

in der Beziehung

$$B\big(A(f)\big) - A\big(B(f)\big) = \lambda A(f),$$

so ist, wenn M einen beliebigen Jacobischen Multiplicator von $Af = 0$ bezeichnet, der Ausdruck

$$B(\log M) + \sum_j \frac{d\xi_j}{dx_j} + \lambda$$

entweder eine Constante oder aber eine Lösung von $Af = 0$.

40. Sei jetzt $ds^2 = e^w\, dx\, dy$ das Bogenelement einer Fläche und

$$Af = \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} + \Big(y' \frac{dw}{dx} - y'^2 \frac{dw}{dy}\Big) \frac{df}{dy'} = 0$$

die lineare partielle Differentialgleichung der betreffenden geodätischen Curven. Dann ist die Grösse

$$M = e^{\frac{w}{2}}\, y'^{-\frac{3}{2}}$$

nach einem Satze von Jacobi, den man übrigens sehr leicht verificirt, ein Multiplicator von $Af = 0$.

Setzen wir nun voraus, dass die geodätischen Curven unserer Fläche die infinitesimale Transformation

$$Bf = \xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} + \zeta \frac{df}{dy'} \tag{64}$$

gestatten, und dass also eine Relation der Form

$$B\big(A(f)\big) - A\big(B(f)\big) = \lambda A(f)$$

stattfindet, so ist der Ausdruck

$$J = B(\log M) + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dy'} + \lambda \tag{65}$$

nach dem vorangehenden Satze entweder eine Constante oder aber eine Lösung von $Af = 0$. Es ist sogar möglich noch einen Ausdruck aufzustellen, der $Af = 0$ erfüllt. Setzen wir nämlich in die Relation

$$B\big(A(f)\big) - A\big(B(f)\big) = \lambda Af$$

statt f die Grösse J, so kommt

$$A\big(B(J)\big) = 0,$$

sodass auch $B(J)$ entweder eine Constante oder aber eine Lösung von $A(f) = 0$ darstellt.

In der Formel (64) denken wir uns, wie immer in der voran-

gehenden Abhandlung, dass ξ und η nur von x und y abhängen*). Dann ist nach den früheren Formeln (1), (3'):

$$\zeta = \frac{d\eta}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2\frac{d\xi}{dy},$$

$$\lambda = -\frac{d\xi}{dx} - y'\frac{d\xi}{dy}, \quad \log M = \frac{1}{2}w - \frac{3}{2}\log y';$$

ferner ist:

$$B(\log M) = \frac{1}{2}\left(\xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy}\right) - \frac{3}{2}\frac{1}{y'}\left(\frac{dy'}{dx} + y'\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) - y'^2\frac{d\xi}{dy}\right),$$

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dy'} = 2\frac{d\eta}{dy} - 2y'\frac{d\xi}{dy}.$$

Also wird:

$$2J = \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} - 3y'\frac{d\xi}{dy} - 3\frac{1}{y'}\frac{d\eta}{dx},$$

und man sieht, dass J nur dann eine absolute Constante sein kann, wenn die beiden Relationen $\frac{d\xi}{dy} = 0$, $\frac{d\eta}{dx} = 0$ bestehen. In diesem speciellen Falle wird:

$$2J = \xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}$$

und dieser Ausdruck ist nach der Formel (6) wirklich gleich einer Constante, die sogar, wenn das Bogenelement die Form

$$ds^2 = \Phi(x-y)\,dx\,dy$$

besitzt, identisch verschwindet. Also:

Satz 14. *Gehört eine Fläche meiner zweiten oder dritten Classe an, und ist dabei ihr Bogenelement schon auf die Form $ds^2 = e^w dx\,dy$ gebracht, so findet man ein Integral der Differentialgleichung der geodätischen Curven durch Differentiation.*

24. Es fragt sich, ob man durch Bildung des Ausdrucks $B(J)$ eine neue Lösung durch *Differentiation* herleiten kann. Wir setzen:

$$(66)\quad J_1 = \frac{2}{3}J = \frac{1}{3}\left(\xi\frac{dw}{dx} + \eta\frac{dw}{dy} + \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right) - y'\frac{d\xi}{dy} - \frac{1}{y'}\frac{d\eta}{dx}$$

$$= \alpha - \beta y' - \gamma\frac{1}{y'},$$

und bilden den Ausdruck:

*) Eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = \psi(x\,y\,y')$ gestattet *immer* beliebig viele infinitesimale *Berührungs*transformationen. Kennt man zufälligerweise eine solche Transformation der geodätischen Curven einer Fläche, so findet man diese Curven nach den Entwickelungen des Textes. Man kann sich übrigens die Aufgabe stellen, alle Flächen zu finden, deren geodätische Curven eine vorgelegte infinitesimale Berührungstransformation gestatten. Besonders interessant scheint der Fall, dass die charakteristische Function dieser Transformation die Form $\Sigma f_k(xy)y'^k$ besitzt.

$$B(J_1) = B(\alpha) - B(\beta)y' - B(\gamma)\frac{1}{y'}$$
$$-\left(\beta - \gamma\frac{1}{y'^2}\right)\left(\frac{d\eta}{dx} + y'\frac{d\eta}{dy} - y'\frac{d\xi}{dx} - y'^2\frac{d\xi}{dy}\right),$$

woraus:

$$B(J_1) = B(\alpha) - \beta\frac{d\eta}{dx} - \gamma\frac{d\xi}{dy} - y'\left(B(\beta) + \beta\frac{d\eta}{dy} - \beta\frac{d\xi}{dx}\right)$$
$$-\frac{1}{y'}\left(B(\gamma) - \gamma\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dx}\right) + y'^2\beta\frac{d\xi}{dy} + \frac{1}{y'^2}\gamma\frac{d\eta}{dx}.$$

Um zu entscheiden, ob dieser Ausdruck, der nur dann eine Constante sein kann, wenn gleichzeitig die beiden Grössen $\frac{d\xi}{dy} = \beta$ und $\frac{d\eta}{dx} = \gamma$ verschwinden, ein von J_1 unabhängiges Integral darstellt, bilden wir die Grösse

$$B(J_1) - J_1^2 = J_2,$$

die wiederum ein Integral darstellt. Es ist

$$(67)\quad \begin{cases} J_2 = B(\alpha) - 4\beta\gamma - \alpha^2 - y'\left(B(\beta) + \beta\frac{d\eta}{dy} - \beta\frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\beta\right) \\ \qquad\qquad -\frac{1}{y'}\left(B(\gamma) - \gamma\frac{d\eta}{dy} + \gamma\frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\gamma\right). \end{cases}$$

Ich will jetzt zunächst annehmen, dass die betreffende Fläche meiner dritten Classe angehört. Dann können wir nach (22)

$$\beta = \gamma = e^w = \frac{d\xi}{dy} = \frac{d\eta}{dx}$$

setzen, und also wird:

$$J_2 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \left(y' + \frac{1}{y'}\right)\left(B(\beta) - 2\alpha\beta\right) - \left(y' - \frac{1}{y'}\right)\beta\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right)$$

und andererseits:

$$(68)\qquad J_1 = \alpha - \left(y' + \frac{1}{y'}\right)\beta. \qquad (\beta \gtrless 0)$$

Ist daher die Grösse $\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}$ verschieden von Null, so sind J_2 und J_1 unabhängige Integrale, so dass wir unter dieser Voraussetzung die vollständige Integration der Differentialgleichung der geodätischen Curven allein durch Differentiation leisten können.

Ist dagegen, wenn wir die Bezeichnungen des vierten Paragraphen anwenden:

$$\frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy} = 0 = X'' - Y''$$

und in Folge dessen:

$$X'' = Y'' = a = \text{Const.},$$

so wird

$$B(\beta)-2\alpha\beta=B(e^w)-\frac{2}{3}\left(\xi\frac{dw}{dx}+\eta\frac{dw}{dy}+\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)e^w$$
$$=B(e^w)-\frac{2}{3}B(e^w)-\frac{2}{3}\left(2(\varphi''+\Phi'')+X''+Y''\right)e^w$$
$$=\frac{1}{3}B(e^w)-\frac{4}{3}(\varphi''+\Phi'')e^w-\frac{4}{3}a\,e^w.$$

Nun aber erhält die Formel (27) durch die Substitution $X''=Y''=a$ und durch Multiplication mit der Grösse $e^w=\varphi''-\Phi''$ die Gestalt:

$$(A-2a)(\varphi''-\Phi'')+4(\varphi''-\Phi'')(\varphi''+\Phi'')-B(e^w)=0,$$

und also wird

$$B(\beta)-2\alpha\beta=\frac{A-6a}{3}(\varphi''-\Phi'')=\frac{A-6a}{3}\beta$$

und in Folge dessen

$$J_2=B(\alpha)-4\beta^2-\alpha^2-\frac{A-6a}{3}\beta\left(y'+\frac{1}{y'}\right)$$

und endlich

$$J_2-\frac{A-6a}{3}J_1=B(\alpha)-4\beta^2-\alpha^2-\frac{A-6a}{3}\alpha.$$

Das hiermit gefundene Integral ist von y' unabhängig, und muss somit identisch gleich einer Constante sein, was sich folgendermassen verificiren lässt. Die Gleichung (27) zeigt, dass

$$B(w)=A+4(\varphi''+\Phi'')-X''-Y'' \tag{69}$$

und in Folge dessen, dass

$$\alpha=\frac{A}{3}+2(\varphi''+\Phi'') \tag{70}$$

ist. Folglich wird:

$$J_2-\frac{A-6a}{3}J_1=\left(4\varphi'\varphi'''-8\varphi''^2+2(X'+Y')\varphi'''-2(A-2a)\varphi''\right)$$
$$+\left(4\Phi'\Phi'''-8\Phi''^2+2(X'-Y')\Phi'''-2(A-2\alpha)\Phi''\right)-\frac{2A^2}{9}+\frac{2a}{3}A$$

und dabei erkennt man sogleich durch Anwendung der Formel (28), dass die rechte Seite der letzten Gleichung eine Constante ist. Hiermit erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 25. *Sollen die Grössen J_1 und BJ_1 die durch Differentiation gefunden werden, unabhängige Integrale der Differentialgleichung der geodätischen Curven auf einer Fläche dritter Classe darstellen, so ist nothwendig und hinreichend, dass die Grösse $X''-Y'''$ gleich Null ist.*

Dieser Satz giebt eine interessante Definition von der in Nummer 13 gefundenen Unterabtheilung meiner dritten Classe.

Ich will nun ferner annehmen, dass die Formel (67) auf eine Fläche zweiter Classe angewandt wird. In diesem Falle wird

$$\beta=0,\quad \gamma=e^w,\quad J_1=\alpha-\frac{1}{y'}\gamma,$$
$$J_2=B(\alpha)-\alpha^2-\frac{1}{y'}\left(B(\gamma)-\gamma\frac{d\eta}{dy}+\gamma\frac{d\xi}{dx}-2\alpha\gamma\right)$$

und

$$B(\gamma) - \gamma \frac{d\eta}{dy} + \gamma \frac{d\xi}{dx} - 2\alpha\gamma = \frac{1}{3} B(e^w) - \frac{5}{3} e^w \frac{d\eta}{dy} + \frac{1}{3} e^w \frac{d\xi}{dx},$$

Nun aber ist (13), (17):

$$B(w) - 5 \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\xi}{dx} = -\pi'(y) = -c_1$$

und also kommt:

$$J_2 = B(\alpha) - \alpha^2 + \frac{1}{y'} \cdot \frac{c_1}{3} \gamma$$

und

$$J_2 + \frac{c_1}{3} J_1 = B(\alpha) - \alpha^2 + \frac{c_1}{3} \alpha.$$

Hiermit ist nachgewiesen, dass $J_2 + \frac{c_1}{3} J_1$ nur von x und y abhängt, und somit als Integral einer Differentialgleichung zweiter Ordnung eine absolute Constante ist. Also:

Satz 26. *Die Grössen J_1 und $B(J_1)$ sind nie unabhängige Integrale, wenn die betreffende Fläche der zweiten Classe angehört.*

Wenn die vorangehenden Theorien nur *ein* Integral liefern, so findet man die betreffenden geodätischen Curven durch eine *Quadratur*, indem man die Jacobi'sche Theorie des letzten Multiplicators zu Hülfe nimmt.

42. Bour hat bekanntlich (Journal de l'école polytechnique t. XXII, p. 79—80) gezeigt, dass man die geodätischen Curven einer jeden auf Rotationsflächen abwickelbaren Fläche, die jedoch nicht constante Krümmung besitzen darf, durch gewisse Quadraturen bestimmen kann. Ich werde *andeuten*, wie man diesen schönen Satz am einfachsten mit meinen Untersuchungen in Verbindung setzen kann. Da die betreffende Fläche unter den gemachten Voraussetzungen nur *eine* infinitesimale Verschiebung in sich ohne Dehnung gestattet, so findet man die entsprechende infinitesimale Transformation $\xi(x)\frac{df}{dx} + \eta(y)\frac{df}{dy}$ durch *Quadratur*. Nimmt man sodann die Differentialgleichung der geodätischen Curven:

$$y'' = \psi(x\, y\, y')$$

und setzt

$$A(f) = \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} + \psi \frac{df}{dy'},$$

$$B(f) = \xi \frac{df}{dx} + \eta \frac{df}{dy} + \zeta \frac{df}{dy'},$$

so bilden die beiden linearen partiellen Differentialgleichungen

$$A(f) = 0, \qquad B(f) = 0$$

ein vollständiges System, dessen Multiplicator (Math. Ann. Bd. XI, p. 501) aufgestellt werden kann, da man nach Jacobi den Multiplicator von $A(f) = 0$ schon kennt, und überdies die Differentialinvariante

$J(65)$ identisch verschwindet. Hiernach integrirt man leicht das vollständige System, sowie die Gleichung $Af = 0$, womit die gesuchten geodätischen Curven bestimmt sind.*)

Bei meiner früheren Bestimmung der geodätischen Curven einer jeden Fläche, die meiner dritten Classe angehört, durch *Differentiation* wurde ausdrücklich vorausgesetzt, dass das entsprechende Bogenelement schon auf die Form

$$e^w = \varphi''(x+y) - \Phi''(x-y)$$

gebracht war. Es ist indess unmittelbar evident, dass diese Voraussetzung nicht nothwendig ist, wenn die betreffende infinitesimale Transformation schon bekannt ist.

Ist eine beliebige Fläche vorgelegt, so lässt sich immer durch ausführbare Operationen entscheiden, ob ihre geodätische Curve eine oder sogar mehrere infinitesimale Transformationen gestatten. Existirt eine und nur eine solche Transformation, so findet man dieselbe durch *Quadratur*, und kann sie sodann für die Bestimmung der geodätischen Curven in Uebereinstimmung mit den obenstehenden Entwickelungen verwerthen. Giebt es mehrere infinitesimale Transformationen, so verlangt ihre Bestimmung *höchstens* die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung; in mehreren Fällen lässt sie sich durch Quadratur leisten.**)

Wenn daher die geodätischen Curven einer Fläche eine oder mehrere infinitesimale Transformationen gestatten, so verlangt die Bestimmung dieser Curven höchstens die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Sucht man z. B. die geodätischen Curven einer Fläche, deren Bogenelement die Form

$$ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy$$

erhalten kann, so wird das Integrationsproblem leicht auf eine Differentialgleichung 1. O. reducirt. Diese Gleichung lässt sich, wenn a von

*) Einfacher als die Entwickelungen des Textes ist die folgende Methode, die ohne Zweifel bekannt ist. Bei der infinitesimalen Verschiebung beschreiben alle Punkte der Fläche *isotherme* Curven, die zusammen mit ihren Orthogonalcurven durch *Quadratur* bestimmt werden. Wählt man dieselben zu Coordinatencurven u, v, so erhält das Bogenelement sogleich die Form

$$ds^2 = du^2 + \Phi(u)\,dv^2,$$

die sodann unmittelbar auf die canonische Form

$$ds^2 = \Psi(x-y)\,dx\,dy$$

gebracht wird. Hieraus aber findet man leicht die geodätischen Curven durch Quadratur.

**) Dies ist insbesondere sicher der Fall, wenn die vorgelegte Fläche gleichzeitig mehreren unter meinen drei Classen angehört; inzwischen sehen wir dabei von den Flächen constanter Krümmung ab.

Null verschieden ist, nicht durch Quadratur erledigen. Diejenigen Curven, welche die Punkte der Fläche durch continuirliche Ausführung der infinitesimalen Transformation beschreiben, sind *isotherme* Curven, und werden daher, wie auch ihre Orthogonalcurven, durch Quadratur gefunden. Gleichzeitig bestimmt man die auf der Fläche gelegenen Curven, deren Bogenlänge gleich Null ist. Hiernach kann man das Bogenelement der Fläche auf die canonische Form $ds^2 = e^{ax}\Phi(x-y)\,dx\,dy$ bringen.

Liouville hat bekanntlich*) gezeigt, dass die geodätischen Curven einer jeden Fläche, deren Bogenelement schon auf die Form

$$ds^2 = [\psi(x+y) + \Psi(x-y)]\,dx\,dy$$

gebracht ist, durch Quadratur bestimmt werden können. Hiermit stehen offenbar die vorangehenden Entwickelungen, insofern sie sich auf Flächen dritter Classe beziehen, in genauester Verbindung. Das Neue bei meinen allerdings mehr speciellen Theorien liegt einerseits darin, dass es für mich nicht nothwendig ist, dass das Bogenelement schon auf die Liouville'sche Form gebracht ist, andererseits darin, dass ich in gewissen Fällen die von Liouville verlangten Quadraturen durch Differentiationen ersetze.

43. Durch Verknüpfung einiger von Liouville und Bour herrührenden Entwickelungen, die ich sogleich reproducire, mit meinen vorangehenden Untersuchungen erhält man einen interessanten Satz über die Form des Bogenelementes aller Flächen, die meiner dritten Classe angehören.

Besitzt die Differentialgleichung der geodätischen Curven

$$y'' = y'\frac{dw}{dx} - y'^2\frac{dw}{dy}$$

ein oder mehrere Integrale von der Form

$$U = f(xy) + y'\varphi(xy) + \frac{1}{y'}\psi(xy), \tag{71}$$

so müssen die Grössen f, φ und ψ die Relationen

$$\frac{d\varphi}{dy} = \varphi\frac{dw}{dy}, \quad \frac{df}{dx} = -\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\frac{dw}{dx},$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \psi\frac{dw}{dx}, \quad \frac{df}{dx} = -\frac{d\psi}{dy} - \psi\frac{dw}{dy}$$

erfüllen. Also besitzen φ und ψ die Form

$$\varphi = X_1(x)\,e^w, \quad \psi = Y_1(y)\,e^w,$$

während die nach x und y genommenen Differentialquotienten von f die Werthe

*) Application d'analyse à la géométrie, par Monge, édition de Liouville, pag. 577.

$$\frac{df}{dx} = -2Y_1\frac{d}{dy}(e^w) - Y_1'e^w, \quad \frac{df}{dy} = -2X_1\frac{d}{dx}(e^w) - X_1'e^w$$

aufweisen. Um das hiermit gefundene Integral

$$U = f + X_1e^w y' + Y_1e^w\frac{1}{y'} \tag{72}$$

zu vereinfachen, führen wir statt x und y neue Variabeln $x_1(x)$, $y_1(y)$ ein. Es wird dann:

$$U = f + X_1\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 e^{w_1}\frac{dy_1}{dx_1} + Y_1\left(\frac{dy_1}{dy}\right)^2 e^{w_1}\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}.$$

Bestimmen wir daher x_1 und y_1 durch die Relationen

$$dx_1 = \frac{dx}{\sqrt{X_1}}, \quad dy_1 = \frac{dy}{\sqrt{Y_1}},$$

so wird

$$U = f + e^{w_1}y_1' + e^{w_1}\frac{1}{y_1'}$$

und

$$\frac{df}{dx_1} = -2\frac{d(e^{w_1})}{dy_1}, \quad \frac{df}{dy_1} = -2\frac{d(e^{w_1})}{dx_1}$$

und in Folge dessen

$$\frac{d^2(e^{w_1})}{dx_1^2} - \frac{d^2(e^{w_1})}{dy_1^2} = 0, \quad e^{w_1} = \psi(x_1 + y_1) + \Psi(x_1 - y_1).$$

Hiermit ist gezeigt, dass ein Integral von der Form (71) *nur dann auftritt, wenn das betreffende Bogenelement die Liouville'sche Form annehmen kann. Existiren zwei oder noch mehr Integrale der Form* (71), *so kann das Bogenelement in mehrfacher Weise die Liouville'sche Form erhalten.*

Diesen bekannten Satz werden wir auf eine Fläche meiner dritten Classe anwenden. Wir bemerken dann zunächst, dass die Form des früher durch Differentiation gefundenen Integrals

$$J_1 = \alpha - e^w\left(y' + \frac{1}{y'}\right)$$

mit den soeben angestellten Betrachtungen übereinstimmt. Es ist leicht zu verificiren, dass auch das Integral

$$J_2 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \left(y' + \frac{1}{y'}\right)\left(B(\beta) - 2\alpha\beta\right) - \left(y' - \frac{1}{y'}\right)\beta\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right)$$

die Form (72) besitzt. Denn nach den Formeln (69), (70) ist:

$$B(\beta) - 2\alpha\beta = \left(\frac{A}{3} - X'' - Y''\right)e^w,$$

$$\beta\left(\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dx}\right) = (Y'' - X'')\,e^w,$$

und also wird:

$$J_2 = B(\alpha) - 4\beta^2 - \alpha^2 - \left(\frac{A}{3} - 2X''\right)e^w y' - \left(\frac{A}{3} - 2Y''\right)e^w \frac{1}{y'}.$$

Ist dabei $X'' - Y'' \gtrless 0$, so sind J_2 und J_1 unabhängige Integrale; und daher kann das betreffende Bogenelement in mehrfacher Weise; ja sogar in unendlich vielen Weisen auf die Liouville'sche Form gebracht werden. Bezeichnet man nämlich mit λ eine willkürliche Constante, so ist $J_2 + \lambda J_1$ immer ein Integral der Form (72). Setzt man daher

$$dx_1 = \frac{dx}{\sqrt{2X'' - \frac{1}{3}A + \lambda}}, \quad dy_1 = \frac{dy}{\sqrt{2Y'' - \frac{1}{3}A + \lambda}}$$

und führt sodann x_1 und y_1 als neue Variabele ein, so erhält die Grösse e^{w_1} immer wieder die Form

$$e^{w_1} = \psi(x_1 + y_1) + \Psi(x_1 - y_1).$$

Alle Flächen meiner dritten Classe, die nicht durch die Formeln der Nummer 13 *geliefert werden, haben somit die charakteristische Eigenschaft, dass ihr Bogenelement in unendlich vielen Weisen die Liouville'sche Form* $e^w = \psi(x + y) + \Psi(x - y)$ *erhalten kann.*

Wir haben in der That schon gesehen, dass z. B. das Bogenelement $e^w = x + y$ in mehrfacher Weise die Liouville'sche Form erhalten kann. Dieselbe Bemerkung gilt u. A. auch für die Flächenfamilien

$$e^w = xy + 1, \quad e^w = \frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2}.$$

Hierzu fügen wir noch die folgende interessante Bemerkung. Aus den in § 4 gefundenen Formeln

$$\frac{\delta x}{\delta t} = \xi = \varphi'(x + y) + \Phi'(x - y) + X',$$

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \eta = \varphi'(x + y) - \Phi'(x - y) + Y'$$

ergiebt sich:

$$\frac{\delta(x+y)}{\delta t} = 2\varphi' + X' + Y', \qquad \frac{\delta(x-y)}{\delta t} = 2\Phi' + X' - Y'.$$

Ist nun

$$X'' = Y'' = a = \text{Const.},$$
$$X' = ax + b, \quad Y' = ay + c,$$

so wird

$$\frac{\delta(x+y)}{\delta t} = 2\varphi'(x + y) + a(x + y) + b + c,$$

$$\frac{\delta(x-y)}{\delta t} = 2\Phi'(x - y) + a(x - y) + b - c.$$

In diesem Falle wird eine jede der isothermen Curvenschaaren

$$x + y = \text{Const.} \quad \text{und} \quad x - y = \text{Const.}$$

in sich transformirt durch die infinitesimale Transformation $\delta x = \xi\,\delta t$, $\delta y = \eta\,\delta t$.

Die in Nummer 13 *bestimmten Flächen dritter Classe lassen sich daher auch dadurch charakterisiren, dass sie ein isothermes Orthogonalsystem enthalten, welches bei der betreffenden infinitesimalen Transformation invariant bleibt.*

Note 3.

Bestimmung aller Formen, welche die Transformationsgruppe der geodätischen Curven einer Fläche besitzen kann.

Will man meine Theorie der Transformationsgruppen als bekannt voraussetzen, so ist es nicht schwierig die vorangehenden Theorien wesentlich zu vervollständigen. Es ist in der That möglich die Form der Transformationsgruppe der geodätischen Curven einer Fläche a priori anzugeben, und gleichzeitig die entsprechende Gleichungsform der geodätischen Curven aufzustellen.

Hat die betreffende Fläche constante Krümmung, so können ihre geodätischen Curven nach Beltrami's Untersuchungen durch eine lineare Gleichung

$$a\,X(xy) + b\,Y(xy) + c = 0 \tag{73}$$

dargestellt werden. Also gestatten die geodätischen Curven einer solchen Fläche jedenfalls die ∞^8 linearen Transformationen der Grössen X, Y. Und da die Gruppe der linearen Punkttransformationen einer Ebene in keiner mehr umfassenden Transformationsgruppe der Ebene enthalten ist, so schliessen wir, dass die geodätischen Curven einer Fläche constanter Krümmung keine weiteren Transformationen als die soeben besprochenen linearen Transformationen der Grössen X und Y gestatten.

44. Indem wir uns jetzt zur Betrachtung von Flächen, deren Krümmung *nicht* constant ist, wenden, stützen wir uns auf Beltrami's Satz, dass die geodätischen Curven einer solchen Fläche nie durch eine lineare Gleichung der Form (73) dargestellt werden. Wir suchen daher die allgemeinste Gruppe von Punkttransformationen einer Ebene, welche zweifach unendlich viele Curven, die sich nicht durch eine lineare Gleichung darstellen lassen, unter sich vertauschen.

Jede Gruppe hat, wie wir wissen, zweigliedrige Untergruppen, die, wenn ich wie gewöhnlich

$$\frac{df}{dx} = p, \qquad \frac{df}{dy} = q$$

setze, eine unter den Formen

$$q,\ X(x)q;\quad q, yq;\quad q, p;\quad q, xp + yq$$

besitzen. Lässt die zweigliedrige Gruppe $q, X(x)q$ eine zweifach unendliche Curvenschaar invariant, so giebt es unter diesen Curven sicher solche, deren Gleichung sich hinsichtlich y auflösen lässt. Sei $y = f(x)$ eine solche Curve der Schaar. Alsdann gehören alle Curven mit der Gleichungsform

$$y = f(x) + a + bX,$$

was auch die Constanten a und b sind, unserer Schaar an. Und also wird diese Schaar dargestellt durch eine Gleichung, die hinsichtlich der *Constanten linear* ist. Gestatten daher die geodätischen Curven einer Fläche eine Transformationsgruppe mit einer Untergruppe der Form $q,\ Xq$, so hat die Fläche constante Krümmung.

Ich will sodann annehmen, dass die zweigliedrige Gruppe q, yq eine zweifach-unendliche Curvenschaar invariant lässt, und dass $y = f(x)$ wiederum eine Curve der Schaar ist. Dann gehören alle Curven mit der Gleichungsform

$$y = af(x) + b$$

mit den beiden willkürlichen Constanten a und b unserer Schaar an. Dieselbe wird daher auch jetzt durch eine lineare Gleichung dargestellt. Hieraus folgt wie soeben, dass nur auf den Flächen constanter Krümmung die geodätischen Curven eine Gruppe mit einer Untergruppe der Form q, yq gestatten können.

Die geodätischen Curven einer Fläche, deren Krümmung nicht constant ist, gestatten daher jedenfalls nur solche Transformationsgruppen, deren sämmtliche zweigliedrige Untergruppen entweder die Form p, q oder die Form $p, xp + yq$ besitzen. Setzt man nun meine Aufzählung aller Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene als bekannt voraus, so erhält man ohne Weiteres den folgenden wichtigen Satz:

Satz 27. *Die Transformationsgruppe einer Differentialgleichung* $y'' = f(xyy')$, *die nicht durch Punkttransformation auf die Form* $y'' = 0$ *gebracht werden kann, besitzt eine der folgenden Formen:*

$$p;\quad p, q;\quad p, xp + yq;\quad p, q, xp + \lambda yq;$$

$$p, q, xp + (y + x)q;\quad p, xp + yq, x^2p + (2xy + \lambda y^2 q).$$

Wenn daher die geodätischen Curven einer Fläche eine Transformationsgruppe gestatten, so besitzt diese Gruppe 1, 2, 3 *oder* 8 *Parameter. Der letzte Fall entspricht den Flächen constanter Krümmung.*

45. Einer jeden unter den hiermit aufgestellten Transformationsgruppen entspricht eine bestimmte Gleichungsform der betreffenden geodätischen Curven:

1) Gestatten die geodätischen Curven die infinitesimale Transformation p, so hat ihre Gleichung die Form:

$$x + a + f(y, b) = 0,$$

wobei a und b willkürliche Constante sind.

2) Gestatten die geodätischen Curven die beiden permutablen infinitesimalen Transformationen p und q, so hat ihre Gleichung die Form:

$$y + b = f(x + a).$$

3) Gestatten die geodätischen Curven die infinitesimalen Transformationen p und $xp + yq$, so hat ihre Gleichung die Form:

$$ay = f(ax + b).$$

4) Gestatten die geodätischen Curven die drei infinitesimalen Transformationen p, q, $xp + \lambda yq$, so hat ihre Gleichung (wenn λ nicht verschwindet) die Form:

$$y + b = K(x + a)^{\lambda}$$

wobei a und b willkürliche Constante sind, während die Grösse K für eine gegebene Fläche einen bestimmten Werth hat.

5) Gestatten die geodätischen Curven die drei infinitesimalen Transformationen p, q, $xp + (y + x)q$, so hat ihre Gleichung die Form:

$$y + b = (x + a) \log (x + a) + K(x + a),$$

wobei die Constante K wiederum in jedem einzelnen Falle einen bestimmten Werth besitzt.

6) Gestatten die geodätischen Curven die drei infinitesimalen Transformationen p, $xp + yq$, $x^2p + 2xyq$, so hat ihre Gleichung die Form:

$$K(x + a)\big(1 - (x + a)b\big) = y,$$

wo abermals K für eine gegebene Fläche einen bestimmten Werth besitzt.

7) Gestatten endlich die geodätischen Curven die drei infinitesimalen Transformationen p, $xp + yq$, $x^2p + (2xy + y^2)q$, so hat ihre Gleichung die Form:

$$y = K(x + a)\big(1 - (y + x + a)b\big),$$

wo die Constante K, wie in den früheren Fällen, für eine gegebene Fläche einen bestimmten Werth besitzt.

Die in die drei ersten unter den aufgestellten Gleichungsformen eingehenden willkürlichen Functionen lassen sich näher bestimmen. Hierauf gehe ich indess bei dieser Gelegenheit nicht näher ein.

Note 4.

Ueber Flächen, deren geodätische Curven eine Gleichung von gegebener Form erfüllen.

46. Wir stellen uns nun noch die allgemeine Aufgabe, das Bogenelement

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 \tag{74}$$

einer jeden Fläche zu bestimmen, deren geodätische Curven eine *gegebene* Gleichung

$$\Omega(u\ v\ a\ b) = 0$$

zwischen u, v und zwei willkürlichen Constanten a, b befriedigen.

Wir bilden die Differentialgleichung der geodätischen Curven

$$F\left(u\ v\ \frac{du}{dv}\ \frac{d^2u}{dv^2}\right) = 0$$

derjenigen Fläche, deren Bogenelement durch (74) gegeben ist. Sodann differentiiren wir $\Omega = 0$ zweimal hinsichtlich v, und bilden sodann durch Elimination von a und b die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Phi\left(u\ v\ \frac{du}{dv}\ \frac{d^2u}{dv^2}\right) = 0,$$

die mit $F = 0$ identisch sein soll. Dies giebt mehrere und zwar vier Bedingungsgleichungen zwischen u, v und den ersten Differentialquotienten von E, F und G hinsichtlich u und v. Es fragt sich, ob diese partiellen Differentialgleichungen 1. O. mit drei unbekannten Functionen E, F und G gemeinsame Lösungen besitzen.

Es ist denkbar, und zwar ist dies im Allgemeinen der Fall, dass es gar kein Werthsystem E, F, G giebt, welches unsere Bedingungsgleichungen erfüllt. Alsdann giebt es keine Fläche, deren geodätische Curven durch eine Relation der Form $\Omega = 0$ bestimmt werden können. Man kann immer durch sogenannte ausführbare Operationen entscheiden, ob dieser Fall vorliegt oder nicht.

Haben unsere Bedingungsgleichungen gemeinsame Lösungen, so giebt es Flächen, deren geodätische Linien durch eine Relation der Form $\Omega = 0$ bestimmt werden, und zwar sind hierbei zwei Fälle möglich.

Es ist denkbar, dass es ein und nur ein Werthsystem E, F, G giebt, das unsere Bedingungsgleichungen erfüllt. In diesem Falle verlangt die Bestimmung der Grössen E, F und G als Functionen von u und v nur ausführbare Operationen, das heisst Differentiationen und Eliminationen. Dieser Fall tritt ein, wenn es unter den Flächen, deren

geodätische Curven durch $\Omega = 0$ bestimmt werden, *eine* giebt, deren Bogenelement weder die Form

$$ds^2 = \big(\psi(x+y) + \Psi(x-y)\big)\, dx\, dy \tag{75}$$

noch die Form

$$ds^2 = \big(y + X(x)\big)\, dx\, dy \tag{76}$$

erhalten kann. Denn unter dieser Voraussetzung sind *alle* Flächen, deren geodätische Linien durch $\Omega = 0$ bestimmt werden, auf einander abwickelbar und besitzen somit dasselbe Bogenelement.

Es ist aber auch denkbar, dass es unendlich viele Systeme der Functionen E, F und G giebt, welche die vier Bedingungsgleichungen erfüllen. Dieser Fall tritt ein, wenn die Gleichung $\Omega = 0$ die geodätischen Linien einer Fläche bestimmt, deren Bogenelement entweder die Form (75) oder die Form (76) erhalten kann. In diesem Falle kann die Bestimmung der Grössen E, F und G als Functionen von u und v immer auf die Integration von gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen zurückgeführt werden.

Besonders interessant ist der Fall, dass die durch $\Omega = 0$ bestimmten geodätischen Curven infinitesimale Transformationen gestatten. In diesem Falle reducirt sich das Problem jedesmal auf die Integration eines gewöhnlichen simultanen Systems, das selbst infinitesimale Transformationen gestattet. Hiernach können bei der Integration dieses Systems diejenigen Theorien, die ich in Bd. XI dieser Annalen entwickelt habe, verwerthet werden.

47. Die Frage nach dem Bogenelemente

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

einer Fläche, deren geodätische Curven eine gegebene Differentialgleichung 1. O. mit einer willkürlichen Constante

$$f\left(u\, v\, \frac{du}{dv}\right) = a$$

erfüllen, lässt sich auf das soeben behandelte Problem zurückführen. Denn durch Differentiation der letzten Gleichung erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die mit der Differentialgleichung der geodätischen Curven identisch sein soll, sodass man wiederum Bedingungsgleichungen zur Bestimmung von E, F und G ohne Weiteres erhalten kann. Bei iher Behandlung können selbstverständlicherweise dieselben Fälle wie soeben eintreten.

Note 5.

Zur Theorie der geodätischen Curven der Minimalflächen*).

Liouville hat bekanntlich gezeigt, dass die geodätischen Curven einer jeden Fläche, deren Bogenelement die Form

$$(1) \qquad ds^2 = \big(\psi(x+y) + \Psi(x-y)\big)\, dx\, dy$$

besitzt, bestimmt werden können. Sucht man daher specielle Minimalflächen, deren geodätische Curven bestimmbar sind, so liegt es nahe, zuerst *alle Minimalflächen aufzufinden, deren Bogenelement die Form* (1) *erhalten kann.* Nun aber hat das Bogenelement der Minimalflächen die Form

$$(2) \qquad ds^2 = f(X)\,\varphi(Y)\,(1+XY)^2\,X'\,Y'\,dx\,dy,$$

wo $X(x)$ und $Y(y)$ arbiträre Functionen ihrer Argumente sind. Es handelt sich daher darum die Functionalgleichung

$$(3) \quad f(X)\varphi(Y)(1+2XY+X^2Y^2)X'Y' = \psi(x+y)+\Psi(x-y)$$

in allgemeinster Weise zu erfüllen. Setzen wir:

$$f(X)\,X' = X_1, \quad \varphi(Y)\,Y' = Y_1$$

und für einen Augenblick:

$$X_1 Y_1 + 2XX_1\,YY_1 + X^2X_1\,Y^2Y_1 = \Omega,$$

so findet unser Problem seinen analytischen Ausdruck in der Gleichung:

$$\frac{d^2\Omega}{dx^2} - \frac{d^2\Omega}{dy^2} = 0$$

oder durch Ausführung in der äquivalenten:

$$X_1''Y_1 + 2(XX_1)''\,YY_1 + (X^2X_1)''\,Y_2Y_1 - X_1Y_1'' - 2XX_1(YY_1)'' - X^2X_1(Y^2Y_1)'' = 0.$$

Dividiren wir mit $X_1 Y_1$, so kommt:

$$(4) \qquad \frac{X_1''}{X_1} + 2\frac{(XX_1)''}{X_1}Y + \frac{(X^2X_1)''}{X_1}Y^2 - \frac{Y_1''}{Y_1} - 2X\frac{(YY_1)''}{Y_1} - X^2\frac{(Y^2Y_1)''}{Y_1} = 0$$

und durch dreimalige Differentiation hinsichtlich X:

$$\frac{d^3}{dX^3}\Big(\frac{X_1''}{X_1}\Big) + 2\frac{d^3}{dX^3}\Big(\frac{(X_1X)''}{X_1}\Big)Y + \frac{d^3}{dX^3}\Big(\frac{(X_1X^2)''}{X_1}\Big)Y^2 = 0.$$

Diese Gleichung zerlegt sich, da Y keine Constante und noch weniger eine Function von x sein darf, in die drei folgenden:

$$\frac{d^3}{dX^3}\frac{X_1''}{X_1} = 0, \quad \frac{d^3}{dX^3}\frac{(X_1X)''}{X_1} = 0, \quad \frac{d^3}{dX^3}\frac{(X_1X^2)'}{X_1} = 0,$$

woraus durch Integration:

*) Vergl. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, 1882, p. 490 ff.

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{X_1''}{X_1} = a_0 + 2a_1 X + a_2 X^2, \\ \dfrac{(X_1 X)''}{X_1} = b_0 + 2b_1 X + b_2 X^2, \\ \dfrac{(X_1 X^2)''}{X_1} = c_0 + 2c_1 X + c_2 X^2, \end{cases}$$

wo die Grössen a_k, b_k und c_k Constante sind. Durch Einführung dieser Werthe in (4) folgt:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{Y_1''}{Y_1} = a_0 + 2b_0 Y + c_0 Y^2, \\ \dfrac{(Y_1 Y)''}{Y_1} = a_1 + 2b_1 Y + c_1 Y^2, \\ \dfrac{(Y_1 Y^2)''}{Y_1} = a_2 + 2b_2 Y + c_2 Y^2. \end{cases}$$

Die vereinigten Gleichungen (5) und (6) bestimmen die unbekannten Functionen $X_1\ X\ Y_1\ Y$ vollständig. Ich will zuerst die Gleichungen (5) betrachten. Durch Combination der beiden ersten Gleichungen (5) folgt:

$$(7)\quad 2\,\frac{X_1'}{X_1}\,X' + X'' = b_0 + (2b_1 - a_0)\,X + (b_2 - 2a_1)\,X^2 - a_2 X^3,$$

und in entsprechender Weise geben die erste und die letzte unter den Gleichungen (5):

$$(8)\qquad 4\,\frac{X_1'}{X_1}\,XX' + 2XX'' + 2X'^2 = c_0 + 2c_1 X + (c_2 - a_0)\,X^2 - 2a_1 X^3 - a_2 X^4.$$

Durch Elimination von X_1 zwischen (7) und (8) folgt:

$$(9)\qquad 2X'^2 = c_0 + 2(c_1 - b_0)\,X + (c_2 + a_0 - 4b_1)\,X^2 + 2(a_1 - b_2)\,X^3 + a_2 X_4,$$

und durch eine ähnliche Behandlung der Gleichungen (6):

$$(10)\qquad 2Y'^2 = a_2 + 2(b_2 - a_1)\,Y + (c_2 + a_0 - 4b_1)\,Y^2 + 2(b_0 - c_1)\,Y^3 + c_0 Y^4.$$

Um die beiden Gleichungen (9) und (10) zu vereinfachen, bemerken wir, dass die Form des Bogenelements (2) im wesentlichen ungeändert bleibt, wenn wir X durch

$$\frac{\alpha X + \beta}{\gamma X + \delta}$$

und Y durch

$$\frac{-\delta Y + \gamma}{\beta Y - \alpha}$$

ersetzen, dabei vorausgesetzt, dass $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ beliebige Constante be-

zeichnen. Wir wählen diese Constanten derart, dass die Gleichungen (9) und (10) eine möglichst einfache Form erhalten. Schliessen wir vorläufig den Ausnahmefall, dass die Gleichung vierten Grades

$$0 = c_0 + 2(c_1 - b_0)\,X + (c_2 + a_0 - 4b_1)\,X^2 + 2(a_1 - b_2)\,X^3 + a_2 X^4$$

drei und nur drei gleiche Wurzeln besitzt, aus, so können wir offenbar die Constanten α, β, γ, δ derart wählen, dass in den transformirten Gleichungen (9) und (10) die ungeraden Potenzen von X und Y verschwinden, so dass

$$c_1 - b_0 = 0, \quad a_1 - b_2 = 0$$

sind. Um die Formeln abzukürzen, setzen wir

$$c_2 + a_0 - 4b_1 = \omega,$$

wodurch (9) die Form

$$2X'^2 = c_0 + \omega X^2 + a_2 X^4 \tag{11}$$

annimmt. Durch Differentiation kommt:

$$2X'' = \omega X + 2a_2 X^3, \tag{12}$$

$$2\frac{X'''}{X'} = \omega + 6a_2 X^2. \tag{13}$$

Gleichung (7) giebt:

$$2\frac{X_1'}{X_1} = \frac{b_0 + (2b_1 - a_0)\,X + (b_2 - 2a_1)\,X^2 - a_2 X^3 - X''}{X'},$$

woraus durch Differentiation und Multiplication mit $2X'^2$:

$$\begin{cases} 4\frac{X_1''}{X_1}X'^2 - 4\left(\frac{X_1'}{X_1}X'\right)^2 = 2X'^2\left(2b_1 - a_0 + 2(b_2 - 2a_1)\,X - 3a_2 X^2\right) \\ -2X'X''' - 2X''\left(b_0 + (2b_1 - a_0)\,X + (b_2 - 2a_1)\,X^2 - a_2 X^3 - X''\right). \end{cases} \tag{13'}$$

Hier führen wir die früher gefundenen Werthe von $\frac{X_1''}{X_1}$, $\frac{X_1'}{X_1}X'$, X'^2, X'' und X''' ein und erhalten dadurch die Relation:

$$\begin{aligned} &(c_0 + \omega X^2 + a_2 X^4)(2b_1 - 3a_0 - 6a_1 X - 5a_2 X^2) \\ &\quad + \left(b_0 + (2b_1 - a_0)\,X - a_1 X^2 - a_2 X^3\right)^2 \\ &\quad - 2(\omega X + 2a_2 X^3)\left(b_0 + (2b_1 - a_0)\,X - a_1 X^2 - a_2 X^3\right) \\ &+ \tfrac{3}{4}(\omega X + 2a_2 X^3)^2 - \tfrac{1}{2}(\omega + 6a_2 X^2)(c_0 + \omega X^2 + a_2 X^4) = 0. \end{aligned}$$

Dieselbe zerlegt sich, da X keine Constante sein darf, in 7 Gleichungen, unter denen jedoch zwei identisch bestehen, so dass wir nur die fünf folgenden erhalten:

$$(14)\quad \begin{cases} c_0(2b_1-3a_0)+b_0^2-\frac{1}{2}c_0\omega=0, \\ -6a_1c_0+2b_0(2b_1-a_0)-2b_0\omega=0, \\ -8a_2c_0-2b_0a_1+(2b_1-a_0)^2+\frac{1}{4}\omega^2-\omega(2b_1+a_0)=0, \\ -4a_1\omega-6a_2b_0-2a_1(2b_1-a_0)=0, \\ a_2(3a_0-10b_1)+a_1^2-\frac{7}{2}a_2\omega=0. \end{cases}$$

Durch eine entsprechende Behandlung der Gleichungen (6) und (10) erhält man die analogen Relationen:

$$(15)\quad \begin{cases} a_2(2b_1-3a_0)+a_1^2-\frac{1}{2}a_2\omega=0, \\ -6b_0a_2+2a_1(2b_1-a_0)-2a_1\omega=0, \\ -8a_2c_0-2b_0a_1+(2b_1-a_0)^2+\frac{1}{4}\omega^2-\omega(2b_1+a_0)=0, \\ -4b_0\omega-6c_0a_1-2b_0(2b_1-a_0)=0, \\ c_0(3a_0-10b_1)+b_0^2-\frac{7}{2}c_0\omega=0, \end{cases}$$

unter denen jedoch die dritte mit der dritten Gleichung des Systems (14) identisch ist. Wir subtrahiren jede Gleichung, etwa die k^{te} des Systems (15) von der $(5-k)^{\text{ten}}$ des Systems (14) und erhalten hierdurch die vier folgenden sehr einfachen Relationen

$$\begin{aligned} c_0(c_2-a_0)&=0, \\ b_0(c_2-a_0)&=0, \\ a_1(c_2-a_0)&=0, \\ a_2(c_2-a_0)&=0, \end{aligned}$$

welche zeigen, dass es naturgemäss ist, die beiden Hypothesen $c_2 \gtrless a_0$ und $c_2 = a_0$ getrennt zu behandeln.

Ist $c_2 - a_0 \gtrless 0$, so kommt

$$c_0 = b_0 = a_1 = a_2 = 0 = c_1 = b_2.$$

Die Gleichungen (9) und (10) geben:

$$2X'^2 = \omega X^2, \quad 2Y'^2 = \omega Y^2,$$

wo ω nicht verschwinden darf, indem X und Y keine Constanten sein können. Setzen wir

$$\omega = 2k^2,$$

so wird

$$X' = kX, \quad Y' = \pm kY,$$

und

$$X = Ae^{kx}, \quad Y = Be^{\pm ky}.$$

X_1 wird bestimmt durch (7)

$$\frac{X_1'}{X_1} = \frac{2b_1 - a_0 - k^2}{2k} = \varepsilon,$$

woraus

$$X_1 = Ce^{\varepsilon x}.$$

Dementsprechend ist:

$$Y_1 = De^{\pm \varepsilon y}.$$

Die entsprechende Minimalfläche ist, wie man leicht verificirt, auf eine Rotationsfläche abwickelbar.

Sei jetzt $c_2 - a_0 = 0$. Alsdann befriedigen die Constanten die folgenden Relationen:

$$(16) \quad \begin{cases} 4c_0(b_1 - a_0) + b_0^2 = 0, \\ -a_1 c_0 + b_0(2b_1 - a_0) = 0, \\ -4a_2 c_0 - b_0 a_1 + 4b_1(2b_1 - a_0) = 0, \\ a_1(a_0 - 2b_1) + a_2 b_0 = 0, \\ 4a_2(b_1 - a_0) + a_1^2 = 0. \end{cases}$$

Durch Combination der zweiten und vierten unter diesen Gleichungen folgt:

$$b_0 a_1 \{a_2 c_0 - (2b_1 - a_0)^2\} = 0 = b_0 a_1 \Delta.$$

Setzen wir zunächst voraus, dass Δ von Null verschieden ist, so muss entweder b_0 oder a_1 verschwinden. Nun aber ist klar, dass bei der Vertauschung von x und y die Grössen b_0 und a_1 unter sich vertauscht werden. Daher können wir ohne Beschränkung $b_0 = 0$ setzen. Die zweite und vierte unter den Gleichungen (16) geben somit:

$$a_1 c_0 = 0, \quad a_1(a_0 - 2b_1) = 0,$$

sodass die Annahme $a_1 \gtrless 0$ die contradictorische Relation

$$a_0 - 2b_1 = 0 = \Delta$$

geben würde. Daher können wir annehmen, dass nicht allein b_0, sondern gleichzeitig a_1 gleich Null ist. Also geben die Gleichungen (16):

$$c_0(b_1 - a_0) = 0, \quad a_2(b_1 - a_0) = 0,$$
$$a_2 c_0 - b_1(2b_1 - a_0) = 0.$$

Wäre $b_1 - a_0 = 0$, so käme die contradictorische Gleichung

$$a_2 c_0 - b_1^2 = 0 = \Delta.$$

Also ist $b_1 - a_0 \gtrless 0$ und

$$c_0 = 0 = a_2, \quad b_1(2b_1 - a_0) = 0,$$

und da X' und Y' nicht verschwinden dürfen, folgt

$$b_1 = 0.$$

Indem man nun ganz wie bei der Discussion der Annahme $c_2 - a_0 \gtrless 0$

weiter geht, erhält man wiederum nur solche Minimalflächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind.

Jetzt müssen wir die Annahme

$$c_2 - a_0 = 0, \quad \Delta = 0 = c_0 a_2 - (2b_1 - a_0)^2$$

betrachten. In diesem Falle können die Gleichungen

$$2X'^2 = c_0 + 2(a_0 - 2b_1)X^2 + a_2 X^4,$$
$$2Y'^2 = a_2 + 2(a_0 - 2b_1)Y^2 + c_0 Y^4$$

durch die einfacheren

$$X'\sqrt{2} = \sqrt{c_0} + \sqrt{a_2}\, X^2,$$
$$Y'\sqrt{2} = \sqrt{a_2} + \sqrt{c_0}\, Y^2$$

ersetzt werden. Hier können c_0 und a_2 nicht beide verschwinden und wir können daher ohne Beschränkung annehmen, dass z. B. c_0 von Null verschieden ist. Ist dabei $a_2 = 0$, so kommt:

$$a_0 = 2b_1, \quad a_1 = 0, \quad b_0^2 - 4c_0 b_1 = 0;$$

und wenn wir

$$c_0 = 2k^2$$

setzen, folgt:

$$X = kx, \quad Y = \pm \frac{1}{ky},$$
$$X_1 = Ae^{mx}, \quad Y_1 = By^2 e^{\pm my}.$$

Die entsprechenden Minimalflächen sind auch jetzt auf Rotationsflächen abwickelbar.

Ich will nun annehmen, dass $\Delta = 0$, $a_2 \gtrless 0$, $c_0 \gtrless 0$ ist. Indem man die Grössen X, Y, x und y durch mX, $\frac{1}{m} Y$, nx und $\pm ny$ ersetzt, und sodann die Constanten m und n zweckmässig wählt, erhält man die einfacheren Gleichungen

$$X' = 1 + X^2,$$
$$Y' = 1 + Y^2.$$

Ueberdies ist

$$a_2 = c_0 = 2, \quad a_0 - 2b_1 = 2$$

und

$$b_0^2 + 8(b_1 - a_0) = 0, \quad a_1 = -b_0, \quad -16 + b_0^2 - 8b_1 = 0,$$

sodass die 9 Constanten die folgenden Werthe erhalten:

$$a_0 = \tfrac{1}{4} b_0^2 - 2, \quad a_1 = -b_0, \quad a_2 = 2,$$

$$b_0 = b_0, \quad b_1 = \tfrac{1}{8} b_0^2 - 2, \quad b_2 = -b_0,$$

$$c_0 = 2, \quad c_1 = b_0, \quad c_2 = \tfrac{1}{4} b_0^2 - 2.$$

Also kommt:

$$X = \operatorname{tg} x, \quad X_1 = A \cos^2 x \cdot e^{\frac{1}{2} b_0 x},$$

$$Y = \operatorname{tg} y, \quad Y_1 = B \cos^2 y \cdot e^{-\frac{1}{2} b_0 y}.$$

Die entsprechenden Minimalflächen sind auch jetzt auf Rotationsflächen abwickelbar. Sie sind übrigens identisch mit denjenigen, die der Hypothese $c_2 - a_0 \gtrless 0$ entsprechen.

Ich werde endlich annehmen, dass die Gleichung vierten Grades

$$0 = c_0 + 2(c_1 - b_0) X + (c_2 + a_0 - 4 b_1) X^2 + 2(a_1 - b_2) X^3 + a_2 X^4$$

drei und nur drei gleiche Wurzeln besitzt; dann kann man in (9) und (10) ohne wesentliche Beschränkung

$$c_0 = 0, \quad c_2 + a_0 - 4 b_1 = 0, \quad a_1 - b_2 = 0, \quad a_2 = 0, \quad c_1 - b_0 = 1$$

setzen. Also kommt:

$$X'^2 = X, \quad Y'^2 = -Y^3.$$

Durch Differentiation kommt:

$$2X'' = 1, \quad X''' = 0,$$

und durch Substitution in (13′):

$$(17) \quad \begin{cases} -4X(a_0 + 2a_1 X) + \left(b_0 + (2b_1 - a_0) X - a_1 X^2 - \ldots\right)^2 \\ +2X(2b_1 - a_0 - 2a_1 X) - \left(b_0 + (2b_1 - a_0) X - a_1 X^2 - \frac{1}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

woraus:

$$a_1 = 0, \; a_0 = b_1 = 0, \; \left(b_0 - \tfrac{1}{2}\right)\left(b_0 - \tfrac{3}{2}\right) = 0.$$

Andererseits ist:

$$2Y'' = -3Y^2, \quad Y''' = -3YY',$$

also, unter Benutzung der Gleichung:

$$-4\frac{Y_1''}{Y_1} Y'^2 + 4\left(\frac{Y_1'}{Y_1} Y'\right)^2 + 2Y'^2\left(2b_1 - a_0 + 2(1 - b_0) Y\right)$$

$$-2Y'Y''' - 2Y''\left((a_1 + 2b_1 - a_0) Y + (1 - b_0) Y^2 - Y''\right) = 0,$$

ebenfalls:

$$4Y^3(a_0 + 2b_0 Y) + \left(a_1 + (2b_1 - a_0) Y - \left(b_0 - \tfrac{5}{2}\right) Y^2\right)^2$$

$$-2Y^3\left(2b_1 - a_0 + 2(1 - b_0) Y\right) - 6Y^4$$

$$+3Y^2\left(a_1 + (2b_1 - a_0) Y - \left(b_0 - \tfrac{5}{2}\right) Y^2\right) = 0$$

und durch Berücksichtigung der Werthe $a_1 = 0$, $a_0 = 0$, $b_1 = 0$:

$$8b_0 + \left(b_0 - \tfrac{5}{2}\right)^2 + 4(b_0 - 1) - 6 - 3\left(b_0 - \tfrac{5}{2}\right) = 0,$$

was mit der früher gefundenen Relation

$$\left(b_0 - \tfrac{1}{2}\right)\left(b_0 - \tfrac{3}{2}\right) = 0$$

im Widerspruche steht.

Soll daher das Bogenelement einer Minimalfläche die Form

$$ds^2 = [\psi(x + y) + \psi(x - y)]\, dx\, dy$$

erhalten können, so muss dieselbe auf eine Rotationsfläche abwickelbar sein.

Die vorangehenden Entwickelungen geben gleichzeitig eine allerdings weitläufige Bestimmung der auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen. Einfacher ist es, die Functionalgleichung

$$f(X)\, \varphi(Y)\, (1 + XY)^2\, X'\, Y' = \psi(x + y)$$

direct nach der im Vorangehenden entwickelten Methode zu behandeln. Gleichzeitig findet man alle Minimalflächen, deren Bogenelement die Form

$$ds^2 = e^{ax}\, \Phi(x + y)\, dx\, dy$$

besitzt, indem auch dieses Problem durch die soeben geschriebene Functionalgleichung ausgedrückt wird.

Hiermit sind alle Minimalflächen gefunden, deren geodätische Curven eine infinitesimale Transformation gestatten.

Christiania, im April 1882.

Ueber eine Minimumsaufgabe.

Von

Heinrich Bruns in Leipzig.

In der „Zeitschrift für Vermessungswesen“ 1882, Heft 6 hat Herr Ob.-Lt. Schreiber, veranlasst durch einen concreten Fall, unter dem Titel „Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz“ folgende Aufgabe behandelt: in einem trigonometrischen Dreiecksnetze lassen sich ausser den nothwendigen und hinreichenden Richtungen noch eine Reihe überschüssiger messen, ferner ist das disponible Arbeitsquantum, d. h. die Gesammtzahl aller zu machenden Richtungseinstellungen gegeben, es sollen letztere so auf die einzelnen Richtungen vertheilt werden, dass ein bestimmtes Stück, z. B. die Distanz zweier Punkte, mit möglichst grossem Gewicht aus den Messungen gefunden werde. Es zeigt sich, dass die Lösung dieser Aufgabe darauf hinausläuft, in einem System von p linearen Functionen

$$L_\alpha = b_\alpha + a_{\alpha 1} x_1 + \cdots + a_{\alpha n} x_n$$

mit n Veränderlichen $x (n < p)$ die letzteren so zu bestimmen, dass die Summe der numerischen Werthe der L ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen ein Minimum wird. Wie man sich in der Praxis aus den näheren Bedingungen des jedesmal vorliegenden Falles die nöthigen Anhaltspunkte verschaffen kann, um durch ein geschicktes Probiren die gesuchten Werthe der x zu ermitteln, möge a. a. O. nachgesehen werden; im Folgenden soll die Aufgabe vom rein mathematischen Gesichtspunkte aus behandelt werden, indem es sich um eines der wenigen, nicht trivialen Beispiele handelt, bei denen das Minimum einer Function dadurch charakterisirt ist, dass die Ableitungen erster Ordnung in endlicher Weise unstetig werden. Die Aufgabe selbst ist nicht neu, sondern zur Ausgleichung der Beobachtungsfehler bereits von Boscovich gestellt und von Laplace weiter benutzt worden. Ebenso findet sich in der Theoria motus § 186 von Gauss die charakteristische Bedingung angegeben, dass abgesehen von Fällen, wo die Aufgabe unendlich viele Lösungen zulässt, für die gesuchten x soviele der L ver-

schwinden müssen als Unbekannte vorhanden sind. Es ist deshalb das Folgende im Wesentlichen nur als eine Ausführung der ganz aphoristisch gehaltenen Notiz von Gauss anzusehen.

§ 1.

Der Beweis für die zuletztgenannte Eigenschaft lässt sich leicht wie folgt führen. Es mögen in dem Ausdrucke

$$y = \varepsilon_1 L_1 + \cdots + \varepsilon_p L_p$$

die ε_α den Werth ± 1 besitzen, jenachdem $L_\alpha \gtrless 0$, während für $L_\alpha = 0$, der Werth von ε_α gleichgültig ist, dann ist y die Function, deren Minimum gesucht wird. An der Stelle $(k_1 \cdots k_n)$ im Gebiete der x verschwinde keines der L, man ermittle die zugehörigen ε und bilde für die Umgebung der Stelle $x = k$ die Summe $y = \Sigma \varepsilon L$. Lässt man den Grenzfall, wo y von sämmtlichen x unabhängig wird, bei Seite, so ist y für $x = k$ sicher kein Minimum; beim Hindurchgehen durch eine Minimumsstelle muss also wenigstens eines der L verschwinden. Es sei dies L_1; man eliminire mittelst der Bedingung $L_1 = 0$ eine der Unbekannten, dann kann man für das System der übrigbleibenden $p - 1$ linearen Functionen aus $n - 1$ Variablen denselben Schluss wiederholen u. s. w., bis alle Unbekannte erschöpft sind, womit offenbar der obige Satz bewiesen ist. Hieraus würde sich folgende Lösung der Aufgabe ergeben. Man bilde aus den p linearen Functionen alle Combinationen zu je n, und suche diejenigen Werthsysteme der x, für welche die zu einer Combination gehörigen L verschwinden, ermittle ferner für alle diese Werthsysteme der x die Werthe von y und suche unter diesen den kleinsten heraus. Dieses Verfahren ist indessen practisch nur dann anwendbar, wenn die Anzahl der Combinationen sehr klein ist, was bei den wirklich vorkommenden Anwendungen nur ausnahmsweise der Fall ist. Ebenso gelangt man auf diesem Wege kaum zu einem Ueberblicke über die verschiedenen Möglichkeiten, welche wirklich eintreten können.

§ 2.

Wir wollen zunächst annehmen, dass nur eine Veränderliche x vorhanden sei, und demgemäss schreiben

$$L_\alpha = a_\alpha (x - c_\alpha);$$

ferner können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die $a_\alpha > 0$, dass die c_α von einander verschieden und ihrer Grösse nach geordnet seien, also

$$c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_p.$$

Bildet man $y = \Sigma \varepsilon L$ und betrachtet xy als rechtwinklige Coordinaten, so erhält man eine Curve, welche stetig verläuft, da an den Stellen,

wo ein ε sich sprungweise von ± 1 in den entgegengesetzten Werth verwandelt, das zugehörige L verschwindet. Lässt man nun x von $-\infty$ bis $+\infty$ wandern, so sind in den einzelnen, durch die Abscissen $c_1\ c_2 \cdots$ begrenzten Intervallen die Ableitungen resp. gleich

$$(A)\quad \begin{cases} -a_1 - a_2 - \cdots - a_{p-1} - a_p = -\Sigma a_\alpha \\ +a_1 - a_2 - \cdots - a_{p-1} - a_p = -\Sigma a_\alpha + 2a_1 \\ +a_1 + a_2 - \cdots - a_{p-1} - a_p = -\Sigma a_\alpha + 2a_1 + 2a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ +a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} + a_p = -\Sigma a_\alpha + 2\Sigma a_\alpha. \end{cases}$$

Die Curve ist also eine gebrochene Linie, deren Ecken zu den Abscissen $x = c_\alpha$ gehören. Wenn von den Aggregaten (A) keines verschwindet, so sinkt die Curve zuerst beständig mit sprungweise abnehmender Geschwindigkeit bis zu einem tiefsten Punkte, für welchen eines der L_α verschwindet, um dann beständig zu steigen und zwar mit sprungweise zunehmender Geschwindigkeit. Wenn von den Aggregaten (A) eines verschwindet, so verläuft die Curve ähnlich wie vorher, nur dass das Minimum für alle Abscissen eines bestimmten Intervalles $c_q < x < c_{q+1}$ stattfindet, und dass in diesem Intervall y constant ist. Ferner folgt: jeder Werth, der grösser ist als das Minimum, wird von y an zwei und nur an zwei verschiedenen Stellen angenommen; wenn y für mehr als zwei Stellen, z. B. für die drei Abscissen $x' < x'' < x'''$ ein und denselben Werth besitzt, so ist y in dem Intervall $x' \leq x \leq x'''$ constant und zugleich Minimum.

§ 3.

Für die Untersuchung des allgemeinen Falls beschränken wir uns, was ausreichend ist, auf drei Veränderliche $x_1\, x_2\, x_3$, da dann die Resultate zugleich eine einfache geometrische Deutung zulassen. Also

$$L_\alpha = b_\alpha + a_{\alpha 1} x_1 + a_{\alpha 2} x_2 + a_{\alpha 3} x_3, \qquad y = \Sigma \varepsilon_\alpha L_\alpha.$$

Die x seien rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten eines Punktes im Raume, dann ist $y =$ Constans die Gleichung einer Schaar stetiger Flächen, da y eine stetige Function des Ortes ist. Wenn in dem Punkte $x_\alpha = k_\alpha$ keines der L verschwindet, und wenn in der Umgebung dieser Stelle in dem Ausdruck für y nicht alle x verschwinden, so ist die Gleichung

$$y(x_1\, x_2\, x_3) = y(k_1\, k_2\, k_3)$$

die Gleichung einer Ebene. In der Umgebung der Stelle k gehören also die betrachteten Flächen parallelen Ebenen an, d. h. diese Flächen selbst sind Polyeder, wobei dieses Wort in etwas allgemeinerer Bedeutung als gewöhnlich zu nehmen ist. Wandert der Punkt x längs einer Polyederfläche, so muss beim Passiren einer Kante das System der ε sich ändern, also eines der L durch Null hindurchgehen, d. h.

die Kanten liegen auf den Ebenen $L = 0$ und ebenso die Polyederecken auf den Durchschnitten je zweier dieser letzteren Ebenen.

Berücksichtigt man die in § 2 gegebenen Sätze, so folgt weiter: Längs einer bestimmten Geraden G nimmt y einen vorgeschriebenen Werth entweder in keinem oder einem oder zwei oder aber in unendlich vielen Punkten an. In dem letzten dieser vier möglichen Fälle gehören die betreffenden Punkte sämmtlich entweder einer einzigen ganz im Endlichen liegenden Strecke auf G an, oder y ist längs der ganzen Ausdehnung von G constant. Die Polyeder haben also mit einer Geraden G höchstens zwei Punkte gemeinsam, ausgenommen wenn diese Gerade in eine Polyederseite fällt; die Polyeder sind also convex.

§ 4.

Die Function y besitzt an einer Stelle $x = k$ ein Minimum, wenn in einer beliebig kleinen Umgebung des Punktes k keine kleineren Werthe von y vorkommen. Angenommen nun, dass zwei Punkte h und k existiren, in denen nach dieser Definition y ein Minimum besitzt, dann muss nach den Sätzen in § 2 y längs der geradlinigen Strecke $(h\ k)$ constant sein, d. h. y hat nur einen einzigen Minimumswerth. Aus diesem Satze folgt dann weiter: wenn y in drei Punkten, welche ein wirkliches Dreieck bilden, Minimum ist, so hat es für alle Punkte innerhalb und auf der Begrenzung des Dreiecks denselben Werth; ebenso: wenn y in vier Punkten, die ein wirkliches Tetraeder bilden, Minimum ist, so hat es für alle Punkte innerhalb und auf der Begrenzung des Tetraeders denselben Werth. Der letzte Satz lässt sich dahin umkehren, dass, wenn y innerhalb eines Raumtheils constant ist, er innerhalb desselben Gebiets zugleich den Minimalwerth annimmt. Zum Beweise hat man nur nöthig durch einen Punkt dieses Raumes nach allen Richtungen hin Gerade zu ziehen und die Sätze des § 2 über den Verlauf von y längs einer Geraden anzuwenden.

Wir wollen nun die einzelnen vorstehend nur als möglich vorausgesetzten Fälle näher untersuchen, und als wirklich vorkommend nachweisen, wobei vorauszuschicken ist, dass die L geometrisch nichts anderes bedeuten, als die mit festen Factoren multiplicirten Abstände des Punktes x von den Ebenen $L = 0$, und dass die entwickelten Beziehungen von der Wahl des Axensystems unabhängig sind. Wenn ferner y für einen im Unendlichen liegenden Punkt einen endlichen Werth annehmen kann, so müssen die L sich sämmtlich als lineare Functionen von zwei Veränderlichen darstellen lassen, d. h. die Ebenen $L = 0$ sind sämmtlich einer Geraden parallel, der betreffende Werth von y findet auch im Endlichen statt und zwar mindestens in allen Punkten einer gewissen Geraden, welche der ebengenannten parallel ist.

§ 5.

Erster Fall: das Minimum findet nur in einem einzigen Punkte P statt. Wir wählen P als Nullpunkt, dann lässt sich zeigen, dass in demselben wenigstens drei der L verschwinden. Angenommen es verschwinde keines der L, dann bleibt in einer hinreichend kleinen Umgebung von P das System der ε unverändert dasselbe und es müssten in dem Ausdrucke für y alle drei x fortfallen, weil sonst durch passende Wahl kleiner Werthe der x der Betrag von y kleiner gemacht werden könnte als in P. Wenn aber alle drei x fortfallen, so wäre y in einem Raumtheil constant und nach dem Früheren zugleich Minimum, was der Voraussetzung widerspricht, dass nur P Minimalstelle ist. Es muss also wenigstens ein L verschwinden. Es sei dies L_1; wir wählen $L_1 = 0$ als $x_2 x_3$-Ebene, also $L_1 = a_{11} x_1$. Setzt man nun $x_1 = 0$, so muss das Aggregat

$$\varepsilon_2 L_2 + \varepsilon_3 L_3 + \cdots$$

als Function von $x_2 x_3$ betrachtet für $x_2 = x_3 = 0$ und nur für diese Stelle Minimum werden. Die Anwendung derselben Schlussweise führt dann dazu, dass noch ein zweites und ein drittes L verschwinden müssen; w. z. b. w.

§ 6.

Zweiter Fall: das Minimum findet nur statt für die Punkte einer geraden Strecke G. Man wähle G als x_1-Axe und lege den Nullpunkt in G so, dass er in keinen der etwa vorhandenen Punkte fällt, welche wirkliche Durchschnitte von G mit den Ebenen $L = 0$ sind. In der Umgebung des Nullpunktes muss dann der Ausdruck für y von x_1 frei sein, dagegen x_2 und x_3 wirklich enthalten; ferner darf für ein festes hinreichend kleines x_1 y als Function von $x_2 x_3$ betrachtet nur für die Stelle $x_2 = x_3 = 0$ Minimum werden. Daraus schliesst man wie vorher, dass längs G wenigstens zwei der L verschwinden. Setzt man nun $x_2 = x_3 = 0$ und lässt x_1 variiren, um die Begrenzung von G zu finden, so sind längs G wenigstens zwei von den L beständig gleich Null; an den Grenzen von G muss mindestens je ein neues L verschwinden, während innerhalb G nur die erstgenannten Null sind.

Dritter Fall: das Minimumsgebiet ist ein Ebenenstück E. Da für diesen und den folgenden Fall sich die vorhergehenden Schlussweisen wiederholen, wird es genügen die Resultate anzugeben. E gehört einer der Ebenen $L = 0$ an, sagen wir der Ebene $L_1 = 0$. Ferner: E ist das Innere eines convexen Polygons, längs dessen Seiten von den L_2, L_3 etc. wenigstens je eines verschwindet, dagegen verschwindet innerhalb E nur L_1. Wenn E unendlich ferne Punkte enthält, besteht es aus einem von zwei parallelen Geraden begrenzten Streifen.

Vierter Fall: das Minimumsgebiet ist ein Raum T. T ist dann das Innere eines convexen Polyeders, längs dessen Seiten immer je eines der L verschwindet, während innerhalb alle L von Null verschieden sind. Wenn T unendlich ferne Punkte enthält, besteht es aus einem prismatischen Raum, der von Ebenen begrenzt wird, die einer und derselben Geraden parallel sind.

Das einfachste Beispiel für das wirkliche Vorkommen dieser vier Fälle erhält man, wenn die L die Abstände des Punktes x von den Seiten eines Tetraeders sind; man hat zum Beweise nur zu beachten, dass dem Minimumsgebiet immer Stellen angehören, in denen wenigstens drei der L verschwinden, d. h. in einer der vier Ecken der Tetraeder wird y sicher Minimum. Die vier Fälle selbst erhält man wie folgt: 1) alle vier Höhen sind ungleich, 2) die beiden kleineren Höhen sind einander gleich, 3) die drei kleineren Höhen sind einander gleich, 4) das Tetraeder ist regulär.

§ 7.

Es bedarf keiner näheren Auseinandersetzung, wie sich die vorstehenden Entwicklungen modificiren, wenn die Anzahl der x gleich zwei oder grösser als drei ist. Deshalb soll hier nur noch kurz angedeutet werden, wie man bei der numerischen Anwendung das Durchprobiren der verschiedenen Möglichkeiten auf ein Minimum reduciren kann, wobei wir wieder $n = 3$ annehmen wollen. Man setze für x_2, x_3 zwei willkürlich gewählte feste Werthe, z. B. 0, 0 ein und suche den Werth u_1 von x_1 für den y Minimum wird, substituire für x_1 $u_1 + \Delta x_1$; suche dann unter der Voraussetzung $\Delta x_1 = 0$ und $x_3 =$ dem alten Werthe den Werth u_2 von x_2, für den y ein Minimum; substituire für x_2 $u_2 + \Delta x_2$, suche für $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0$ den Werth u_3 von x_3, für den y Minimum und schreibe für x_3 $u_3 + \Delta x_3$. Die L erscheinen dann als Functionen der Δx_1, Δx_2, Δx_3. Wiederholt man dasselbe Verfahren, mit $\Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$ anfangend, so erhält man die Verbesserungen Δu_1, Δu_2, Δu_3 und hat zu substituiren $\Delta x_\alpha = \Delta u_\alpha + \Delta^2 x_\alpha$, etc. Wenn die Rechnung nicht nach wenigen Annäherungen zum Stehen kommt, so werden sich doch sehr bald diejenigen L verrathen, welche bei weiterer Fortsetzung der Procedur gegen Null convergiren würden. Die durch das Verschwinden dieser L definirte Stelle oder, wenn unendlich viele vorhanden sind, eine von ihnen, nimmt man nun als neuen Ausgangspunkt für die Wiederholung obiger Approximationen, wobei es in den meisten Fällen zweckmässig sein wird, soviele jener L als möglich statt der x als neue Variable einzuführen, d. h. soviele x als möglich mittelst jener L zu eliminiren.

Sternwarte Leipzig, 1882, Juni 5.

Ueber das Problem der Rotation.

Von

W. Hess in München.

Das Problem der Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt ist bisher nur für zwei Fälle gelöst worden — für den Fall, dass der Unterstützungspunkt mit dem Schwerpunkt zusammenliegt, und für jenen, dass der Körper ein Umdrehungskörper und der feste Punkt ein Punkt seiner Umdrehungsaxe ist (Gyroscop). Im Folgenden soll nun auf eine weitere Möglichkeit hingewiesen werden, die Euler'schen Bewegungsgleichungen zu integriren.

Wenn nämlich auf einen beliebig gestalteten, um keinen besonderen Punkt drehbaren Körper ein Kräftepaar wirkt, dessen Axe anfangs in die Vertikalebene durch den Unterstützungspunkt und Schwerpunkt fällt, so liegt die Axe fortwährend in dieser variablen Ebene, und das Problem ist auf Quadraturen zurückführbar. Die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r der Drehung um die drei Hauptträgheitsaxen durch den festen Punkt sind dabei algebraische Functionen der Inversen gewisser Integrale, unter welche Wurzeln von Gleichungen vierten Grades eingehen. Der vorstehende allgemeine Fall vereinfacht sich erheblich, sobald man annimmt, dass der Schwerpunkt auf einer der 3 Hauptaxen durch den festen Punkt gelegen ist*). Die erwähnten Integrale reduciren sich nämlich hierfür auf hyperelliptische (8. Grad), können aber für besondere Stellungen des anfänglich wirkenden Kräftepaars auch in ultraelliptische und elliptische übergehen. Was die Allgemeinheit anlangt, so stehen die beiden zu betrachtenden Arten der Bewegung im Ganzen auf höherer Stufe als die bisher behandelten Fälle der Drehung um den Schwerpunkt und jener des Gyroscops; in gleichem Masse compliciren sich auch die Functionen. Denn während die zwei letzteren Bewegungen mittelst der elliptischen Transcendenten gelöst werden können, treten bei den obigen Fällen im Allgemeinen höhere Functionen auf.

*) Der Verfasser hatte anfangs nur diesen speciellen Fall im Auge, wurde jedoch durch Herrn Prof. Mayer zur allgemeineren Untersuchung veranlasst.

I. Der Schwerpunkt liege gegen den festen Punkt beliebig.

1.

Wir beginnen mit dem allgemeinsten Problem. Ein starrer Körper vom Gewichte P enthalte einen festen Punkt O; die Hauptträgheitsaxen des Körpers für denselben seien OX', OY', OZ', die Hauptträgheitsmomente bezw. A, B, C. Der Schwerpunkt S besitze in Bezug auf dieses in dem Körper festliegende, mit demselben jedoch zugleich bewegliche Coordinatensystem die Coordinaten α, β, γ. Die veränderlichen Winkelgeschwindigkeiten der Drehung um OX', OY', OZ' seien bezw. p, q, r; dann sind nach bekanntem Satze der Mechanik die Componenten des Kräftepaars, welches geeignet ist, diese Winkelgeschwindigkeiten hervorzubringen, Ap, Bq, Cr respective.

Die Lage des Körpers zu irgend einer Zeit t ist nun bekannt, sobald man die Neigungscosinus a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' der drei Hauptaxen gegen die Axen

$$OX,\ OY,\ OZ$$

eines festen Coordinatensystems in O kennt. Dieses sei congruent OX', OY', OZ' und so gelegen, dass $+OZ$ mit der Richtung der Schwere (nach unten) übereinstimme und $+OY$ durch positive Drehung um 90^0 um die Axe $+OZ$ mit $+OX$ vereinigt werde. Der Sinn der Drehung sei dann als positiv verzeichnet, wenn er mit jenem der umgekehrten Bewegung eines Uhrzeigers übereinstimmt.

Die Euler'schen Bewegungsgleichungen für das vorgelegte Problem lauten*) nun

$$(1)\qquad \begin{cases} A\cdot\frac{dp}{dt} + (C-B)\,rq = P(\beta c'' - \gamma b''), \\ B\cdot\frac{dq}{dt} + (A-C)\,pr = P(\gamma a'' - \alpha c''), \\ C\cdot\frac{dr}{dt} + (B-A)\,qp = P(\alpha b'' - \beta a''). \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen den Neigungscosinus $a, b \cdots$ und den Winkelgeschwindigkeiten p, q, r ist vermittelt durch die Gleichungen

$$(m)\qquad \begin{aligned} &da'' = (b''r - c''q)\cdot dt, \quad db'' = (c''p - a''r)\cdot dt, \quad dc'' = (a''q - b''p)\cdot dt, \\ &da' = (b'r - c'q)\cdot dt, \qquad\qquad \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Weiter finden die bekannten 6 Relationen statt

$$(n)\qquad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \quad aa' + bb' + cc' = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

Unsere erste Aufgabe ist nun die, aus den Gleichungen (1) mittelst der Bedingungen (m), (n) die Grössen a'', b'', c'' fortzuschaffen, um ein System dreier Gleichungen zwischen p, q, r und t allein zu er-

*) Vgl. Poisson, traité de mécanique, t. II, No. 413 der 2. Auflage.

halten. Die Elimination der a'', b'', c'' vollzieht sich aber ziemlich einfach:

Multiplicirt man die Gleichungen des Systems (1) bezw. mit p, q, r, addirt und beachtet (m), so erhält man

$$Ap \cdot dp + Bq \cdot dq + Cr \cdot dr = P(\alpha \cdot da'' + \beta \cdot db'' + \gamma \cdot dc''),$$

und hieraus

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2P(\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'') + h.$$

Diese Gleichungen sprechen den Zusammenhang zwischen der lebendigen Kraft und der beim Sinken des Schwerpunktes zu Tage tretenden Arbeit aus.

Multiplicirt man die Gleichungen (1) mit resp. a'', b'', c'', addirt und berücksichtigt wieder (m), so kommt durch Integration

$$Apa'' + Bqb'' + Crc'' = \lambda$$

d. h. *die Componente des wirkenden Kräftepaares bezüglich der Richtung der Schwere ist während der ganzen Dauer der Bewegung constant.*

Trägt man, wie das zu geschehen pflegt, auf jeder Kräftepaaraxe die Grösse des Momentes von O aus auf, und nennt die Folge aller auf diese Weise entstandenen Punkte die Basis des erzeugten Kegels, so sagt der vorstehende Satz,

dass der von der Kräftepaaraxe um den festen Punkt beschriebene Kegel eine ebene, horizontale Basis besitzt.

Aus den 3 Gleichungen

$$(2)\quad \begin{aligned} a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 = \varkappa, \\ a''Ap + b''Bq + c''Cr &= \lambda, \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma &= \tfrac{1}{2P}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - h) = \mu \end{aligned}$$

lassen sich nun a'', b'', c'' mittelst eines von Combescure angegebenen Verfahrens*) leicht finden. Bilden wir nämlich die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a'' & b'' & c'' \\ Ap & Bq & Cr \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

und quadriren dieselbe unter Anwendung des Multiplicationssatzes der Determinanten, so erhalten wir

$$R^2 = H = \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda & \mu \\ \lambda & \nu & \varrho \\ \mu & \varrho & \sigma \end{vmatrix}.$$

*) p. 49 Combescure, sur quelques systèmes particuliers d'équations différentielles. Crelle's J., Bd. 80, pp. 33—51.

Dabei bedeutet

$$(o)\qquad \begin{aligned} \nu &= A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2, \\ \varrho &= Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma, \\ \sigma &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \end{aligned}$$

Die Unbekannten a'', b'', c'' ergeben sich jetzt bis auf die Quadratwurzel aus H rational aus den 3 Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial \varkappa}\cdot a'' + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \lambda}\cdot Ap + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \mu}\cdot\alpha = \pm\sqrt{H}\cdot\frac{\partial R}{\partial a''}, \\ \frac{\partial H}{\partial \varkappa}\cdot b'' + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \lambda}\cdot Bq + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \mu}\cdot\beta = \pm\sqrt{H}\cdot\frac{\partial R}{\partial b''}, \\ \frac{\partial H}{\partial \varkappa}\cdot c'' + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \lambda}\cdot Cr + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial H}{\partial \mu}\cdot\gamma = \pm\sqrt{H}\cdot\frac{\partial R}{\partial c''}, \end{cases}$$

indem die Differentialquotienten d. h. die Unterdeterminanten der obigen Systeme nur von p, q, r abhängig sind.

Setzt man die erhaltenen Werthe von a'', b'', c'' in die Gleichungen (1) ein, so gehen dieselben in Gleichungen über, welche ausser den abhängigen Variabeln p, q, r und deren Differentialquotienten nur noch dt enthalten. Wir multipliciren aber statt dessen die Gleichungen (1) besser der Reihe nach mit resp. Ap, Bq, Cr; α, β, γ; p, q, r und addiren jedesmal; dadurch erhalten wir vorerst das mit (1) identische System

$$\begin{aligned} A^2p\cdot\frac{dp}{dt} + B^2q\cdot\frac{dq}{dt} + C^2r\cdot\frac{dr}{dt} \\ = P\cdot[(Bq\gamma - Cr\beta)\,a'' + (Cr\alpha - Ap\gamma)\,b'' + (Ap\beta - Bq\alpha)\,c''], \\ A\alpha\cdot\frac{dp}{dt} + B\beta\cdot\frac{dq}{dt} + C\gamma\cdot\frac{dr}{dt} \\ = \alpha(B-C)\,qr + \beta(C-A)\,rp + \gamma(A-B)\,pq, \\ Ap\cdot\frac{dp}{dt} + Bq\cdot\frac{dq}{dt} + Cr\cdot\frac{dr}{dt} \\ = P[(\gamma q - \beta r)\,a'' + (\alpha r - \gamma p)\,b'' + (\beta p - \alpha q)\,c'']. \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Abkürzungen, die wir getroffen, sowie der Gleichungen (3) folgt hieraus

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{d\nu}{dt} = \pm 2P\cdot\sqrt{H}, \\ \frac{d\varrho}{dt} = \alpha(B-C)\,qr + \beta(C-A)\,rp + \gamma(A-B)\,pq, \\ \frac{d\mu}{dt} = \frac{\lambda\sigma - \mu\varrho}{\nu\sigma - \varrho^2}\cdot[\alpha(B-C)\,qr + \beta(C-A)\,rp + \gamma(A-B)\,pq] \\ \qquad \pm\frac{\sqrt{H}}{\nu\sigma - \varrho^2}\cdot[\sigma(2P\mu + h) - \varrho(\alpha p + \beta q + \gamma r)]. \end{cases}$$

So lange man auf dem allgemeinsten Fall der Bewegung beharrt, so lange also vorstehendes System ohne beschränkenden Zusatz Giltigkeit besitzt, wird eine Integration desselben kaum gelingen können. Wir vereinfachen daher das Problem, indem wir die Annahme machen, dass

2.

$H = 0$ sei, und beweisen, dass $H = 0$ ein (particuläres) Integral des Gleichungssystems (4) ist. Das letztere wird nemlich durch diese Voraussetzung in das folgende übergeführt:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{d\nu}{dt} = 0, \\ \frac{d\mu}{dt} = \frac{\lambda\sigma - \mu\varrho}{\nu\sigma - \varrho^2}\,\frac{d\varrho}{dt}, \\ \frac{d\varrho}{dt} = \alpha(B - C)\,qr + \beta(C - A)\,rp + \gamma(A - B)\,pq. \end{cases}$$

Aus der ersten der vorstehenden Gleichungen folgt sofort

$$(6)\qquad \nu = A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{const.}$$

Da Ap, Bq, Cr die Componenten des wirkenden Kräftepaares bezüglich der 3 Hauptaxen OX', OY', OZ' vorstellen, so sagt die Gleichung (6):

Die Grösse des Kräftepaares, welches den Körper angreift, ist während der ganzen Dauer der Bewegung constant.

Da die Kräftepaaraxe, wie wir gezeigt haben, auf alle Fälle um den festen Punkt O einen Kegel beschreibt, dessen Basis eine horizontal gelegene Curve ist, so folgt aus $\nu =$ constans:

Die Kräftepaaraxe beschreibt im Raume einen Kreiskegel, dessen Spitze der feste Drehpunkt ist und dessen Axe die Richtung der Schwere besitzt. Die Endpunkte der Kräftepaaraxen bilden einen Kreis vom Radius $\lambda' = \sqrt{\nu - \lambda^2}$.

Die zweite der Gleichungen (5),

$$\frac{d\mu}{d\varrho} = \frac{\lambda\sigma - \mu\varrho}{\nu\sigma - \varrho^2}$$

kann als lineare Differentialgleichung zwischen μ und ϱ unmittelbar integrirt werden und liefert

$$\nu\mu - \lambda\varrho = \Gamma \cdot \sqrt{\nu\sigma - \varrho^2}.$$

Giebt man hierin der willkürlichen Constante Γ den Werth $\sqrt{\nu - \lambda^2}$ und quadrirt, so erhält man die particuläre Integralgleichung:

$$(7)\qquad (\nu\sigma - \varrho^2) - \lambda(\lambda\sigma - \mu\varrho) + \mu(\lambda\varrho - \mu\nu) = 0.$$

Entwickeln wir aber die Determinante H, indem wir statt $\varkappa$ wieder 1 setzen, so liefert $H = 0$ genau die Gleichung (7). Damit ist nachgewiesen,

dass $H = 0$ ein particuläres Integral des die Bewegung definirenden Systems (4) *ist.*

Um die mechanische Bedeutung der Gleichung $H = 0$ einzusehen, beachten wir, dass geschrieben werden können [s. (2), (o)]

$$\frac{\varrho}{\sqrt{\nu\sigma}} = \frac{Ap\cdot\alpha + Bq\cdot\beta + Cr\cdot\gamma}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$\frac{\mu}{\sqrt{\sigma}} = \frac{a''\cdot\alpha + b''\cdot\beta + c''\cdot\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\nu}} = \frac{Ap\cdot a'' + Bq\cdot b'' + Cr\cdot c''}{\sqrt{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}}.$$

Die rechten Seiten vorstehender Gleichungen geben nun den cosinus der Neigungswinkel an, welche gebildet werden von der Verbindungslinie OS mit der Axe G des Kräftepaars, von OS mit der Verticalen OZ und von G mit OZ. Demzufolge kann für die Gleichung (7) d. i. $H = 0$ geschrieben werden

$$\sin^2 GS - \cos^2 SZ - \cos^2 ZG + 2\cos GS\cdot\cos SZ\cdot\cos ZG = 0,$$

woraus ohne Mühe folgt

(7a) $$\cos GS = \cos GZ\cdot\cos SZ \pm \sin GZ\cdot\sin SZ.$$

Nennen wir die Verbindungslinie vom festen Punkt O mit dem Schwerpunkt S die *„Figuraxe“*, *so ist unsere Annahme, dass die Wurzel $H = 0$ sei, nichts anderes als die Bedingung für das Zusammenliegen der drei Axen des Kräftepaars, der Figur und der Schwere in einer und derselben Ebene.* Da die vierte Gleichung $H = 0$, welche zu den die Rotation eines beliebigen Körpers um einen beliebigen Punkt bestimmenden drei Gleichungen (4) hinzutrat, mit denselben verträglich ist, so folgt, dass der durch $H = 0$ festgelegte Fall für jede Zeit t Giltigkeit besitzt, d. h.

Sobald man dem afficirenden Kräftepaar, welches im Anfange die Bewegung hervorbringen soll, eine derartige Stellung ertheilt hat, dass seine Axe in die durch die Figuraxe gelegte verticale Ebene fällt, so hat man unseren durch $H = 0$ charakterisirten Specialfall der Bewegung hervorgerufen, indem die Kräftepaaraxe fortwährend in die mit der Figuraxe sich drehende Verticalebene zu liegen kommt.

Wie die erste der Gleichungen (4) zeigt, wird das Verschwinden von H ebenso gut durch die Annahme $\nu = \text{constans}$ erreicht, als umgekehrt die letztere Bedingung durch das Eintreffen der ersteren involvirt ward. Es ist sonach ganz *gleichgiltig*, ob man die Bedingung, *dass die Kräftepaaraxe in die Verticalebene durch die Figuraxe falle*, oder die Forderung, *dass dieselbe einen Kreiskegel beschreibe*, für unser Problem *massgebend* sein lässt.

Kehren wir nun zur letzten Gleichung (5) zurück. Da dieselbe auf der rechten Seite die Grössen p, q, r enthält, so werden wir uns

dieselben durch ϱ ausgedrückt zu verschaffen suchen und dazu die Gleichungen verwenden

$$\begin{aligned} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= \nu, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= 2P\mu + h, \\ Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma &= \varrho. \end{aligned} \tag{9}$$

Hierin ist ν constant und μ vermittelst der Gleichung $H = 0$ durch ϱ darstellbar, so dass in der That p, q, r in Functionen von ϱ allein aufgestellt werden können. Zu ihrer Bildung sind die Auflösungen von Gleichungen vierten Grades nöthig; sind diese Auflösungen vollzogen, so lässt sich zunächst aus

$$dt = \frac{d\varrho}{f(\varrho)}$$

durch Quadratur t als Function von ϱ finden, somit auch durch Inversion ϱ durch t ausdrücken. Durch Substitution dieses Ausdruckes von ϱ in die aus (9) entstandenen Werthe für p, q, r erhält man letztere Grössen, durch deren Substitution in die Gleichungen (3) die cosinus a'', b'', c'' und endlich mittelst der Relationen (m) und (n) und Integration a, b, c, a', b', c', d. h. die Lösung des Rotationsproblems.

Die Differentialgleichung

$$dt = \frac{d\varrho}{f(\varrho)}$$

bietet nun allerdings kaum Aussicht, in geschlossener Form durch eine Integralgleichung sich darstellen zu lassen, so dass man zur Anwendung unendlicher Reihen seine Zuflucht wird nehmen müssen.

Die Function $f(\varrho)$ wird wesentlich einfacher, wenn wir statt eine beliebige Lage von Schwerpunkt S und Unterstützungspunkt O vorauszusetzen, die Annahme machen,

II. Der Schwerpunkt liege auf einer Hauptaxe durch den festen Punkt.

3.

Nach der Theorie der Trägheitsmomente ist diese Voraussetzung statthaft, sobald der feste Punkt auf einer Hauptaxe des Schwerpunktes angenommen wird. Liegt der Schwerpunkt auf der Hauptaxe OZ', so ist $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = \gamma$ zu setzen. Demgemäss lauten die allgemeinen Differentialgleichungen für die Bewegung eines Körpers, dessen Schwerpunkt auf einer der Hauptträgheitsaxen durch den festen Punkt gelegen ist, wie folgt:

$$\begin{cases} A \cdot \frac{dp}{dt} = (B - C)\,qr - P\gamma \cdot \frac{Bq(\lambda - Crc'') \pm Ap \cdot \sqrt{H}}{A^2p^2 + B^2q^2}, \\ B \cdot \frac{dq}{dt} = (C - A)\,rp + P\gamma \cdot \frac{Ap(\lambda - Crc'') \mp Bq \cdot \sqrt{H}}{A^2p^2 + B^2q^2}, \\ C \cdot \frac{dr}{dt} = (A - B)\,pq. \end{cases} \tag{10}$$

Dabei ist

$$H = (A^2p^2 + B^2q^2)(1 - c''^2) - (\lambda - Crc'')^2$$

und

$$c'' = \frac{1}{2P\gamma}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - h).$$

Auch hier wird die Integration der dynamischen Gleichungen schwerlich vollzogen werden können; wir setzen deshalb wieder $H=0$, multipliciren (wie im allgemeinen Fall I.) die Gleichungen (10) mit bezw. Ap, Bq, Cr, addiren und integriren, so kommt

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \nu = \text{constans},$$

und mit Benutzung dieser Gleichung aus $H = 0$

$$c'' = \frac{\lambda \cdot Cr \pm \lambda' \cdot \sqrt{\nu - C^2r^2}}{\nu},$$

λ' ist, wie oben, der Radius des von den Endpunkten der Kräftepaaraxe beschriebenen horizontalen Kreises, und gleich $\sqrt{\nu - \lambda^2}$. Im Ausdrucke für c'' gilt das obere Zeichen $+$, sobald die Axe des Kräftepaars in die von den Axen der Figur und Verticalen gebildeten spitzen Winkelräume zu liegen kommt, das untere Zeichen $-$ im anderen Falle.

Die Bewegungsgleichungen

$$(11)\quad \begin{cases} A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \nu, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2P\gamma c'' + h, \\ c'' = \frac{\lambda \cdot Cr \pm \lambda' \cdot \sqrt{\nu - C^2r^2}}{\nu}, \\ C \cdot \frac{dr}{dt} = (A - B)pq \end{cases}$$

enthalten nunmehr noch ein einziges Differential. Aus den zwei ersten Gleichungen ergeben sich aber

$$A(A - B)p^2 = l^2 - Bh - 2BP\gamma c'' + Cr^2(B - C) = P,$$
$$B(B - A)q^2 = l^2 - Ah - 2AP\gamma c'' + Cr^2(A - C) = Q.$$

Durch Multiplication und Substitution des Werthes für $(A-B)pq$ in die letzte Gleichung (11) wird diese

$$dt = \pm C\sqrt{AB} \cdot \frac{dr}{\sqrt{-P \cdot Q}}.$$

P, Q sind Functionen von r allein, da ja c'' durch r ausdrückbar ist; die letztere Grösse tritt in c'' unter dem Wurzelzeichen auf, also machen wir rational, indem wir

$$Cr = \sqrt{\nu} \cdot \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \qquad z = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{\nu} - Cr}{\sqrt{\nu} + Cr}}$$

setzen. Das obere oder untere Zeichen gelte hiebei, je nachdem in c''

das obere oder untere gewählt ist; es wird dadurch ein doppeltes Zeichen in P und Q vermieden.

Der Ausdruck für dt wird nunmehr

$$(12) \qquad dt = \pm 4 \cdot Cv \cdot \sqrt{AB} \cdot \frac{z \cdot dz}{\sqrt{-P' \cdot Q'}},$$

wo jetzt

$$P' = Cl(l^2 - Bh)(1 + z^2)^2 + l^3(B - C)(1 - z^2)^2 + 2BCP\gamma(1 + z^2)(\lambda z^2 - 2\lambda' z - \lambda),$$
$$Q' = Cl(l^2 - Ah)(1 + z^2)^2 + l^3(A - C)(1 - z^2)^2 + 2ACP\gamma(1 + z^2)(\lambda z^2 - 2\lambda' z - \lambda)$$

bedeuten. Die Grössen P' und Q' sind vom 4., $P' \cdot Q'$ vom 8. Grade in z, t ist also durch ein hyperelliptisches Integral von z, z durch hyperelliptische Functionen von t ausgedrückt — mit ihm auch r, p und q.

4.

Wählen wir die *Anfangslage* des Systems derart, dass die Hauptaxe $+ OY'$ mit der festen horizontalen Linie $+ OY$ sich deckt und die Figuraxe OZ' mit der Verticalen OZ einen Winkel bildet, dessen cos durch c_0'' bezeichnet werde, so ist für diese Anfangslage

$$q = 0, \quad p = p_0, \quad r = r_0;$$

es folgt also

$$A^2 p_0^2 + C^2 r_0^2 = v,$$
$$A p_0^2 + C r_0^2 = 2P\gamma c_0'' + h.$$

Setzt man diese Werthe von v und h in die Ausdrücke von P und Q ein, so werden dieselben

$$P = C(B - C)(r^2 - r_0^2) - 2BP\gamma(c'' - c_0'') + Ap_0^2(A - B),$$
$$Q = C(A - C)(r^2 - r_0^2) - 2AP\gamma(c'' - c_0'').$$

Wie man sieht, wird für den Anfangswerth r_0 von r der Ausdruck Q, also auch die Winkelgeschwindigkeit q Null; $dr = 0$ zeigt aber an, dass r_0 ein Maximum oder Minimum von r ist, und da gleichzeitig nach der ersten Gleichung (10), in der H gleich Null zu setzen ist, $dp = 0$ wird, so erlangt auch p einen extremen Werth, welcher sodann zufolge der Relation $A^2 p_0^2 + C^2 r_0^2 = v$ ein Minimum oder Maximum sein wird.

Derjenige Werth von z, welcher durch Einsetzen von r_0 an Stelle von r erhalten wird, heisse z_0; dann ist $z = z_0$ eine Wurzel des Radikanden $P'Q'$. Die weiteren Wurzeln können erst dann besprochen werden, wenn hinsichtlich der Grössenordnung der Trägheitsmomente A, B, C sowohl, als hinsichtlich der Lage der Figuraxe und Kräfte-

paaraxe Bestimmungen sind getroffen worden. Da C das Trägheitsmoment um die ausgezeichnete Hauptaxe vorstellt, welche den Schwerpunkt trägt, so werden hier 3 Fälle zu unterscheiden sein, je nachdem C das grösste, kleinste oder mittelste Moment darstellt. Insofern wird sich unser jetziges Rotationsproblem wesentlich gegen jenes des Gyroscops, in welchem bezüglich der Grössenordnung der Trägheitsmomente nur zwei Unterscheidungen zu treffen sind, sowie gegen jenes der Drehung um den Schwerpunkt, in welchem keine Hauptaxe ausgezeichnet ist, erweitern.

Die Wurzel $r = r_0$ von Q wird zugleich Wurzel von P, wenn $Ap_0 = 0$ ist; $z = z_0$ ist in diesem Falle Doppelwurzel des Productes $P' \cdot Q'$. Ap_0 ist aber die Componente des Kräftepaars $\sqrt{\nu}$ längs der zu Anfang in der Verticalebene durch die Hauptaxe OZ' gelegenen Hauptaxe OX'. D. h.

Wirkt das Kräftepaar, dessen Axe in die Ebene der Figur und Verticalen fällt, im Anfange um die erstere dieser beiden Axen selbst, so sondert sich aus $P'Q'$ der Factor $z - z_0$ quadratisch ab — das Integral für t wird ein ultraelliptisches.

Wird der lineare Bestandtheil für z in $P' \cdot Q'$ Null, was für $\lambda' = 0$ eintritt, so kann z^2 durch y ersetzt werden, $2z \cdot dz$ durch dy. λ' war aber der Radius des von der Kräftepaaraxe um die Verticale beschriebenen Kreises; wir sehen also:

Wirkt das anfängliche Kräftepaar um die Axe der Schwere, so erhält man die Grössen, welche die Lage des Systems bestimmen, in elliptischen Functionen der Zeit. Der Kreiskegel, welchen die Kräftepaaraxe im Raume beschreibt, reducirt sich auf die Verticalaxe, so dass diese eine invariable Linie, die Kräftepaarebene (d. i. die Horizontalebene durch den festen Punkt) eine invariable Ebene vorstellt.

München, im April 1882.

Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Theorie der Potenzreste, sowie über die Erweiterung des Congruenzbegriffes.

Von

Fritz Hofmann in München.

Nach Gauss' disqu. ar. 81 hat man: „Wenn p eine Primzahl, so ist die Summe aller primitiven Wurzeln der Congruenz $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ entweder $\equiv 0 \pmod{p}$ — wenn nämlich $p-1$ durch ein Quadrat theilbar ist —; oder $\equiv (-1)^n \pmod{p}$ — wenn $p-1$ ein Product aus n verschiedenen Factoren ist."

Für diesen Satz sollen im Folgenden neue Beweismethoden mitgetheilt werden, bei deren Formulirung eine kaum noch verwendete Darstellung der Folge jener $p-1$ Reste, die einer Primzahl p durch Potenzirung einer ihrer primitiven Wurzeln zugeordnet werden, gute Dienste leisten wird.

Da diese Reste, nachdém sie alle Werthe von 1 bis $p-1$ durchlaufen haben, bei Fortsetzung des Potenzirens über die $(p-1)^{te}$ Potenz hinaus in derselben Reihenfolge wiederkehren, so liegt der Gedanke nahe, dieselben auf der Peripherie eines Kreises zu verzeichnen, wie es aus den beifolgenden Figuren ersichtlich ist.*)

Ist es nun möglich mehrere Punkte der so eingetheilten Peripherie zu regelmässigen Polygonen zu vereinigen, mit einer Ecke bei dem Reste 1, so berühren solche Polygone die Wurzeln einer Congruenzengleichung von der Form $x^\alpha \equiv 1 \pmod{p}$, wo α ein Theiler von $p-1$.

In den beigegebenen Figuren sind nicht alle möglichen geschlossenen Polygone dieser Art eingezeichnet, sondern nur soviele als $p-1$ Primfactoren besitzt — und zwar zeigen jene Polygone, wenn $p-1 = a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda$, die Centriwinkel resp. $\frac{360^0 \cdot a}{p-1}, \frac{360^0 \cdot b}{p-1}, \cdots, \frac{360 \cdot l}{p-1}$.

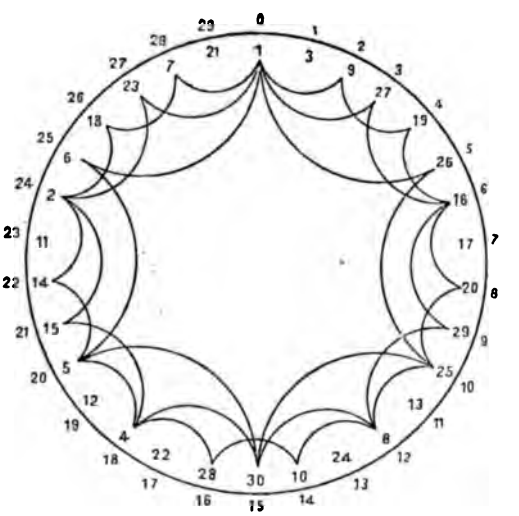
*) Schon Poinsot weist übrigens an einer Stelle (p. 178) seines „Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres (mém. de l'acad. des sc., t. IV)" auf die Nothwendigkeit hin sich die Vorstellung von den verwickelten Beziehungen der Potenzreste durch Auftragen derselben auf einer Peripherie zu erleichtern.

Mit andern Worten, die Seiten der eingeschriebenen Polygone überspringen resp. $(a-1), (b-1), \cdots, (l-1)$ Punkte der Eintheilung um die Verbindung zweier Ecken herzustellen.

Die von solchen eingeschriebenen regulären Polygonen ausgeschiedenen Reste geben als Wurzeln einer binomischen Gleichung immer eine Summe $\equiv 0 \pmod{p}$, und zwar bis zum Polygon der Gleichung $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ herab (Zweieck 1,22 in Figur d), während allerdings der Fall $x^1 \equiv 1 \pmod{p}$, der auf die einzige Wurzel $x \equiv 1$ führen würde, auszuschliessen ist.

Die *Drehung* eines Polygons lässt seine Ecken mit neuen Resten zusammenfallen — da jene Drehung aber äquivalent ist einer *Multiplication* der sämmtlichen ausgeschiedenen Reste mit einer und derselben Zahl, so ist auch für die neue Lage des Polygons die Summe der berührten Reste $\equiv 0 \pmod{p}$. Ein zweiter Beweis hierfür findet sich am Schlusse des Aufsatzes.

Beispiel. In die Figur a kann man ein reguläres Sechseck einschreiben, welches die Reste 3, 16, 13, 28, 15, 18 verbindet. Und



Figur a.

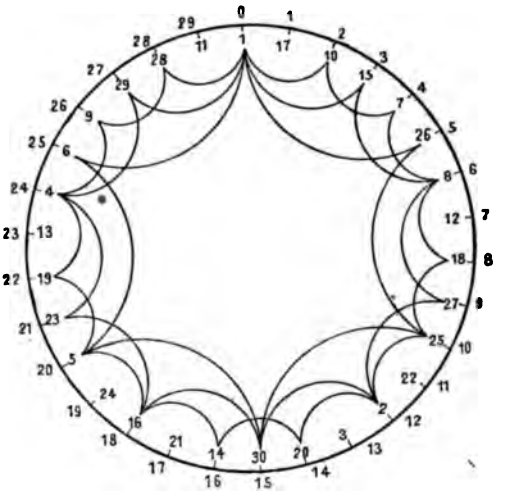
in der That findet sich $3 + 16 + 13 + 28 + 15 + 18 \equiv 0 \pmod{31}$, denn jene Zahlen sind resp. $\equiv 3\cdot(1), 3\cdot(26), 3\cdot(25), 3\cdot(30), 3\cdot(5), 3\cdot(6) \pmod{31}$; d. h. ihre Summe ist congruent (mod. 31) der 3-fachen Summe der Wurzeln der Gleichung $x^6 \equiv 1 \pmod{31}$, welche Wurzelsumme $\equiv 0 \pmod{31}$. —

Mit Hülfe des bis jetzt bemerkten kann bereits der erste Theil des Satzes von Gauss erledigt werden:

I. Lehrsatz. „Ist $p - 1$ durch ein Quadrat theilbar, so ist die

Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ durch p theilbar".

Erster Beweis. Ist $p - 1 = a^\alpha b^\beta \cdots l^\lambda$, wo wenigstens einer der Exponenten $\alpha, \beta, \cdots, \lambda$, z. B. α, > 1, so giebt es eine kleinere Zahl als $p - 1$ selbst, nämlich die Zahl $a^{\alpha-1} b^\beta \cdots l^\lambda$, in welcher alle



Figur a.

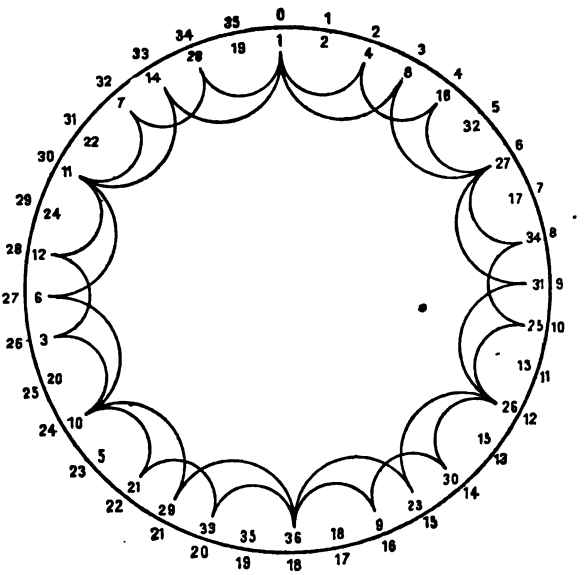
Primfactoren von $p - 1$ enthalten sind: bildet man die regulären Polygone von den Centriwinkeln $\frac{360^0 \cdot a}{p-1}$, $\frac{360^0 \cdot b}{p-1}$, $\cdots$, $\frac{360^0 \cdot l}{p-1}$, so vereinigen sich die Peripherien dieser Polygone bereits vor dem Zurückkommen in den gemeinschaftlichen Ausgangspunkt „Rest 1" in einem bestimmten Punkte, der sich nun in Bezug auf die Figur des Kreises mit den eingezeichneten Polygonen genau verhält, wie der Punkt „Rest 1".

Daher können sämmtliche von den Polygonen berührten Reste wiederum unter sich zu regulären geschlossenen Polygonen vom Centriwinkel $\frac{360^0}{p-1} a^{\alpha-1} b^\beta \cdots l^\lambda$ verbunden werden, demnach auch die *nicht berührten* Reste (die *primitiven* Wurzeln der Gleichung $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$) — letztere ergeben daher nach dem oben Gesagten eine Summe $\equiv 0 \pmod{p}$.

Beispiel. (Fig. b, siehe folgende Seite). Schon beim Reste 27 vereinigen sich die Peripherien der beiden von 1 ausgehenden Polygone wieder.

Man kann daher die Figur des Kreises mit den beiden eingezeichneten Polygonen durch eine Drehung um $\frac{360^0}{36} \cdot 6$ mit sich selbst zur Deckung bringen — demnach müssen sich die nicht berührten Reste

zu geschlossenen Sechsecken vereinigen lassen, deren Eckensumme immer einzeln $\equiv 0 \pmod{37}$. In der That hat man:



Figur b.

$$2 + 17 + 15 + 35 + 20 + 42 \equiv 0 \pmod{37},$$
$$32 + 13 + 18 + 5 + 24 + 19 \equiv 0 \pmod{37}.$$

Zweiter Beweis. Indem wir uns nochmals daran erinnern, dass bei der bis jetzt gemachten Voraussetzung der Punkt des Restes 1 noch nicht dadurch ausgezeichnet ist, dass in ihm mehr Polygone als in irgend einem andern Punkte der Eintheilung zusammenlaufen, sondern dass sich noch immer wenigstens *ein* andrer Punkt finden muss, der die vollständige Anzahl der von 1 ausgehenden Peripherien auch in sich vereinigt aufzuweisen hat, können wir dem Obigen eine etwas verschiedene Fassung geben.

Wir denken uns, dass wir die Summe der berührten Reste dadurch zu ermitteln suchten, dass wir in die Figur des eingetheilten Kreises nach einander die n auf die n Primfactoren von $p - 1$ bezüglichen (primären) Polygone legten, deren jedes Reste ausscheidet, deren Summe für jedes Polygon je $\equiv 0 \pmod{p}$.

Wollten wir hieraus die Summe der uneigentlichen Wurzeln von p ohne Weiteres $\equiv 0 \pmod{p}$, annehmen, so hätten wir — möglicherweise — einen Fehler gemacht durch Nichtberücksichtigung des Umstandes, dass von der eben vollzogenen Operation des Einschreibens der n Polygone einige Reste mehrfach betroffen und demnach mehr-

mals gezählt wurden, während sie sich doch in der vorliegenden Figur nur je einmal vorfinden.

Demnach ist eine Correctur des Resultates vorzunehmen, die sich zunächst auf jene Punkte erstrecken wird, die von *wenigstens zwei* jener primären Polygone berührt werden.

Ueber solche Punkte lassen sich aber wieder reguläre geschlossene — secundäre — Polygone mit den Centriwinkeln $\frac{360^0}{p-1} \cdot ab$, $\frac{360^0}{p-1} \cdot ac$, $\frac{360^0}{p-1} \cdot bc \cdots$ legen, welche allerdings ihrerseits wieder einige Punkte mehrfach berühren können. Mit Ausserachtlassung des in den letzten Worten erwähnten Umstandes, der uns alle „wenigstens dreifachen" Punkte der primären Figur als zu einer sie gleichmässig treffenden, durch Ueberlegung zu ermittelnden und später noch zu berücksichtigenden Verbesserung Anlass gebend erkennen lässt, ergiebt sich demnach jene zunächst als nothwendig erkannte Correctur von der Grösse $\equiv 0 \pmod{p}$.

Das nunmehrige Resultat ist nun noch zu corrigiren mit Berücksichtigung jener Punkte, in welchen *wenigstens drei* Peripherien der ursprünglich gegebenen n Polygone sich vereinigen — welche Punkte aber wieder zu regelmässigen, geschlossenen, eigentlichen Polygonen sich verbinden lassen $\left(\text{Centriwinkel beispielsweise} = \frac{360^0}{p-1} \cdot abc\right)$.

Und so kann man weiter gehen, ohne befürchten zu müssen, dass jemals das uneigentliche Polygon der einzigen Ecke 1 bei dieser Betrachtungsweise auftritt, das dann allerdings nicht mehr die Summe $\equiv 0$, sondern $\equiv 1$ ergeben würde.

So sind also fortwährend neue Correcturen des ursprünglichen Resultates 0 über einander gelagert zu denken, die aber alle als in der Vereinigung der Eckpunkte geschlossener Polygone bestehend, dasselbe nicht verändern.

Um zu wiederholen: die Existenz eines jeden weitern Polygonsystems höherer Ordnung führt eine neue Verbesserung des Resultates herbei, in welche aber immer nur die sämmtlichen Eckpunkte regulärer Polygone durch Multiplication mit einer für das betreffende System für alle Punkte gleichen, durch Abzählen zu ermittelnden Grösse eingehen. Der Werth der Correctur f für jedes System ist für diesen ersten Theil des Satzes noch ohne Bedeutung; im Folgenden wird er dagegen das Hauptziel unserer Ueberlegung zu bilden haben.

Beispiel. (Fig. c, siehe folgende Seite). Hier wurden, da

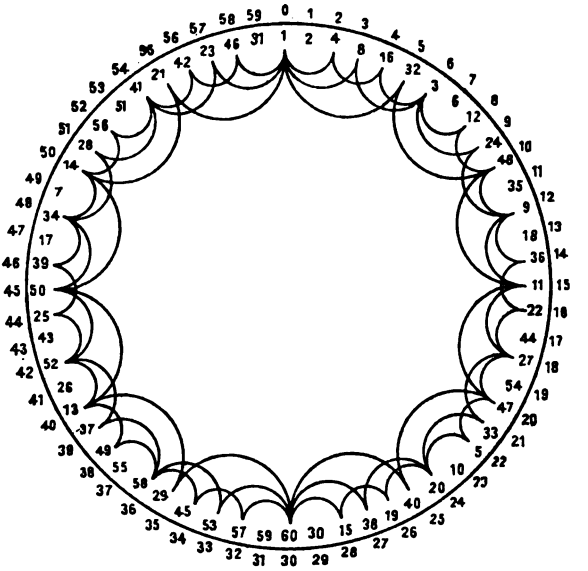
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$

3 primäre Polygone übereinandergelegt, deren Eckensumme einzeln $\equiv 0 \pmod{61}$; dabei sind nun jene Punkte als zu einer Verbesserung Anlass gebend zu berücksichtigen, die von *wenigstens zweien* solcher

Polygone berührt werden; dieselben lassen sich aber vereinigen zu drei Polygonen von den Centriwinkeln $\frac{360^0}{60} \cdot 6$, $\frac{360^0}{60} \cdot 10$, $\frac{360^0}{60} \cdot 15$.

Demnach ändert die Berücksichtigung der Punkte, in welchen *wenigstens zwei* Peripherien sich vereinigen, noch nichts am Resultat $\equiv 0$ der ersten Addition.

Wir bemerken schliesslich noch, dass Punkte vorhanden sind, in welchen mehrere jener secundären Polygone zusammentreffen, nämlich die Reste 1 *und* 60. Dies erfordert allerdings eine letzte Verbesserung,



Figur c.

in welche aber die beiden Reste 1 und 60 gleichmässig durch Multiplication mit einer uns nicht weiter beschäftigenden corrigirenden Grösse f eingehen; das Resultat $\equiv 0$ ändert sich daher um $f \cdot (1 + 60)$, bleibt also dem Werthe 0 congruent (mod. 61).

II. Lehrsatz. „Ist $p - 1 = abc \cdots l$, ein Product von n linearen verschiedenen Factoren, dann ist $(-1)^n \equiv$ der Summe der primitiven Wurzeln der Gleichung $x^{p-1} \equiv 1$ (mod. p), (mod. p).“

Erster Beweis. Wir arbeiten besser auf die Summe der uneigentlichen Wurzeln hin, die mit s bezeichnet sein möge.

Wir denken uns wieder, dass wir die Summe der uneigentlichen Wurzeln dadurch zu ermitteln suchten, dass wir in die Figur des Kreises mit seinen $(p - 1)$ Punkten die sämmtlichen auf die Primfactoren $abc \cdots l$ bezüglichen n Polygone von den Centriwinkeln resp. $= \frac{360^0}{p-1} \cdot a$, $\frac{360^0}{p-1} \cdot b, \cdots, \frac{360^0}{p-1} \cdot l$ legten.

Jedes solche Polygon scheidet Reste aus, deren Summe $\equiv 0 (\mathrm{mod}. p)$. Diesen Werth benutzen wir als erste Annäherung für s.

Wir scheiden dann zunächst jene Punkte aus, in welchen wenigstens 2 Polygone sich wieder vereinigen, diese Punkte liegen wiederum ihrerseits auf Polygonen vereinigt von den Centriwinkeln $\frac{360^0}{p-1} \cdot ab$, $\frac{360^0}{p-1} \cdot ac$, $\frac{360^0}{p-1} \cdot bc \cdots$

Bei jedem solchen Punkte wurde die dazu gehörige Restzahl doppelt gezählt; es ist daher ihr Betrag einmal abzuziehen, um das ursprüngliche Resultat 0 zu verbessern.

Nach Ausführung dieser zunächst als nothwendig erkannten Verbesserung haben wir demnach $s \equiv 0 - \binom{n}{2} \cdot 0 \,(\mathrm{mod}.\, p)$.

Für Punkte, welche wenigstens 3 Peripherien vereinigt zeigen, wird man folgenden Schluss machen: Sie wurden vor Allem $\binom{3}{1}$ mal bei der Abzählung der Ecken der primären Polygone berücksichtigt, ferner subtractiv $\binom{3}{2}$ mal bei der Aufstellung der secundären Polygone. Nun ist aber $\binom{3}{1} - \binom{3}{2} = 0$. Man hat daher der Existenz eines jeden solchen wenigstens-dreifachen Punktes nach Multiplication mit $+1$ durch Addition zum bisher gefundenen Resultate zur Geltung zu verhelfen — da er ja bis jetzt eben durch die letzte $\binom{3}{2}$ malige Subtraction in seiner Wirkung auf das Gesammtresultat ganz verschwand.

Man hat demnach als weitere Annäherung zu setzen:

$$s \equiv 0 - \binom{n}{2} \cdot 1 \cdot 0 + \binom{n}{3} \cdot 1 \cdot 0 \,(\mathrm{mod}.\, p).$$

Dieses letzte 0 folgt aus dem Umstande, dass die wenigstens-dreifachen Punkte sich wieder zu — tertiären — Polygonen vom Centriwinkel $\frac{360^0}{p-1} \cdot abc, \cdots$ zusammenschliessen.

Die wenigstens-vierfachen Punkte wurden bei der ersten Addition $\binom{4}{1}$ mal berücksichtigt, sie wurden dann $\binom{4}{2}$ mal nach Auffindung der secundären Polygone durch Subtraction in Rechnung gebracht; da sie aber auch durch $\binom{4}{3}$ maliges Zusammentreffen eines Vereins von je 3 Peripherien ausgezeichnet sind, wurde dieses letzte Resultat (nach der Subtraction) schliesslich noch durch Addition vom $\binom{4}{3}$ fachen Werthe des Restes für jeden solchen Punkt verbessert — während er doch im Endresultate unserer Ueberlegung als einfacher

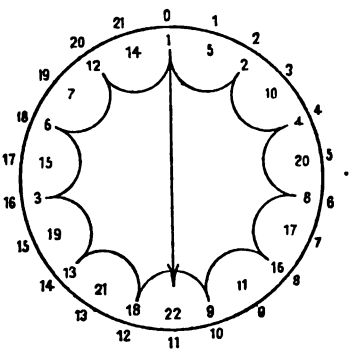
Punkt figuriren soll. Es ist aber $\binom{4}{1} - \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 2$; daher sind, so lange noch wenigstens-vierfache Punkte vorhanden, die zugehörigen Reste *einmal* abzuziehen, um eine weitere Annäherung an die unbekannte Summe s zu liefern.

Man hätte demnach $s \equiv 0 - \binom{n}{2} \cdot 1 \cdot 0 + \binom{n}{3} \cdot 1 \cdot 0 - \binom{n}{4} \cdot 1 \cdot 0$ (mod. p) als letzte Näherung.

So kann man weitergehen, bis man zu dem vom Punkte 1 dargestellten, uneigentlichen Polygone gelangt, dessen Eckensumme dann allerdings nicht mehr $\equiv 0$, sondern $\equiv 1$ zu nehmen wäre.

Und zwar sind die Schlüsse für das System μ^{ter} Ordnung (der wenigstens μfachen Punkte) die folgenden:

Diese Punkte wurden bedacht bei der Aufstellung der primären, secundären · · · Polygone; sie wurden von Anfang an, wo sie μfach gezählt wurden, bei der Aufstellung jedes höhern Systems in Mitleiden-



Figur d.

schaft gezogen, indem jeder bei einem solchen Punkte stehende Rest *abwechselnd* mit $+1$ oder -1 multiplicirt dem Resultat zugefügt wurde; nun vereinigen sich in einem wenigstens-μfachen Punkte $\binom{\mu}{1}$ Polygone des ersten, $\binom{\mu}{2}$ des 2. Systems und so fort — statt den Punkt mit $+1$ multiplicirt in die Berechnung des Endresultats eingeführt zu sehen, finden wir ihn multiplicirt mit

$$\binom{\mu}{1} - \binom{\mu}{2} + \binom{\mu}{3} - \cdots - \binom{\mu}{\mu - 1}(-1)^{\mu-1} = 1 + (-1)^{\mu}.$$

Nach Auffindung des μ^{ten} Systems hat man also das bis dorthin gefundene Resultat zu verbessern durch Subtraction von $(-1)^{\mu} \cdot \binom{n}{\mu} \cdot k$, wo k die Summe der von einem Polygon μ^{ter} Ordnung berührten Reste bedeutet. Dieses k wird für alle $\mu < n$ zu 0, da man dann eigentliche

(wenigstens-zweieckige) Polygone vor sich hat. Für $\mu = n$ dagegen wird $k = 1$ und man hat demnach endgültig:

$$s \equiv \binom{n}{1} \cdot 0 - \binom{n}{2} \cdot 0 + \binom{n}{3} \cdot 0 - \cdots - (-1)^n \cdot 1$$
$$\equiv (-1)^{n+1} \pmod{p}.$$

Dies ist der Satz von Gauss; es ergiebt sich nämlich aus obiger Beziehung die Summe der eigentlichen Wurzeln $\equiv (-1)^n \pmod{p}$.

Zweite Beweismethode. Auch die Betrachtung solcher (Rumpf-) Polygone, bei welchen die Ecke 1 fehlt, für welche also die Eckensumme $\equiv (-1) \pmod{p}$, führt zum Ziele.

Wir denken uns die Figur der berührten (nicht primitiven) Reste dadurch entstanden, dass wir zunächst n solche unvollständige Polygone einschrieben, hierauf noch den Rest 1 markirten.

Die wirkliche Summe der durch diese Operation berührten Punkte lässt sich sofort angeben; sie ist mit Anwendung aller der successiven Correcturen $\equiv$

$$\binom{n}{1} \cdot (-1) - \binom{n}{2} \cdot (-1) + \binom{n}{3} \cdot (-1) - \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot (-1) \cdot (-1)^n,$$

wo wegen der Entstehung der Zahlen (-1) als Eckensumme, sowie wegen der abwechselnden Vorzeichen ohne Weiteres auf die früheren Ueberlegungen verwiesen werden darf. Demnach hat man (nach Hinzufügung des Restes 1)

$$s \equiv 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1}$$
$$\equiv (-1)^{n+1} \pmod{p}.$$

Beispiel. (Fig. e; siehe folgende Seite). In den Kreis der 42 Punkte wurden 3 primäre Polygone eingezeichnet. Die Summe der von ihnen berührten Punkte ist zunächst, so lange man sich gestattet einen einfach vorhandenen, aber mehrfach berührten Punkt mehrfach mitzuzählen, $\equiv 3 \cdot 0 \pmod{43}$.

Sucht man die Punkte auf, welche wenigstens 2 Peripherien vereinigt zeigen, so erkennt man, dass dieselben wieder auf regulären, geschlossenen Polygonen vertheilt sind; deren Anzahl $= \binom{3}{2} = 3$ und deren Eckensumme je $\equiv 0 \pmod{43}$.

(Es sind das die secundären Polygone

1, 4, 16, 21, 41, 35, 11; 1, 6, 36; 1, 42).

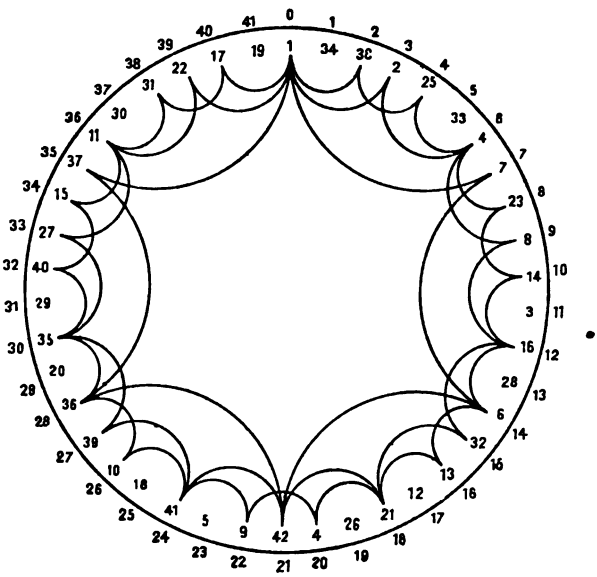
Wollte man nun setzen $s \equiv 3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \equiv 0 \pmod{43}$, so würde die Nichtberücksichtigung des Umstandes, dass der Punkt 1 noch eine ausgezeichnete Stellung einnimmt, zu einem Fehler Anlass geben.

Dieses 1 wurde von Anfang an 3mal berührt; da es auch von

$\binom{3}{2}$ Polygonen des zweiten Systems berührt wird, so wurde der Restpunkt 1 auch 3 mal von der Subtraction der ersten Correctur betroffen. Man hat also, um seine Existenz überhaupt im Resultate zur Geltung gelangen zu lassen, jenes 1 schliesslich wieder zu addiren und erhält $s \equiv 1 \pmod{43}$; daher die Summe der primitiven Wurzeln

$$\equiv (-1) \pmod{43}.$$

Oder: Man denkt sich die 3 primären Rumpfpolygone gelegt, die sich von den oben aufgestellten durch Fehlen der Ecke 1 unterscheiden.



Figur e.

Die Summe der von ihnen berührten Reste ist $\equiv 3 \cdot (-1) \pmod{43}$ — oder mit Berücksichtigung der Existenz von 3 Rumpfpolygonen der zweiten Ordnung $\equiv 3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) \equiv 0 \pmod{43}$. Schliesslich addirt man noch das 1 hinzu und hat $s \equiv 1 \pmod{43}$.

In der That ist die Summe der primitiven Wurzeln

$$34+33+3+28+12+26+5+18+20+29+30+19=257=6\cdot 43-1.-$$

Der Schwerpunkt der bis jetzt angestellten Betrachtungen möge im Nachweis der Nothwendigkeit gefunden werden, die Correcturen, zu denen das Auftreten immer höherer Classen von Combinationen der vorgegebenen Primfactoren Anlass giebt, *abwechselnd im entgegengesetzten Sinne* vorzunehmen.

An dieser Stelle angelangt ist uns ein zusammenfassender Rückblick über die gewonnenen Resultate möglich; derselbe begreift *die*

beiden Theile des Gauss'schen Satzes in sich. Und zwar stellt sich der von uns gegebene Beweis analytisch formulirt folgendermaassen dar:

„Die primitiven Wurzeln von $x^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod.}\ p)$ sind identisch mit den Wurzeln der Congruenz:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{(x^{p-1}-1)\left(x^{\frac{p-1}{ab}}-1\right)\left(x^{\frac{p-1}{ac}}-1\right)\cdots}{\left(x^{\frac{p-1}{a}}-1\right)\left(x^{\frac{p-1}{b}}-1\right)\cdots\left(x^{\frac{p-1}{abc}}-1\right)\cdots} \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p).$$

Daher ist ihre Summe congruent der Summe der Wurzeln der Congruenzen:

$$x^{p-1}-1 \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p), \quad x^{\frac{p-1}{ab}}-1 \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p) \cdots$$

vermindert um die Summe der Wurzeln der Congruenzen

$$x^{\frac{p-1}{a}}-1 \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p), \cdots, x^{\frac{p-1}{abc}}-1 \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p) \cdots .$$

Unter diesen Congruenzen tritt nur dann die Congruenz

$$x^1 - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p)$$

auf, wenn die Primfactoren von $p-1$ sämmtlich nur im ersten Grade auftreten — dieser Fall lässt $+1$ oder -1 als Resultat erscheinen; andernfalls ist die Wurzelsumme von sämmtlichen obigen Congruenzen $\equiv 0 (\mathrm{mod.}\ p)$.*)

Die analytische Formulirung (I) unserer geometrischen Betrachtung zeigt vollständige Uebereinstimmung mit der in *Bachmann's Kreistheilung*, p. 16, auf anderem Wege gefundenen Gleichung:

$$F_n(x) = \frac{\prod^{f(n)} f\left(\frac{n}{pp'}\right)\cdots}{\prod f\left(\frac{n}{p}\right)\cdots \prod f\left(\frac{n}{pp'p''}\right)\cdots},$$

in welcher $F_n(x)$ die linke Seite jener Gleichung bezeichnet, welche die primitiven Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ zu Wurzeln besitzt, während die Ausdrücke $f(n)$ identisch mit $(x^n - 1)$ u. s. w. zu denken sind.

Es sei überhaupt wegen der analytischen Darstellung dieser Verhältnisse auf die 2. und 3. Vorlesung des citirten Werkes, sowie auf das 7. Supplement zu *Dirichlet's Zahlentheorie* II. Auflage verwiesen, wo sich Betrachtungen finden, die mit den uns hier vorliegenden Analogie zeigen, jedoch ohne dass der Nachweis des uns beschäftigenden Satzes ihr Ziel bildete. — Wir sind damit von selbst vom Gebiete der Theorie der Potenzreste auf das der *Kreistheilung* hinübergeleitet worden.

Für die primitiven Wurzeln der Einheit, d. h. der Gleichung

*) Die analytischen Formulirungen dieser Seite verdanken ihre Entstehung der freundlichen Mitarbeiterschaft des Herrn Adolf Hurwitz in Göttingen.

$x^n = 1$ existiren analoge Sätze, für welche die Beschränkung wegfällt, dass $n + 1$ eine Primzahl sein muss. Dieselben lauten:

„Die Summe aller primitiven Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ ist entweder $= 0$; wenn nämlich n durch ein Quadrat theilbar ist; — oder $= (-1)^\lambda$, — wenn n ein Product aus λ verschiedenen Factoren ist."

Der Beweis kann sofort auf dem oben verfolgten Wege durchgeführt werden.

Mit Einhaltung des von Gauss bei seinem Beweise benutzten Gedankenganges kann man kürzer so verfahren:

Man hat nach Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, § 38, 6:

„Wenn die Zahl n gleich dem Product von Potenzen verschiedener Primzahlen $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_\lambda^{\alpha_\lambda}$ ist, und wenn aus je einer primitiven Wurzel von jeder der Gleichungen $\xi^{a_1^{\alpha_1}} = 1$, $\eta^{a_2^{\alpha_2}} = 1$, $\cdots$, $\varrho^{a_\lambda^{\alpha_\lambda}} = 1$ ein Product gebildet wird, so stellen die verschiedenen Producte die verschiedenen primitiven Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ dar."

Demnach kann die Summe der Wurzeln einer solchen Gleichung $x^n = 1$ dargestellt werden als Product von λ algebraischen Summen — wo λ die Anzahl der Primfactoren von n.

Treten die Primfactoren von n alle nur linear auf, so ist eine jede Summe der Art $= -1$, denn dann sind die *sämmtlichen* Wurzeln der Gleichungen $\xi^{a_1} = 1$, $\eta^{a_2} = 1$, $\cdots$, $\varrho^{a_\lambda} = 1$ mit Ausschluss von 1 ohne Weiteres auch die *primitiven* Wurzeln dieser Gleichungen, daher die Summe dieser letzteren je $= -1$. Hieraus folgt direct der zweite Theil des oben ausgesprochenen Satzes: $s = (-1)^\lambda$, wenn n kein Quadrat enthält.

Enthält dagegen n ein Quadrat, d. h. ist einer der Exponenten $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\lambda > 1$, so wird eine von jenen Summen primitiver Wurzeln einer Gleichung niedrigern Grades zu 0 und lässt also das ganze Product der λ algebraischen Summen, welches die Summe der primitiven Wurzeln von $x^n = 1$ liefert, verschwinden.

Diese letztere Behauptung bedarf noch des Beweises; er wird sich am besten mit Hilfe der bis jetzt benutzten Sprechweise führen lassen:

In jenes Polygon, welches die *sämmtlichen* Wurzelpunkte der Gleichung $x^{a_1^{\alpha_1}} = 1$, $\alpha_1 > 1$, verbindet, lässt sich wiederum ein reguläres, geschlossenes Polygon, das der Wurzelpunkte der Gleichung $x^{a_1^{\alpha_1 - 1}} = 1$ einschreiben — die von letzterem nicht berührten Punkte des primären Polygons sind dann die *primitiven* Wurzeln der Gleichung $x^{a_1^{\alpha_1}} = 1$.

Hieraus folgt, dass sich jene übrigbleibenden Wurzelpunkte auf $a_1 - 1$ regulären geschlossenen Polygonen anordnen lassen, daher zusammen die Summe 0 ergeben.

Beispiel. Die Wurzeln der Gleichung $x^{27} = 1$ liefern ein primäres Polygon, in welches sich das Polygon der Gleichung $x^9 = 1$ einschreiben lässt; die von letzterem nicht berührten Wurzelpunkte des primären Polygons sind, wenn $e^{\frac{2\pi i}{27} \cdot \varrho}$ mit $[\varrho]$ bezeichnet wird:

$$[1]\ [2]\ [4]\ [5]\ [7]\ [8]\ [10]\ [11]\ [13]\ [14]\ [16]\ [17]\ [19]\ [20]$$
$$[22]\ [23]\ [25]\ [26].$$

Sie lassen sich auf 2 Neunecke vertheilen: [1] [4] $\cdots$ [25] und [2] [5] $\cdots$ [26] und ergeben daher die Summe 0. —

Es sei noch darauf hingewiesen, dass für den Fall wo $n + 1$ eine Primzahl ist, die im Anfang des Artikels erklärte Aufzeichnung der primitiven Wurzeln der Congruenzengleichung $x^n \equiv 1 \pmod{n+1}$ eine Correspondenz zwischen jenen (ganzzahligen) Resten und den (complexen) Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$ darstellt, die man am bequemsten so aussprechen kann:

Bringt man jene Figur zur Deckung mit der Figur der in n Theile getheilten Peripherie des Kreises vom Radius 1, deren Theilpunkte uns in einer z-Ebene die complexen Einheitswurzeln darstellen — wobei der *Rest* 1 auf die *Zahl* 1 zu liegen kommt, — so ist jede Einheitswurzel mit dem sie deckenden Reste *congruent* (mod. $n + 1$), wobei allerdings die letzte Ausdrucksweise noch eine Rechtfertigung erfordert.

Wenn wir sagen: $17 \equiv e^{\frac{2\pi i}{30} \cdot 7} \pmod{31}$ (Fig. a), so hat das seine Berechtigung darin, dass nach Erheben auf die 30. Potenz in der That $17^{30} \equiv e^{2\pi i \cdot 7} = 1 \pmod{31}$; ebenso setzen wir $25 \equiv e^{\frac{2\pi i}{3}} \pmod{31}$, oder $= e^{\frac{2\pi i}{30} \cdot 10} \pmod{31}$, weil $25^3 \equiv e^{2\pi i} \equiv 1 \pmod{31}$.

[Die Schreibweise $\frac{95}{118} \equiv 204 \pmod{211}$ lässt sich vertheidigen durch die Existenz der Beziehung $95 \equiv 118 \cdot 204 \pmod{211}$].

Diese Zuweisungsart scheint zunächst noch eine Willkürlichkeit zu enthalten, wenn man bemerkt, dass solcher Anordnungsarten der Reste in Bezug auf 31 nicht weniger als $\varphi(30) = 8$ existiren; mit der in der Figur a gebotenen Anordnung ist auch die in Figur a′ gegebene vollkommen gleichberechtigt — so kommen demnach bei Anwendung des zweiten Schemas andere Reste mit den Ecken der Figur in der complexen Zahlenebene zur Deckung. (Vergl. Poinsot a. a. O., p. 175).

Trotzdem herrscht ein recht einfaches Gesetz in diesen Dingen: jene Reste, welche in Fig. a von den eingezeichneten regulären, den Punkt 1 enthaltenden Polygonen berührt werden, finden sich am Umfange des gleichen Polygons in der Figur a′ wieder: das in a vor-

kommende Dreieck 1, 25, 5 scheidet bei der Uebertragung in die Figur a' dieselben Reste aus.

Man kann also immerhin sagen: dem *Vereine* jener Wurzeln der Gleichung $x^n = 1$, welche einer Gleichung niedrigeren Grades $x^\mu = 1$ genügen, entspricht ein und derselbe unveränderliche *Verein* von Resten, und zwar die Wurzeln der Gleichung $x^\mu \equiv 1 \pmod{n+1}$.

Für die soeben benützte Thatsache, dass bei anderer Wahl der primitiven Wurzel zur Herstellung der Restfolge immer wieder dieselben Zahlen, die in der ursprünglichen Figur auf den Ecken eines regulären die 1 enthaltenden Polygons erschienen waren, die Ecken eines ebensolchen Polygons von gleicher Seitenzahl bilden, könnte man einen Beweis wünschen, der, im Zusammenhange mit der vorliegenden Figur sich der bisher gebrauchten Darstellungsweise bedienend, ein geometrischer zu nennen wäre — wir würden in seinem Verlaufe beispielsweise von „Polygonen mit sich selbst schneidender Peripherie" zu reden haben.

An Stelle jenes „geometrischen" Beweises tritt diesmal die Analysis mit einfachen Mitteln ein: das Zusammenhalten des Umstandes, dass eine Congruenzengleichung vom Grade μ höchstens μ Wurzeln hat (*Dirichlet, Zahlentheorie* § 26.) mit dem andern, dass schon von vornherein noch vor Aufstellung der Resttabellen für die Wurzeln einer jeden Gleichung niedern Grades als n die *Stellen* des Wurzelvereins durch ein und dasselbe *feste* reguläre Polygon fixirt sind, führt eben schon den Beweis für die von der Wahl der primitiven Wurzel unabhängige Zusammengehörigkeit jenes Wurzelvereins mit sich.

Dieses Correspondenzprincip ist nicht neu*); es findet sich in Kummer's Abhandlung: Ueber die ··· Congruenzwurzeln, Crelle's J. Bd. 53, in Poinsot's öfters citirtem Mémoire, und ist beispielsweise in *Bachmann, Kreistheilung* zu ausgedehnten Untersuchungen verwendet (pp. 248, 272). Immerhin sei auf den neugewonnenen Gesichtspunkt hingewiesen, unter welchem alle diese Verhältnisse erscheinen — die Bezeichnung *„congruent"*, ursprünglich der Geometrie entnommen, ohne dass man beabsichtigte sich jemals auf des Wortes eigentliche Bedeutung zu stützen und mit ihrer Hilfe neue Thatsachen abzuleiten, erlangt nun neuen Werth, da ihr die geometrische Bedeutung zurückgegeben ist. —

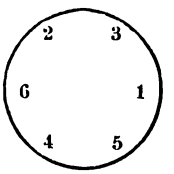
Uebrigens ist es — trotzdem das man verschiedene primitive Wurzeln zur Bildung unserer Figur zur Verfügung hätte — nicht für jede Primzahl p möglich die primitiven Wurzeln der Gleichung $x^{p-1} = 1$ so zu *trennen*, dass, wenn eine von der Analysis gelieferte Form einer

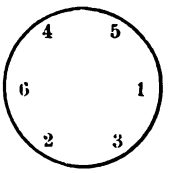
*) Schon Gauss selbst verwendete die Bezeichnungen

$$\sqrt[n]{a} \equiv b \pmod{p}, \quad \text{sowie} \quad \frac{a}{b} \equiv c \pmod{p}.$$

einzelnen Einheitswurzel vorliegt, $e^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, und man die von jener Form geforderten indirecten Operationen an der Figur der Restzahlen vorzunehmen versucht, das für letztere schliesslich erhaltene Resultat gerade an jener Stelle sich vorfindet, die der gewählten Stelle der Kreistheilung entspricht.

Die Primzahl 7 z. B. liefert zwei gleichberechtigte Anordnungen der 6 Reste:

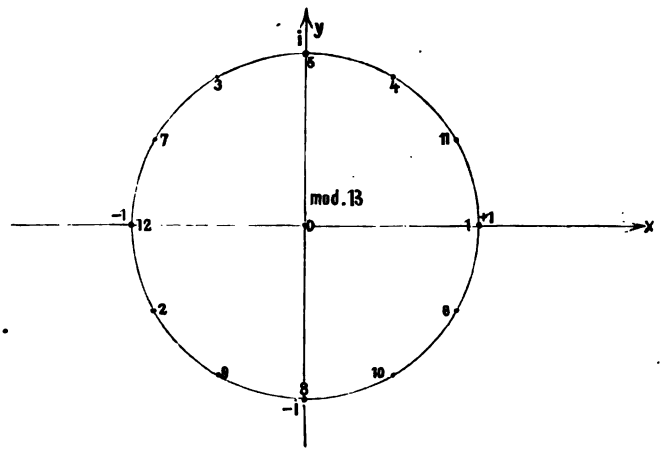




Die Durchführung der Operationen $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$ ergiebt in dem einen Falle: $4 + \frac{2}{2} \equiv 5$, welche Zahl nicht an der Stelle von $e^{\frac{2\pi i}{6}}$ auftritt, bei der andern Anordnung aber $4 + \frac{5}{2} \equiv 4 + 6 \equiv 10 \equiv 3$, mit derselben Abweichung.

Man wird sich hier damit zu begnügen haben, jenen Sätzen, die immer nur ganze *Gruppen* von eigentlichen oder uneigentlichen Einheitswurzeln zum Gegenstande haben, solche über die entsprechenden Gruppen der Congruenzwurzeln gegenüberzustellen —: man schliesst aus $e^{\frac{2\pi i}{6}} + e^{-\frac{2\pi i}{6}} = 1$, und $e^{\frac{2\pi i}{6}} \cdot e^{-\frac{2\pi i}{6}} = 1$, dass $5 + 3 \equiv 1$ und $5 \cdot 3 \equiv 1 \pmod 7$. —

Unter den 4 möglichen Figuren der Potenzreste für 13 ist die folgende bemerkenswerth, zu deren Bildung die primitive Wurzel 11



verwendet wurde; sie ermöglicht es, die einzelnen eigentlichen und uneigentlichen 12ten Wurzeln der Einheit zu *trennen*, wie das soeben definirt wurde.

Die Berechnung der Wurzel $e^{\frac{2\pi i}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{2}$ gestaltet sich wie folgt:

$$\sqrt{3} \equiv 4, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \equiv 2; \quad \frac{\sqrt{-1}}{2} \equiv \frac{\sqrt{12}}{2} \equiv \frac{5}{2} \equiv 9; \quad 2 + 9 \equiv 11.$$

Dieses 11 erscheint an der richtigen Stelle der ersten eigentlichen 12ten Wurzel der Einheit.

Diese Eigenschaft ist von grosser Tragweite. Einem jeden Punkte der complexen Zahlenebene, der durch *rationale* Verbindung der obigen vorgegebenen 12 Wurzelpunkte erreicht werden kann, ist ein bestimmter Rest in Bezug auf 13 zugeordnet — denn jenen rationalen Operationen geht eine *eindeutige* Verbindung der entsprechenden Reste parallel. So erscheint die ganze Zahlenebene mit einem Netze von — theils rationalen, theils irrationalen — Zahlen überdeckt; jedem erreichbaren Punkte ist durch die Operationenfolge, welche ihn bestimmt, ein gewisser Rest eindeutig zugewiesen.

Da diesem Gebilde die *Stetigkeit* fehlt, so scheinen die Grenzen seiner Verwendbarkeit enge gezogen; immerhin möge noch ein *Beispiel* zeigen, wie man nach dem soeben ausgesprochenen Principe operiren kann.

Um zu beweisen, dass die Summe der von den Ecken eines regulären Polygons berührten Potenzreste $\equiv 0$ ist, lege man das Polygon auf die Figur des entsprechenden in den eingetheilten Kreis eingeschriebenen Polygons der z-Ebene; dieses letztere hat als regelmässige Figur seinen Schwerpunkt im Anfangspunkt, wenn man sich auf seine Ecken gleiche Gewichte vertheilt denkt.

Daher ist die Summe der berührten *Einheitswurzel* $= 0$; auch das mit dem Kreistheilungspolygon congruente Polygon der *Potenzreste* hat daher eine Eckensumme $\equiv 0$.

München, Anfang Mai 1882.

Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$.

Von

PAUL GORDAN in Erlangen.

Im Anschlusse an meine beiden früheren Arbeiten über die vorgenannte Form*), sowie an meine Untersuchung über Kegelschnittbüschel**) behandele ich im Folgenden zuvörderst die typische Darstellung jener biquadratischen Form und eines zutretenden Kegelschnitts.

Mein erstes Hauptresultat in dieser Richtung ist, dass sich die Coefficienten dieser Darstellung aus nur 12 simultanen Invarianten, welche ich die *Fundamentalinvarianten* nenne, als ganze Functionen zusammensetzen. Dann aber gebe ich explicite, das volle System der zwischen diesen Fundamentalinvarianten bestehenden Relationen. Da unser f numerisch ist, so wird die Anzahl der unabhängigen Invarianten der Zahl der Coefficienten einer ternären quadratischen Form gleich sein, also 6 betragen. Ich zeige nun, *dass 5 von unseren 12 Invarianten sich rational durch die übrigen ausdrücken lassen, und dass zwischen letzteren eine algebraische Gleichung besteht, welche in zweien derselben nur vom sechsten Grade ist.* Einfacher hätte man das Resultat bei einer so schwierigen Fragestellung wohl kaum erwarten können.

Hieran anknüpfend behandele ich im zweiten Abschnitte des Folgenden die Aufgabe, *einen Kegelschnitt zu berechnen, wenn seine Fundamentalinvarianten mit f (unter Berücksichtigung jener Relationen) numerisch gegeben sind.* Ein ähnliches Problem habe ich bereits für einen unbekannten *Punkt*, x_1, x_2, x_3, in Bd. XVII dieser Annalen erledigt. Doch wird man bemerken, dass meine jetzige Behandlungsweise nicht nur der Sache, sondern auch der Methode

*) Bd. XVII dieser Annalen: 1) Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$; 2) Ueber die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$.

**) Ueber Büschel von Kegelschnitten; Bd. XIX dieser Annalen.

nach einen Fortschritt aufweist, indem ich nämlich bis zum Schlusse an der typischen Darstellung als solcher festhalte und in keiner Weise accessorische Constructionen benutze.

Mit diesem zweiten Abschnitte ist nun die letzte Vorarbeit geleistet, die nöthig war, um das Ziel zu erreichen, das ich seit vier Jahren bei meinen Arbeiten verfolgt habe, nämlich *die explicite Auflösung der Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von* 168 *Substitutionen*. Ich habe der gegenwärtigen Arbeit *materiell* nur noch wenige Bemerkungen hinzuzufügen, damit jene Auflösung fertig und vollkommen dastehe, und es darf sich mein folgender Aufsatz, der speciell von jener Auflösung handeln soll, fast ganz auf allgemeine Betrachtungen beschränken.

Abschnitt I.

Die typische Darstellung von f und $\varrho = u_\varrho^2$.

§ 1.

Einleitung.

Was den allgemeinen Gedankengang der Entwickelungen dieses ersten Abschnittes betrifft, so gebe ich in § 2. die zwölf Fundamentalinvarianten an, von denen bereits vorstehend die Rede war, recapitulire sodann einiges von den Ergebnissen meiner früheren Arbeiten, bei denen jetzt mit Rücksicht auf den besonderen hier vorliegenden Zweck gewisse Aenderungen in der Bezeichnung indicirt scheinen, und verwende endlich in den folgenden Paragraphen alle Anstrengung darauf, gewisse höhere Invarianten durch jene 12 Fundamentalinvarianten auszudrücken. In den letzten Paragraphen zeige ich sodann, dass damit die gewünschte typische Darstellung, sowie auch die Herstellung der Relationen zwischen jenen 12 Invarianten eo ipso geleistet ist.

Vielleicht wird man dieser Entwickelung vorwerfen, dass sie ohne rechtes Princip verfährt und überhaupt zu weit ausholt. Aber ein eigentliches Princip zur Auflösung solcher Fragen, wie sie hier in Betracht kommen, haben wir bisher überhaupt nicht. So bleibt nichts als die allgemeine Regel, die etwa ein Wanderer befolgen wird, der gezwungen ist, sich in unbekannter Gegend zurechtzufinden. Indem er einen hohen Aussichtspunkt besteigt, von dem er das Vorland überblicken kann, findet er sein Ziel mit Sicherheit, aber allerdings nicht auf dem kürzesten Wege. So auch entstehen die Beziehungen, welche ich suche, im Folgenden dadurch, dass ich zunächst durch

Berechnung immer complicirter werdender Invarianten eine übersichtliche Kenntniss des Gesammtgebietes dieser Bildungen zu erreichen strebe.

§ 2.

Die zwölf Fundamentalinvarianten.

Das vollständige Formensystem der einzelnen Form

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$$

habe ich im XVII. Bande dieser Annalen (siehe Tabelle daselbst) gegeben. Tritt nun die quadratische Form

$$\varrho = u_\varrho^2$$

hinzu, deren volles System die Formen

$$\varrho, \quad (\varrho\varrho_1 x)^2, \quad (\varrho\varrho_1\varrho_2)^2$$

umfasst, so hat man zur Bildung des simultanen Systems diese Formen in allen Weisen mit den Formen von f durch Ueberschiebung zu combiniren, worauf eine nachherige Reduction die überflüssigen Bildungen ausscheiden wird.

Es ist in keiner Weise meine Absicht, diesen Process hier durchzuführen. Vielmehr beschränke ich mich auf die einfachsten Formen, welche zur Definition der Fundamentalinvarianten ausreichen. Ich bemerke also einmal, dass $f = a_x^n$ zu der Form vierter Classe:

$$\frac{1}{2}(abu)^4 = u_r^4 \text{ *)}$$

in einem merkwürdigen Reciprocitätsverhältnisse steht, von dem sogleich noch wird gehandelt werden müssen. Ich führe andererseits die Bezeichnungen ein:

$$s = \frac{1}{\sqrt{8}} a_\varrho^2 a_x^2 \text{ **)};$$

$$r = (\varrho\varrho_1 x)^2; \quad \tau = (ss_1 u)^2; \quad t = (\varrho\tau x)^2; \quad \sigma = (rsu)^2;$$

$$s_\varrho^2 = 2(2); \quad r_\varrho^2 = 6(3); \quad s_\tau^2 = 6(3); \quad r_\tau^2 = (4). \text{ ***)}$$

*) Vergl. Bd. XVII.

**) Die Coefficienten von s haben sonach die Werthe:

$$s_{11} = \sqrt{2} \cdot \varrho_{12}, \quad s_{22} = \sqrt{2} \cdot \varrho_{23}, \quad s_{33} = \sqrt{2} \cdot \varrho_{31},$$

$$s_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varrho_{11}, \quad s_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varrho_{22}, \quad s_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \varrho_{33}.$$

***) Die neuen Bezeichnungen weichen von denjenigen, die ich in meiner Arbeit über Kegelschnittbüschel gebraucht habe, namentlich dadurch ab, dass ich nun die einzelnen Invarianten (weil nämlich f rein numerisch ist) nur nach ihrem Grad in den Coefficienten von ϱ markire.

Dann sind die 12 *Fundamentalinvarianten, von denen des Weiteren gehandelt werden soll, die folgenden:*

$$s_\varrho^2 = 2(2);\quad r_\varrho^2 = 6(3);\quad s_\tau^2 = 6(\bar{3});\quad r_\tau^2 = (4);\quad a_\tau^2 a_{\tau_1}^2 = (\bar{4});$$

$$r_\nu^2 r_\nu'^2 = (\bar{4});\quad a_\sigma^2 a_\tau^2 = (5);\quad r_\nu^2 t_\nu^2 = (\bar{5});\quad a_\sigma^2 a_{\sigma_1}^2 = (6);\quad t_\nu^2 t_\nu'^2 = (\bar{6});$$

$$a_\sigma^2 b_{\sigma_1}^2 (abs)^2 = (7);\quad t_\nu^2 t_{\nu_1}'^2 (\nu\nu_1\varrho)^2 = (\bar{7}).$$

Die hauptsächlichen Sätze, welche betreffs dieser Invarianten abgeleitet werden sollen, sind schon im Vorstehenden genannt worden. Ich will hier, aber ohne Beweis, hinzufügen, dass diese 12 Invarianten in der That das volle System der Invarianten von f und ϱ bilden.

Was jene Form vierter Classe

$$\tfrac{1}{2}\,(abu)^4 = u_\nu^4$$

angeht, so wurde in Bd. XVII der Annalen ein Process angegeben, den ich den *Vertauschungsprocess* nannte. Ersetzt man nämlich in einem symbolischen Producte P, welches die Symbole $a, b, c, \cdots$ von f und ausserdem x und u enthalten mag, jene Symbole durch $\nu, \nu', \nu'', \cdots$, sodann die x durch die u, die u durch die x, so erhält man ein neues Product Q, welches innerhalb des Systems dieselbe Stellung einnimmt wie das P. Wiederholt man den Process, so gelangt man zu P zurück.

Dieser Vertauschungsprocess kann nun auf die simultanen Bildungen von f und ϱ erweitert werden; *es muss dann nur jedesmal* ϱ *mit* s *vertauscht werden.* Dabei gehen, wie man sofort sieht, die folgenden Formen resp. in einander über:

$$r,\ \tau,\ \sigma,\ t,$$
$$\tau,\ r,\ t,\ \sigma.$$

Die Fundamentalinvarianten gruppiren sich daher folgendermassen paarweise zusammen:

$$(2),\ (3),\ (4),\ (\bar{4}),\ (5),\ (6),\ (7),$$

und

$$(2),\ (\bar{3}),\ (4),\ (\bar{4}),\ (\bar{5}),\ (\bar{6}),\ (\bar{7}).$$

Noch Folgendes sei hervorgehoben. Die Form s wurde oben in der Weise eingeführt, dass ihre Coefficienten mit $\sqrt{2}$ multiplicirt werden müssen, um ganze Functionen der ϱ_{ik} mit *rationalen* Coefficienten zu werden. Daher sind von den Fundamentalinvarianten nur folgende:

$$(3),\ (4),\ (\bar{4}),\ (\bar{\bar{4}}),\ (5),\ (6),\ (\bar{6}),\ (\bar{7})$$

ganze Functionen der ϱ_{ik} mit rationalen Coefficienten; die übrigen:

$$(2),\ (\bar{3}),\ (5),\ (7)$$

müssen, um es zu werden, mit $\sqrt{2}$ multiplicirt werden.

§ 3.

Excurs über Kegelschnittbüschel.

Von den Formeln meiner Arbeit über Kegelschnittbüschel will ich hier die wichtigeren in die neue Bezeichnung übertragen.

Constatiren wir zuvörderst, dass das volle System von ϱ und s von folgenden 20 Formen gebildet wird (die nach ihrem Grad in den u und x geordnet erscheinen):

	0	1	2	3
0	$(2)\ (\bar{3})$ $(3)\ (4)$		r, s, t	(r, s, t)
1		s_ϱ, t_ϱ	(r, s, u) (r, t, u) (s, t, u)	
2	ϱ, σ, τ	(ϱ, σ, x) (ϱ, τ, x) (σ, τ, x)		
3	(ϱ, σ, τ)			

Ich stelle sodann die Wichtigeren unter den Reductionsformeln des Systems zusammen:

(1a)
$$\begin{cases}
\left(ru\,\widehat{\varrho x}\right)^2 = 2(3)\,u_x^2 + r\varrho; \\
\left(su\,\widehat{\tau x}\right)^2 = 2(\bar{3})\,u_x^2 + s\tau; \\
(\varrho\sigma x)^2 = 2(2)\,r + 2(3)\,s; \quad (\sigma\tau x)^2 = 2(\bar{3})\,r + (4)\,s; \\
\qquad\qquad (\sigma\sigma_1 x)^2 = (4)r + 16(23)s - 4(3)t; \\
(stu)^2 = 2(2)\,\tau + 2(\bar{3})\,\varrho; \quad (rtu)^2 = 2(3)\,\tau + (4)\,\varrho; \\
\qquad\qquad (tt_1 u)^2 = (4)\,\tau + 16(2\bar{3})\,\varrho - 4(\bar{3})\,\sigma; \\
(rr_2 u)^2 = 8(3)\,\varrho; \quad (\tau\tau_1 x)^2 = 8(\bar{3})\,s; \\
r_\sigma^2 = 16(23); \quad (\varrho\sigma\tau)^2 = t_\sigma^2 = 2(24) + 12(3\bar{3}); \\
\qquad\qquad (\sigma\sigma_1\sigma_2)^2 = 24(234) - 48(33\bar{3}); \\
t_\tau^2 = 16(2\bar{3}).
\end{cases}$$

$$(1b)\quad \begin{cases} (4)\,u_x = r_\tau + 2s_\sigma = r_\tau + 2t_\varrho; \quad r_\sigma + 4(3)\,s_\varrho = 8(23)\,u_x; \\ \qquad\qquad t_\tau + 4(\bar{3})\,s_\varrho = 8(2\bar{3})\,u_x; \\ t_\sigma = 4(3\bar{3})\,u_x - (4)\,s_\varrho + 4(2)\,t_\varrho; \\ s_x s_x' s_\sigma s_\sigma' = -(\bar{3})\,r + \frac{(4)}{2}\,s; \qquad t_\varrho t_{\varrho_1} u_\varrho u_{\varrho_1} = -(3)\,\tau + \frac{(4)}{2}\,\varrho; \\ s_\varrho s_\sigma u_\varrho u_\sigma = \frac{(4)}{2}\,\varrho - (3)\,\tau; \qquad s_\varrho t_\varrho s_x t_x = \frac{(4)}{2}\,s - (\bar{3})\,r; \\ r_\sigma s_\sigma r_x s_x = 2(3)\,t; \qquad t_\tau t_\varrho u_\tau u_\varrho = 2(\bar{3})\,\sigma; \\ t_\varrho t_\sigma u_\varrho u_\sigma = 4(3\bar{3})\,\varrho + \frac{(4)}{2}\,\sigma - 4(23)\,\tau; \\ s_\sigma t_\sigma s_x t_x = 4(3\bar{3})\,s + \frac{(4)}{2}\,t - 4(2\bar{3})\,r. \end{cases}$$

Die Tactinvariante:

$$D = \begin{vmatrix} r_\varrho^2 & r_\sigma^2 & r_\tau^2 \\ s_\varrho^2 & s_\sigma^2 & s_\tau^2 \\ t_\varrho^2 & t_\sigma^2 & t_\tau^2 \end{vmatrix}$$

hat den Werth:

$$D = -(444) + 4(2244) + 144(23\bar{3}4) - 432(33\bar{3}\,\bar{3}) - 512(2223\bar{3}).$$

Einige dieser Formeln kann man auch so zusammenfassen:

$$(2)\quad \begin{cases} (y_1\varrho + y_2\sigma + y_3\tau,\ y_1\varrho + y_2\sigma + y_3\tau,\ x)^2 \\ = y_1^2 r + 2y_1y_2\big(2(2)\,r + 2(3)\,s\big) + y_2^2\big((4)r + 16(23)s - 4(3)t\big) \\ \qquad + 2y_1y_3\,t + 2y_2y_3\big(2(\bar{3})\,r + (4)\,s\big) + 8(\bar{3})\,sy_3^2 \\ = l_y^2 r + m_y^2 s + n_y^2 t, \end{cases}$$

wo:

$$(3)\quad \begin{aligned} l_y^2 &= y_1^2 + 4(2)\,y_1y_2 + (4)\,y_2^2 + 4(\bar{3})\,y_2y_3, \\ m_y^2 &= 4(3)\,y_1y_2 + 16(23)\,y_2^2 + 2(4)\,y_2y_3 + 8(\bar{3})\,y_3^2, \\ n_y^2 &= -4(3)\,y_2^2 + 2y_1y_3. \end{aligned}$$

Diese Bezeichnungen l, m, n werden in der Folge viel gebraucht werden.

Ich reproducire ferner zwei von den Formeln, die dazu dienen, um die Quadrate und Producte der sogenannten „formes gauches“, d. h. der folgenden Formen:

$$\begin{aligned} &(\varrho, \sigma, x);\ (\varrho, \tau, x);\ (\sigma, \tau, x);\ (\varrho, \sigma, \tau); \\ &(r, s, u);\ (r, t, u);\ (s, t, u);\ (r, s, t) \end{aligned}$$

durch die übrigen auszudrücken. Dabei führe ich, was immer gestattet ist, mehrere Reihen von Variablen neben einander ein. Man hat:

$$u_\sigma u_\tau u_{\sigma_1} u_{\tau_1}(\sigma\tau x)\,(\sigma_1\tau_1 x)$$

$$= \begin{cases} +2(\bar{3})r\sigma\tau + (4)s\sigma\tau - 4(\bar{3})s\sigma^2 - \tau^2\left(\frac{(4)}{2}r + 8(23)s - 2(3)t\right) \\ +u_x\left(t_\varrho\left(8(\bar{3})\sigma - 2(4)\tau\right) + 16(3\bar{3})\tau s_\varrho\right) \\ +u_x^2\left(-16(3\bar{3}\bar{3})\varrho - 2(\bar{3}4)\sigma + \frac{(44)}{2}\tau\right); \end{cases}$$

(4)

$$u_\varrho u_\tau v_{\varrho_1} v_{\tau_1}(\varrho\tau x)\,(\varrho_1\tau_1 x)$$

$$= \begin{cases} \frac{t}{2}\left(\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2 - (tuv)^2\right) - 2(\bar{3})\varrho\left(sv\,\widehat{\varrho x}\right)^2 - 2(\bar{3})v_\varrho^2\left(su\,\widehat{\varrho x}\right)^2 \\ \qquad\qquad - \frac{\tau}{4}\left(rv\,\widehat{\tau x}\right)^2 - \frac{1}{4}v_\tau^2\left(ru\,\widehat{\tau x}\right)^2 \\ +2(\bar{3})r(suv)^2 + 2(\bar{3})s(ruv)^2 + (\bar{3})(u_x^2 v_\sigma^2 + v_x^2\sigma) \\ \qquad +4(2\bar{3})\left(uv\,\widehat{\varrho x}\right)^2 - 3(\bar{3})\left(uv\,\widehat{\sigma x}\right)^2 + \frac{(4)}{4}\left(uv\,\widehat{\tau x}\right)^2. \end{cases}$$

Combinirt man diese Formeln durch Ueberschiebung mit

$$\varrho,\ \sigma,\ \tau,\ (pru)^2,\ (psu)^2,\ (ptu)^2,$$

(wo p beliebig ist), so folgt des Ferneren:

$$u_\sigma u_\tau u_{\sigma_1} u_{\tau_1}(\sigma\tau\varrho_1)\,(\sigma_1\tau_1\varrho)$$

$$= -16(333)\varrho^2 + 2(\bar{3}4)\varrho\sigma + \left(32(23\bar{3}) - \frac{(44)}{2}\right)\varrho\tau$$
$$-\varrho(2\bar{3})\sigma^2 + \left(2(24) - 4(3\bar{3})\right)\sigma\tau + \left((34) - 16(223)\right)\tau^2;$$

$$u_\varrho u_\tau v_{\varrho_1} v_{\tau_1}(\varrho\tau\varrho_2)\,(\varrho_1\tau_1\varrho_2)$$

$$= \frac{(4)}{4}\left(\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2 - (tuv)^2\right) - (3)(\varrho v_\sigma^2 + \sigma v_\varrho^2) + 6(3\bar{3})(suv)^2$$
$$+2(2\bar{3})(ruv)^2 - (3)\tau v_\tau^2;$$

(4)

$$u_\varrho u_\tau v_{\varrho_1} v_{\tau_1}(\varrho\sigma\tau)\,(\varrho_1\sigma\tau_1)$$

$$= \begin{cases} \left((24) - 2(3\bar{3})\right)(\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2) - 4(2\bar{3})(\varrho v_\sigma^2 + \sigma v_\varrho^2) \\ \qquad\qquad - \frac{(4)}{4}(\sigma v_\tau^2 + \tau v_\sigma^2) + 2(3)\sigma v_\sigma^2 \\ -\frac{1}{2}(\bar{3}4)(ruv)^2 + 8(223)(ruv)^2 + \left(\frac{(44)}{4} - 8(23\bar{3})\right)(suv)^2 \\ \qquad\qquad + \left(6(3\bar{3}) - (24)\right)(tuv)^2; \end{cases}$$

$$u_\varrho u_\tau v_{\varrho_1} v_{\tau_1}(\varrho\tau\tau_2)\,(\varrho_1\tau_1\tau_2)$$

$$= 4(2\bar{3})(\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2) - 8(\bar{3}3)\varrho v_\varrho^2 - (\bar{3})(\sigma v_\tau^2 + \tau v_\sigma^2)$$
$$+6(\bar{3}\bar{3})(ruv)^2 + (\bar{3}4)(suv)^2 - 4(2\bar{3})(tuv)^2;$$

sowie:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} u_\varrho u_\tau v_{\varrho_1} v_{\tau_1} (\varrho\tau\ \widehat{pr})(\varrho_1\tau_1\ \widehat{pr}) \\ = \left\{\begin{array}{l} \frac{(4)}{2} p_\varrho^2(\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2) - 2(\bar{3})(\varrho v_\sigma^2 + \sigma v_\varrho^2) - 2(3) p_\varrho^2 \tau v_\tau^2 \\ \qquad - 4(3\bar{3})\big(\varrho(spv)^2 + v_\varrho^2 (spu)^2\big) \\ - \frac{(4)}{4}\big(\tau(rpv)^2 + v_\tau^2 (rpu)^2\big) + \frac{(4)}{4}(ruv)^2 p_\tau^2 + 16(3\bar{3}) p_\varrho^2 (suv)^2 \\ \qquad - (\bar{3}) p_\sigma^2 (ruv)^2 \\ + (\bar{3})\big(\sigma(rpv)^2 + v_\sigma^2 (rpu)^2\big) + 4(2\bar{3}) p_\varrho^2 (ruv)^2 - (3) p_\tau^2 (tuv)^2 \\ \qquad - \frac{(4)}{2} p_\varrho^2 (tuv)^2 \\ + (3)\big(\tau(tpv)^2 + v_\tau^2 (tpu)^2\big) + \big(8(23\bar{3}) - \frac{(44)}{4}\big)(puv)^2 \\ \qquad + (4)(puv)(tuv) p_\varrho t_\varrho - 24(3\bar{3})(puv)(suv) p_\varrho s_\varrho; \end{array}\right. \\ u_\varrho u_\tau v_{\varrho_1} v_{\tau_1} (\varrho\tau\ \widehat{ps})(\varrho_1\tau_1\ \widehat{ps}) \\ = \left\{\begin{array}{l} - 2(\bar{3})\varrho v_\varrho^2 p_\tau^2 + (2) p_\tau^2 (\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2) - \frac{1}{4} p_\tau^2 (\sigma v_\tau^2 + \tau v_\sigma^2) \\ \qquad - 4(2\bar{3})\big(\varrho(spv)^2 + v_\varrho^2 (spu^2\big) \\ + 4(2\bar{3}) p_\varrho^2 (suv)^2 - \frac{(3)}{2}\big(\tau(rpv)^2 + v_\tau^2 (rpu)^2\big) - (\bar{3}) p_\sigma^2 (suv)^2 \\ \qquad + 2(\bar{3}) p_\tau^2 (ruv)^2 \\ + (\bar{3})\big(v_\sigma^2 (psu)^2 + \sigma(spv)^2\big) - (2) p_\tau^2 (tuv)^2 - (\bar{3}) p_\varrho^2 (tuv)^2 \\ \qquad + (\bar{3})\big(\varrho(tpv)^2 + v_\varrho^2 (tpu)^2\big) \\ + \big(8(22\bar{3}) - \frac{5}{2}(\bar{3}4)\big)(puv)^2 - 8(2\bar{3}) p_\varrho s_\varrho (puv)(suv) \\ \qquad + 6(\bar{3}) p_\varrho t_\varrho (puv)(tuv); \end{array}\right. \\ u_\varrho u_\tau v_{\varrho_1} v_{\tau_1} (\varrho\tau\ \widehat{pt})(\varrho_1\tau_1\ \widehat{pt}) \\ = \left\{\begin{array}{l} 8(3\bar{3})\varrho v_\varrho^2 p_\varrho^2 + 4(2\bar{3}) p_\varrho^2 (\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2) + \frac{(4)}{4} p_\tau^2 (\varrho v_\tau^2 + \tau v_\varrho^2) \\ \qquad - (\bar{3}) p_\varrho^2 (\sigma v_\tau^2 + \tau v_\sigma^2) \\ - (3) p_\tau^2 v_\tau^2 - (\bar{3}) p_\tau^2 (\varrho v_\sigma^2 + \sigma v_\varrho^2) + 2(3\bar{3})\big(\varrho(rpv)^2 + v_\varrho^2 (rpu)^2 \\ \qquad + 2 p_\varrho^2 (ruv)^2\big) \\ + 2(2\bar{3})\big(2 p_\tau^2 (ruv)^2 - \tau(rpv)^2 - v_\tau^2 (rpu)^2\big) \\ + (3\bar{4})\big(2 p_\varrho^2 (suv)^2 - \varrho(spv)^2 - v_\varrho^2 (spu)^2\big) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$(4)\left\{=\begin{cases}+2(3\bar{3})\big(\tau(spv)^2+v_\tau^2(spu)^2+2p_\tau^2(suv)^2\big)-4(2\bar{3})p_\varrho^2(tuv)^2\\ +(\bar{3})\big(\sigma(tpv)^2+v_\sigma^2(tpu)^2-p_\sigma^2(tuv)^2\big)-\frac{(4)}{4}p_\tau^2(tuv)^2\\ -\big(2(2\bar{3}4)+12(3\bar{3}\bar{3})\big)(puv)^2-4(\bar{3}4)p_\varrho s_\varrho(puv)(suv)\\ +16(2\bar{3})p_\varrho t_\varrho(puv)(tuv).\end{cases}\right.$$

§ 4.

Ueber gewisse Relationen zwischen den Formen von f und über die einfachsten Covarianten von f und ϱ.

Von den Relationen, welche zwischen den Formen von f bestehen, wurden in meiner früheren Arbeit (Annalen Bd. 17) nur solche entwickelt, welche bloss eine Reihe von Variabelen x, bez. u enthalten. Ich führe hier von solchen Beziehungen die folgenden an:

$$(abc)^2a_x^2b_x^2c_x^2=\tfrac{3}{16}\Delta;\quad a_\nu^2u_\nu^2a_x=\tfrac{1}{8}u_x^2;$$

$$(abu)^2(acu)^2(bcu)^2=-\tfrac{3}{8}u_j^6=-2(\nu_1\nu_2\nu_3)^2u_\nu^2u_{\nu_1}^2u_{\nu_2}^2;$$

$$(abu)(acu)(bcu)(abc)a_xb_xc_x=-\tfrac{1}{2}f_\varphi+\tfrac{1}{32}v_x^3;$$

$$(abu)^2(acu)^2b_x^2c_x^2=(\nu\nu_1x)^2(\nu\nu_2x)^2u_{\nu_1}^2u_{\nu_2}^2=\tfrac{1}{4}f\varphi-\tfrac{1}{3}f_\varphi u_x+\tfrac{1}{32}u_x^4;$$

und leite nach bekannten Methoden aus ihnen solche ab, welche mehrere Reihen von Punktcoördinaten: x, y, z, ξ, η, etc. und mehrere Reihen von Liniencoordinaten: $u, v, w \cdots$ enthalten. Dabei beschränke ich mich selbstverständlich auf solche Relationen, die ich im weiteren Verlaufe gegenwärtiger Untersuchung gebrauchen werde. Man hat:

$$(1)\qquad (abc)^2a_x^2b_y^2c_z^2=\tfrac{3}{16}\Delta_x^2\Delta_y^2\Delta_z^2+\tfrac{1}{48}(xyz)^2;$$

$$(2)\qquad (abu)^2(acv)^2(bcw)^2=-2(\nu\nu_1\nu_2)^2u_\nu^2v_{\nu_1}^2w_{\nu_2}^2+\tfrac{1}{16}(uvw)^2;$$

$$(3)\quad (abu)(acu)(bcu)(abc)a_yb_xc_x=-\tfrac{1}{2}a_\nu a_x^2a_y^2u_\nu^2v_\nu+\tfrac{1}{32}u_xu_yv_x;$$

$$(4)\quad 3(abu)^2(acv)^2(b_x^2c_y^2+c_x^2b_y^2)+a_\nu a_xa_yu_\nu v_\nu(a_yv_\nu u_x+a_yu_\nu v_x+a_xv_\nu u_y+a_xu_\nu v_y)$$
$$=-4u_\nu^2v_{\nu_1}^2(\nu_2xy)^2(\nu\nu_1\nu_2)^2+2(auv)^2b_x^2c_y^2(abc)^2+\tfrac{3}{2}a_x^2a_y^2u_\nu^2v_\nu^2+\tfrac{1}{8}u_x^2v_y^2+\tfrac{1}{8}u_y^2v_x^2;$$

(5) $(cbu)^2(acv)^2(b_x^2c_y^2-c_x^2b_y^2)=(\nu\nu_1x)^2(\nu\nu_2y)^2(u_{\nu_1}^2v_{\nu_2}^2-u_{\nu_2}^2v_{\nu_1}^2)$

$=a_\nu a_x a_y u_\nu v_\nu(a_x u_\nu v_y-a_x v_\nu u_y-a_y u_\nu v_x+a_y v_\nu u_x)+\frac{1}{16}u_x^2v_y^2-\frac{1}{16}u_y^2v_x^2;$

(6) $(dbu)^2(acv)^2b_x^2c_y^2-(abc)^2(auv)^2b_x^2c_y^2=(\nu\nu_1x)^2(\nu\nu_2y)^2u_{\nu_1}^2v_{\nu_2}^2$

$-(\nu\nu_1\nu_2)^2\nu xy)^2u_{\nu_1}^2v_{\nu_2}^2;$

(7) $$\left\{\begin{array}{l}(uv\,\widehat{xy})^2(uv\,\widehat{\xi\eta})-(uv\,\widehat{x\xi})(uv\,\widehat{y\eta})^2\\ =\left\{\begin{array}{l}u_x^2u_y^2v_\xi^2v_\eta^2+u_\xi^2u_\eta^2v_x^2v_y^2-u_x^2u_\xi^2v_y^2v_\eta^2-u_y^2u_\eta^2v_x^2v_\xi^2\\ \quad+(uv\,\widehat{\xi\eta})^2(u_x^2v_y^2+v_x^2u_y^2)+(uv\,\widehat{xy})^2(u_\xi^2v_\eta^2+v_\xi^2u_\eta^2)^2\\ \quad-(uv\,\widehat{y\eta})^2(u_x^2v_\xi^2+u_\xi^2v_x^2)-(uv\,\widehat{x\xi})^2(u_y^2v_\eta^2+v_y^2u_\eta^2);\end{array}\right.\end{array}\right.$$

sowie endlich:

(8) $$\left\{\begin{array}{l}a_x^2b_y^2(ab\,\widehat{\xi\eta})^2\\ =\left\{\begin{array}{l}a_x^2a_y^2\cdot a_\xi^2a_\eta^2-a_x^2a_\xi^2\cdot a_y^2a_\eta^2+\frac{1}{4}(\nu xy)^2(\nu\xi\eta)^2-\frac{1}{4}(\nu x\xi)^2(\nu y\eta)^2\\ -a_\xi^2b_\eta^2(ab\,\widehat{xy})^2+a_x^2b_\xi^2(ab\,\widehat{y\eta})^2+a_y^2b_\eta^2(ab\,\widehat{x\xi})^2.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ersetzt man nun hier die $x, y, z, \cdots$ durch Symbole ϱ, σ, τ und die u, v, w durch Symbole r, s, t, so erhält man unter Benutzung der Formeln des § 3 die folgenden Relationen, die später verwandt werden sollen:

1) Aus Formel (4) und Vertauschung:

(1′) $16(abc)^2a_\tau^2b_x^2c_y^2=ss_y^2-\frac{4}{\sqrt{2}}a_\varrho s_\varrho(a_xa_y^2s_x+a_x^2a_ys_y$

$-3(\nu\varrho x)^2(\nu\varrho_1y)^2+r_\nu^2(\nu xy)^2+\frac{6(2)}{\sqrt{2}}a_x^2a_y^2,$

(2′) $(abs)^2a_\tau^2b_x^2=-\frac{(2)s}{8\sqrt{2}}+\frac{t}{8\sqrt{2}}+\frac{1}{4}a_x^2a_\sigma^2-\frac{1}{\sqrt{8}}r_\nu^2(\nu\varrho x)^2,$

(3′) $8(abs)^2(acs_1)^2b_x^2c_y^2=8a_x^2b_y^2c_\tau^2(abc)^2+(\nu\varrho x)^2(\nu\varrho_1y)^2-r_\nu^2(\nu xy)^2,$

(4′) $2(\bar{4})+2(\bar{\bar{4}})-(4)+(22)=0.$

2) Aus Formel (8):

(5′) $a_x^2b_y^2(abr)^2=\frac{s}{8}s_y^2-\frac{(2)}{\sqrt{2}}a_x^2b_y^2+\frac{1}{4}r_\nu^2(\nu xy)^2-\frac{1}{4}(\nu\varrho x)^2(\nu\varrho_1y)^2$

$-\frac{1}{8}(\tau xy)^2+\frac{1}{\sqrt{8}}a_x^2(as\,\widehat{\varrho y})^2+\frac{1}{\sqrt{8}}a_y^2(as\,\widehat{\varrho x})^2,$

(6′) $a_\tau^2b_{\tau_1}^2(ab\,\widehat{\varrho x})^2=a_x^2b_\tau^2(abt)^2+\frac{(3)r}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}t_\nu^2(\nu xy)^2,$

$$(7')\quad a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abs)(abu) s_\varrho u_\varrho = \frac{\varrho}{2} a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abs)^2 + (2) a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abu)^2$$
$$- \frac{1}{2}(asu)^2 (abt)^2 b_\tau^2 - \frac{(3)\sigma}{\sqrt{8}} + \frac{(3)}{4} t_\nu^2 u_\nu^2 + \frac{(4)\tau}{16\sqrt{2}},$$

$$(8')\quad a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abt)(abu) t_\varrho u_\varrho = \frac{\varrho}{2} a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abt)^2 + \frac{(4)}{2} a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abu)^2$$
$$- \frac{1}{2}(atu)^2 (abt_1)^2 b_\tau^2 - \frac{(3\bar{3})\tau}{\sqrt{2}} - \frac{(\bar{3}4)\varrho}{\sqrt{8}} + \frac{(\bar{6})}{8}\tau$$
$$+ (\bar{3})\, t_\nu^2 u_\nu u_\varrho s_\nu s_\varrho.$$

§ 5.

Die C_{ik} und C'_{ik}.

Indem ich es nunmehr unternehme, eine grosse Anzahl höherer Invarianten durch die Fundamentalinvarianten auszudrücken, beginne ich mit solchen Invarianten, welche aus den Formen

$$a_x^2 b_x^2 (abu)^2, \quad u_\nu^2 u_{\nu_1}^2 (\nu\nu_1 x)^2$$

entstehen, indem man die x und u durch die Symbole ϱ, σ, τ bez. r, s, t ersetzt. Ich führe die Bezeichnung ein:

$$C_{11} = a_\sigma^2 b_{\sigma_1}^2 (abr)^2; \quad C_{21} = a_\sigma^2 b_{\sigma_1}^2 (abs)^2; \quad C_{31} = a_\sigma^2 b_{\sigma_1}^2 (abt)^2;$$
$$C_{12} = a_\sigma^2 b_\tau^2 (abr)^2; \quad C_{22} = a_\sigma^2 b_\tau^2 (abs)^2; \quad C_{32} = a_\sigma^2 b_\tau^2 (abt)^2;$$
$$C_{13} = a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abr)^2; \quad C_{23} = a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abs)^2; \quad C_{33} = a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (abt)^2;$$

sowie ferner:

$$C'_{11} = t_\nu^2 t'^2_{\nu_1} (\nu\nu_1\tau)^2; \quad C'_{21} = t_\nu^2 t'^2_{\nu_1} (\nu\nu_1\varrho)^2; \quad C'_{31} = t_\nu^2 t'^2_{\nu_1} (\nu\nu_1\sigma)^2;$$
$$C'_{12} = r_\nu^2 t_{\nu_1}^2 (\nu\nu_1\tau)^2; \quad C'_{22} = r_\nu^2 t_{\nu_1}^2 (\nu\nu_1\varrho)^2; \quad C'_{32} = r_\nu^2 t_{\nu_1}^2 (\nu\nu_1\sigma)^2;$$
$$C'_{13} = r_\nu^2 r'^2_{\nu_1} (\nu\nu_1\tau)^2; \quad C'_{23} = r_\nu^2 r'^2_{\nu_1} (\nu\nu_1\varrho)^2; \quad C'_{33} = r_\nu^2 r'^2_{\nu_1} (\nu\nu_1\sigma)^2;$$

Die Berechnung der C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{31}, C_{32} geschieht dadurch, dass wir in der Formel (8) des vorstehenden Paragraphen die x, y, ξ, η passend durch Symbole ersetzen und dann die Formeln des § 3 verwenden. C_2 ist nach Definition (7). C_{12} und C_{23} werden mittelst der Formel (2) des vorstehenden Paragraphen ausgewerthet, C_{33} mittelst Formel (6'). Die C' entstehen aus den C durch Vertauschung, ich brauche daher ihre Werthe nicht besonders hinzuschreiben. Die Werthe der C sind die folgenden:

$$C_{11} = \frac{(26)}{\sqrt{2}} - (3\bar{5}) + \sqrt{2}(3\bar{5}) + \frac{(4\bar{4})}{4} - (22\bar{4}) - 4(23\bar{3}) + 5\frac{5(233)}{\sqrt{2}},$$

$$C_{12} = -\frac{(2\bar{5})}{2} + \frac{(25)}{\sqrt{2}} + \frac{(\bar{3}\bar{4})}{2} + \frac{(3\bar{4})}{\sqrt{2}} + \frac{(34)}{\sqrt{8}},$$

$$C_{13} = -\frac{(6)}{4} + \frac{(24)}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2}(\bar{3}\bar{3}) + 3\sqrt{2}(33),$$

$$C_{21} = (7),$$

$$C_{22} = \frac{(6)}{4} - \frac{(2\bar{4})}{\sqrt{2}} + \frac{(24)}{8\sqrt{2}} + 3\frac{(3\bar{3})}{\sqrt{8}} - \frac{3}{2}(33),$$

$$C_{23} = -\frac{(5)}{\sqrt{8}} + \frac{(5)}{4} + 5\frac{(23)}{4\sqrt{2}},$$

$$C_{31} = -(3\bar{6}) - \sqrt{2}(\bar{3}6) + \frac{(36)}{2} + \frac{(4\bar{5})}{4} + \frac{(45)}{\sqrt{8}} - (22\bar{5}) + \sqrt{2}(225) + \frac{(234)}{4\sqrt{2}}$$
$$+ 6(3\bar{3}\bar{3}) - 3(333) + \frac{(2223)}{\sqrt{2}},$$

$$C_{32} = -\frac{(2\bar{6})}{2} + \frac{(35)}{2} - \frac{(3\bar{5})}{\sqrt{2}} + \frac{(35)}{2} + \frac{(44)}{8\sqrt{2}} + \sqrt{2}(22\bar{4}) + 3(23\bar{3}) - 3\frac{(23\bar{3})}{\sqrt{8}},$$

$$C_{33} = -(7) + \frac{(3\bar{4})}{2} + \frac{(34)}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}(223).$$

§ 6.

Die $c_{i,k,l}$, $c'_{i,k,l}$ und die $D_{i,k}$.

Etwas schwerer ist die Berechnung derjenigen Invarianten, welche aus

$$(abc)^2 a_x^2 b_x^2 c_x^2; \quad (\nu\nu_1\nu_2)^2 u_\nu^2 u_{\nu_1}^2 u_{\nu_2}^2; \quad a_\nu a_x^3 u_\nu^3 u_x$$

durch Eintragung unserer Symbole entstehen.

Bemerken wir vorab, dass bei diesem Eintragungsprocesse u_x in einen der Ausdrücke

$$r_\varrho,\ r_\sigma,\ r_\tau,\ s_\varrho,\ s_\sigma,\ s_\tau,\ t_\varrho,\ t_\sigma,\ t_\tau$$

übergeht. Nun lassen sich nach § 3 alle Formen, welche einen dieser symbolischen Factoren enthalten, durch zerfallende und solche Formen, welche s_ϱ und t_ϱ zum Factor haben, ersetzen. Wir dürfen uns also auf letztere Formen beschränken.

Ich setze:

$$c_{111} = (abc)^2 a_\sigma^2 b_{\sigma_1}^2 c_{\sigma_2}^2; \quad c_{112} = (abc)^2 a_\sigma^2 b_{\sigma_1}^2 c_\tau^2; \quad c_{122} = (abc)^2 a_\sigma^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2;$$
$$c_{222} = (abc)^2 a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2;$$

$$c'_{111} = (\nu\nu_1\nu_2)^2 t_\nu^2 t'^2_{\nu_1} t''^2_{\nu_2}; \quad c'_{112} = (\nu\nu_1\nu_2)^2 r_\nu^2 t_{\nu_1}^2 t'^2_{\nu_2}; \quad c'_{122} = (\nu\nu_1\nu_2)^2 r_\nu^2 r'^2_{\nu_1} t_{\nu_2}^2;$$
$$c'_{222} = (\nu\nu_1\nu_2)^2 r_\nu^2 r'^2_{\nu_1} r''^2_{\nu_2};$$

sowie:

$$D_{11} = r_\nu^2 a_\tau^2 s_\nu s_\varrho a_\nu a_\varrho; \quad D_{12} = r_\nu^2 a_\sigma^2 s_\nu s_\varrho a_\nu a_\varrho; \quad D_{13} = t_\nu^2 a_\tau^2 s_\nu s_\varrho a_\nu a_\varrho;$$
$$D_{14} = t_\nu^2 a_\sigma^2 s_\nu s_\varrho a_\nu a_\varrho;$$

$$D_{21} = r_\nu^2 a_\nu^2 t_\nu t_\varrho a_\nu a_\varrho; \quad D_{22} = r_\nu^2 a_\sigma^2 t_\nu t_\varrho a_\nu a_\varrho; \quad D_{23} = t_\nu^2 a_\tau^2 t'_\nu t'_\varrho a_\nu a_\varrho;$$
$$D_{24} = t_\nu^2 a_\sigma^2 t'_\nu t'_\varrho a_\nu a_\varrho .$$

Die Berechnung dieser 16 Invarianten bewerkstellige ich folgendermassen. Aus Formel (1) § 4 bestimme ich c_{112}, c_{122}, c_{222}, hieraus durch Vertauschung c'_{112}, c'_{122}, c'_{222}, sodann aus Formel (5) ebenda D_{11}, D_{12}, D_{14}, D_{21}, D_{22}, durch Vertauschung hieraus D_{13}, D_{14}, endlich aus Formel (4) c'_{111} und D_{24} und durch Vertauschung c_{111}. Mit Rücksicht auf die Vertauschungen, die Jeder selbst mit Leichtigkeit vornehmen kann, begnüge ich mich hier, nur die Werthe der $c_{i,k,l}$ und der $D_{i,k}$ zusammenzustellen. Man findet:

$$c_{111} = \frac{3}{\sqrt{8}}(27) + 3\frac{(36)}{4\sqrt{2}} - 3\frac{(\bar{3}6)}{8} + 3\frac{(33\bar{3})}{\sqrt{2}} - 3\frac{(33\bar{3})}{2} - 3\frac{(333)}{\sqrt{2}} - 3\frac{(2223)}{2},$$

$$c_{112} = 3\frac{(26)}{8\sqrt{2}} - \frac{(35)}{4} + \frac{(35)}{\sqrt{8}} + \frac{(4\bar{4})}{16} - 3\frac{(22\bar{4})}{4} - 9\frac{(233)}{4\sqrt{2}},$$

$$c_{122} = -3\frac{(25)}{8} + 3\frac{(25)}{8\sqrt{2}} + \frac{(3\bar{4})}{8} + \frac{(\bar{3}4)}{16} + \frac{(34)}{4\sqrt{2}},$$

$$c_{222} = -3\frac{(6)}{16} + 3\frac{(2\bar{4})}{8\sqrt{2}} + 3\frac{(\bar{3}3)}{4} + 3\frac{(33)}{\sqrt{8}},$$

und für die $D_{i,k}$:

$$D_{11} = -\frac{(6)+(\bar{6})}{8\sqrt{2}} + (2)\frac{(4)+(\bar{4})}{4} + 3\frac{(24)}{32} + 3\frac{(33)+(3\bar{3})}{4\sqrt{2}} + \frac{3}{8}(3\bar{3}),$$

$$D_{12} = -\frac{(7)}{\sqrt{8}} - \frac{(2\bar{5})}{4\sqrt{8}} + \frac{(25)}{4} - \frac{(3\bar{4})}{4\sqrt{2}} + \frac{(3\bar{4})}{4} + \frac{(34)}{8} + 2(223),$$

$$D_{13} = -\frac{(7)}{\sqrt{8}} + \frac{(2\bar{5})}{4} - \frac{(25)}{4\sqrt{2}} + \frac{(\bar{3}\bar{4})}{4} - \frac{(3\bar{4})}{4\sqrt{2}} + \frac{(\bar{3}4)}{8} + 2(22\bar{3}),$$

$$D_{14} = \begin{cases} -(2)\dfrac{(6)+(\bar{6})}{4\sqrt{2}} - \dfrac{(35)+(\bar{3}5)}{4\sqrt{2}} - \dfrac{(\bar{3}5)+(3\bar{5})}{4} + \dfrac{(44)}{32} \\ +(22)\dfrac{(4)+(\bar{4})}{2} + 3\dfrac{(224)}{16} + 3(2)\dfrac{(33)+(\bar{3}\bar{3})}{\sqrt{8}} + \dfrac{19}{8}(23\bar{3}), \end{cases}$$

$$D_{21} = -\frac{(35)+(3\bar{5})}{4\sqrt{2}} + \frac{(35)+(\bar{3}5)}{4} + \frac{(44)}{32} + \frac{11}{8}(23\bar{3}),$$

$$D_{22} = \begin{cases} -\dfrac{(3\bar{6})}{\sqrt{8}} - \dfrac{(36)}{4\sqrt{2}} + 3\dfrac{(\bar{3}6)}{4} + \dfrac{(4\bar{5})}{8\sqrt{2}} - \dfrac{(45)}{8} - \dfrac{(23\bar{4})}{2} - (23\bar{\bar{4}}) - 3\dfrac{(23\bar{4})}{\sqrt{8}} \\ +23\dfrac{(234)}{16} - 3\dfrac{(33\bar{3})}{\sqrt{2}} + 3\dfrac{(33\bar{3})}{2} + 3\dfrac{(333)}{\sqrt{8}} - 3\dfrac{(2223)}{4}, \end{cases}$$

$$D_{23}=\begin{cases}-\frac{(36)}{4\sqrt{2}}+3\frac{(3\bar{6})}{4}-\frac{(36)}{\sqrt{8}}-\frac{(45)}{8}+\frac{(45)}{8\sqrt{2}}-\frac{(2\bar{3}4)}{2}-(23\bar{4})-3\frac{(23\bar{4})}{\sqrt{8}}\\ +23\frac{(2\bar{3}4)}{16}+3\frac{(333)}{\sqrt{8}}+3\frac{(3\bar{3}3)}{2}-3\frac{(33\bar{3})}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}(222\bar{3}),\end{cases}$$

$$D_{21}=\begin{cases}-\sqrt{2}\big((37)+(3\bar{7})\big)+(4)\frac{(6)+(\bar{6})}{8\sqrt{2}}-3(2)\frac{(35)+(3\bar{5})}{\sqrt{8}}\\ +3(2)\frac{(35)+(3\bar{5})}{2}-(24)\frac{(4)+(\bar{4})}{4}+\frac{3}{32}(244)\\ -3(4)\frac{(33)+(3\bar{3})}{4\sqrt{2}}+\frac{11}{8}(334)+\frac{9}{4}(223\bar{3}).\end{cases}$$

§ 7.

Invarianten, welche aus $(abu)^2\,(acu)^2\,(bcu)^2$ entstehen.

Von denjenigen Invarianten, die entstehen, indem man die u in $(abu)^2\,(acu)^2\,(bcu)^2$ durch Symbole r, s, t ersetzt, will ich nur diese berechnen:

$$(abs)^2(ac_1s)^2(bcs_2)^2,\quad (abs)^2(acs_1)^2(bcr)^2,\quad (abs)^2(acs_1)^2(bct)^2,$$
$$(abs)^2\,(acr)^2\,(bcr_1)^2,\quad (abs)^2(acr)^2\,(bct)^2,\quad (abr)^2(acr_1)^2(bcr_2)^2.$$

Es geschieht dies durch Formel (2) des § 4; es wird:

$$(abs)^2\,(acs_1)^2\,(bcs_2)^2=3\frac{(3)}{8}-3\frac{(3)}{4\sqrt{2}},$$

$$(abs)^2\,(acs_1)^2\,(bcr)^2=-\frac{(\bar{4})}{4}+\frac{(4)}{16},$$

$$(abs)^2\,(acs_1)^2\,(bct)^2=-\frac{(\bar{5})}{4}+(23\bar{5}),$$

$$(abs)^2\,(acr)^2\,(bcr_1)^2=\frac{(5)}{4}+\frac{(\bar{5})}{4\sqrt{2}}+3\frac{(23)}{8},$$

$$(abs)^2\,(acr)^2\,(bct)^2=-\frac{(\bar{6})}{4\sqrt{2}}+\frac{(24)}{2}+\frac{(24)}{16}+3\frac{(33)}{\sqrt{8}},$$

$$(abr)^2(acr_1)^2(bcr_2)^2=\frac{3}{8}(6)-3\frac{(24)}{4\sqrt{2}}+3\frac{(33)}{2}-3\frac{(33\bar{3})}{\sqrt{2}}.$$

§ 8.

Invarianten, die aus $(abu)^2\,(acu)^2\,b_x^2\,c_x^2$ hervorgehen.

Um die verwickelteren symbolischen Producte zu berechnen, die aus der in der Ueberschrift genannten Form durch Eintragung unserer Symbole hervorgehen, bediene ich mich der Formeln (4), (5), (6) des § 4. Wir erhalten in tabellarischer Zusammenstellung folgende Werthe:

$$(abs)^2(acs_1)^2 b_\sigma^2 c_{\sigma_1}^2 = 3\frac{(26)}{8\sqrt{2}} + \frac{(3\bar{5})}{4} + \frac{(35)}{\sqrt{8}} - \frac{(44)}{16} - \frac{(22\bar{4})}{4} - 19\frac{(233)}{4\sqrt{2}};$$

$$(abs)^2(acs_1)^2 b_\sigma^2 c_\tau^2 = -\frac{(2\bar{5})}{8} + 3\frac{(25)}{8\sqrt{2}} - \frac{(\bar{3}\bar{4})}{8} + \frac{(34)}{16} + \frac{(3\bar{4})}{4\sqrt{2}} - \frac{(34)}{4\sqrt{2}};$$

$$(abs)^2(acs_1)^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 = -\frac{(\bar{6})}{16} + 3\frac{(24)}{8\sqrt{2}} + 3\frac{(\bar{3}\bar{3})}{4} - 3\frac{(3\bar{3})}{\sqrt{8}};$$

$$(abs)^2\,(acr)^2 b_\sigma^2 c_{\sigma_1}^2$$

$$= \frac{(27)}{\sqrt{8}} + \frac{(3\bar{6})}{\sqrt{8}} - 3\frac{(\bar{3}6)}{8} + 3\frac{(36)}{4\sqrt{2}} - \frac{(45)}{8\sqrt{2}} + \frac{(45)}{8} + \frac{(2\bar{3}4)}{\sqrt{8}} - 3\frac{(2\bar{3}\bar{4})}{2} - (23\bar{4})$$

$$+ 5\frac{(234)}{16} - 3\frac{(333)}{\sqrt{8}} - \frac{(2223)}{2};$$

$$(abs)^2\,(acr)^2(b_\sigma^2 c_\tau^2 + c_\sigma^2 b_\tau^2)$$

$$= \frac{(26)}{4\sqrt{2}} - \frac{(3\bar{5})}{4\sqrt{2}} - \frac{(\bar{3}5)}{4} + \frac{(35)}{4} + 5\frac{(35)}{4\sqrt{2}} - \frac{(4\bar{4})}{8} - \frac{(22\bar{4})}{2} + \frac{11}{8}(23\bar{3}) - 3\frac{(23\bar{3})}{\sqrt{8}};$$

$$(abs)^2\,(acr)^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 = -\frac{(2\bar{5})}{8} + \frac{(25)}{8\sqrt{2}} - 5\frac{(\bar{3}4)}{8} + \frac{(3\bar{4})}{\sqrt{8}} + 3\frac{(\bar{3}4)}{16};$$

$$(abs)^2\,(act)^2 b_\sigma^2 c_\tau^2$$

$$= -\frac{(\bar{3}6)}{4\sqrt{2}} + \frac{(36)}{4} + \frac{(\bar{3}6)}{4\sqrt{2}} - \frac{(4\bar{5})}{8} - \frac{(22\bar{5})}{4} + \frac{(22\bar{5})}{4\sqrt{2}} + \frac{(2\bar{3}\bar{4})}{4} + \frac{(234)}{\sqrt{2}} + \frac{(2\bar{3}4)}{2}$$

$$+ \frac{3}{8}(23\bar{4}) + 3\frac{(\bar{3}\bar{3}\bar{3})}{\sqrt{8}} - 3\frac{(3\bar{3}\bar{3})}{\sqrt{8}};$$

$$(abs)^2\,(act)^2 b_\sigma^2 c_\tau^2$$

$$= -\frac{(2\bar{6})}{8} - 3\frac{(3\bar{5})}{4} - \frac{(\bar{3}5)}{4\sqrt{2}} + \frac{(4\bar{4})}{8\sqrt{2}} + \frac{(22\bar{4})}{4\sqrt{2}} + 27\frac{(2\bar{3}\bar{3})}{8} + \frac{(23\bar{3})}{\sqrt{2}};$$

$$(abr)^2\,(acr_1)^2 b_\sigma^2 c_\tau^2$$

$$= -\frac{(3\bar{6})}{\sqrt{8}} + \frac{3}{4}(3\bar{6}) + \frac{(\bar{4}5)}{4} - 3\frac{(2\bar{3}\bar{4})}{\sqrt{8}} + (23\bar{4}) + \frac{(234)}{8} - 3\frac{(3\bar{3}\bar{3})}{\sqrt{2}} + 3\frac{(3\bar{3}\bar{3})}{2};$$

$$(abr)^2(acr_1)^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 = -\frac{(35)}{\sqrt{2}} + (35) + \frac{(44)}{4} + (233);$$

$$(abr)^2\,(act)^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2$$

$$= 3\frac{(36)}{8} - \frac{(\bar{3}6)}{\sqrt{2}} - \frac{(3\bar{6})}{\sqrt{8}} + \frac{(45)}{4} - \frac{(4\bar{5})}{8} + \frac{(45)}{8\sqrt{2}} + (234) + 2(23\bar{4})$$

$$-3\frac{(234)}{4\sqrt{2}} + 3\frac{(23\bar{4})}{16} + 3\sqrt{2}(33\bar{3});$$

$$(abt)^2\,(act_1)^2 b_\sigma^2 c_\tau^2$$

$$= \begin{cases} -\frac{(47)}{\sqrt{8}} + \frac{(36)}{4} - \frac{(2\bar{3}6)}{\sqrt{8}} - (236) + \frac{(23\bar{6})}{\sqrt{8}} + \frac{(245)}{8} - \frac{(24\bar{5})}{8\sqrt{2}} - \frac{(33\bar{5})}{\sqrt{2}} \\ \qquad - \frac{(3\bar{3}5)}{\sqrt{2}} + \frac{(3\bar{4}\bar{4})}{8} + \frac{(34\bar{4})}{16} \\ + (22\bar{3}4) + 3(2\bar{2}34) + \sqrt{2}(22\bar{3}4) - \frac{(2\bar{2}34)}{8} + 3\frac{(2\bar{3}\bar{3}3)}{\sqrt{2}} + \frac{(2\bar{3}\bar{3}\bar{3})}{2} \\ \qquad + 9\frac{(23\bar{3}3)}{\sqrt{2}} + (2222\bar{3}); \end{cases}$$

$$(abt)^2(act)^2 b_\tau^2 c_{\tau_1}^2$$

$$= \begin{cases} -\sqrt{8}(37) + \frac{(4\bar{6})}{4} - \frac{(46)}{16} + \frac{(23\bar{5})}{2} - \frac{(2\bar{3}5)}{\sqrt{8}} + \frac{(24\bar{4})}{8\sqrt{2}} + \frac{(3\bar{3}\bar{4})}{2} - \frac{(3\bar{3}4)}{\sqrt{2}} \\ + \frac{(3\bar{3}\bar{4})}{2} + \frac{(3\bar{3}4)}{\sqrt{8}} + 7(22\bar{3}3). \end{cases}$$

§ 9.

Ausrechnung weiterer Invarianten.

Ausser den nunmehr berechneten Invarianten bedarf ich für die folgende Untersuchung namentlich noch dieser:

$$a_\sigma a_\tau a_{\sigma_1} a_{\tau_1}(\varrho\sigma\tau)(\varrho\sigma_1\tau_1), \quad r_\nu^2 a_\sigma a_\tau a_{\sigma_1} a_{\tau_1}(\sigma\tau\nu)(\sigma_1\tau_1\nu),$$
$$(abc)(abs) a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2 c_\varrho s_\varrho, \quad (abc)(abs) a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2 c_\varrho s_\varrho,$$
$$(abc)(abt) a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2 c_\varrho t_\varrho, \quad (abc)(abt) a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2 c_\varrho t_\varrho.$$

Die Werthe der beiden ersten findet man aus den Formeln des § 3 und die der vier letzten aus den Formeln (f') und (g') des § 4. Man erhält:

$$(abc)\,(abs)\,a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2 c_\varrho s_\varrho$$

$$= \frac{(36)}{8\sqrt{2}} - \frac{(3\bar{6})}{8} - 5\frac{(\bar{3}6)}{8\sqrt{2}} - \frac{(22\bar{5})}{4} + \frac{(225)}{4\sqrt{2}} + \frac{(23\bar{4})}{32} - \frac{(2\bar{3}4)}{4\sqrt{2}} - 3\frac{(\bar{3}\bar{3}3)}{4\sqrt{2}}$$
$$+ 3\frac{(3\bar{3}\bar{3})}{8} + 3\frac{(\bar{3}3\bar{3})}{4\sqrt{2}},$$

$$(abc)\,(abs)\,a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2 c_\varrho s_\varrho = -\frac{(2\bar{6})}{8} + \frac{(22\bar{4})}{4\sqrt{2}} - \frac{(2\bar{3}\bar{3})}{2} + \frac{(23\bar{3})}{\sqrt{2}},$$

$$(abc)\,(abt)\,a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2 c_\varrho t_\varrho$$

$$= \begin{cases} \frac{(23\bar{6})}{2} - \frac{(2\bar{3}6)}{4\sqrt{2}} - \frac{(24\bar{5})}{4} + \frac{(245)}{4\sqrt{2}} + \frac{(3\bar{3}\bar{5})}{4\sqrt{2}} - \frac{(3\bar{3}5)}{4} - \frac{(\bar{3}\bar{3}5)}{4} - 3\frac{(\bar{3}3\bar{5})}{4\sqrt{2}} \\ \qquad + \frac{(\bar{3}44)}{32} + \frac{(34\bar{4})}{4\sqrt{2}} \\ -(22\bar{3}\bar{4}) - \frac{(223\bar{4})}{\sqrt{2}} + \frac{(22\bar{3}4)}{2} + \frac{17}{8}(23\bar{3}\bar{3}) - 3\frac{(233\bar{3})}{\sqrt{2}} - \frac{(22223)}{2}, \end{cases}$$

$$(abc)(abt)\,a_\tau{}^2 b_{\tau_1}{}^2 c_{\tau_2}{}^2 c_\varrho t_\varrho = -3\frac{(4\bar{6})}{32} + \frac{(46)}{32} + \frac{(24\bar{4})}{8\sqrt{2}} + \frac{7}{4}(\bar{3}\bar{3}4) + \frac{(3\bar{3}4)}{\sqrt{8}},$$

$$a_\sigma a_\tau a_{\sigma_1} a_{\tau_1} (\varrho\sigma\tau)(\varrho\sigma_1\tau_1) = -8(2\bar{3}6) + 2(245) - 4(3\bar{3}5) + (34\bar{4})$$
$$- \frac{(\bar{3}44)}{\sqrt{8}} - 16(223\bar{4}) + \frac{80}{\sqrt{2}}(23\bar{3}\bar{3}),$$

$$r_\nu{}^2 a_\sigma a_\tau a_{\sigma_1} a_{\tau_1} (\sigma\tau\nu)\,(\sigma_1\tau_1\nu)$$

$$= \begin{cases} 6(\bar{3}36) - 8\sqrt{2}(3\bar{3}6) - 3\sqrt{2}(3\bar{3}6) + 2(3\bar{4}5) + \frac{3}{\sqrt{8}}(\bar{3}45) - \frac{(34\bar{5})}{2} \\ \qquad + 2(\bar{3}\bar{4}5) + \frac{7}{\sqrt{8}}(345) \\ -\frac{(4\bar{4}4)}{2} - 6\sqrt{2}(23\bar{3}\bar{4}) - 4(23\bar{3}4) - 12\sqrt{2}(233\bar{4}) + \frac{25}{4}(2334) \\ \qquad - 6\sqrt{2}(3\bar{3}\bar{3}3) \\ +6(33\bar{3}\bar{3}) + 12\sqrt{2}(3\bar{3}3\bar{3}) - 6(2223\bar{3}) - \frac{3}{2}(\bar{3}45). \end{cases}$$

§ 10.

Ueber die lineare Covariante w_x und die Invarianten, welche sich an dieselbe anschliessen.

In genauem Anschlusse an meine Arbeit über Kegelschnittbüschel setze ich nunmehr

$$a_\tau{}^2 a_\varrho a_{\tau_1}(\varrho\tau_1 x) = w_x$$

und berechne eine Anzahl von Invarianten, welche hiermit in Verbindung stehen.

Zunächst drücke ich mittelst Formel (4) § 3 das Quadrat von w_x durch andere Formen aus, indem ich die in jener Formel auftretenden u, v durch a, b ersetze und mit $a_\tau^2 b_\tau^2$ multiplicire. Es wird:

$$w_x^2 = \begin{cases} 2(\bar{3})C_{23}r + 2(3)C_{13}s + \left(3\frac{(\bar{3}\bar{4})}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}C_{33}\right)t + 2(\bar{3}5)a_x^2 a_\tau^2 \\ \qquad - 6\sqrt{2}(\bar{3}\bar{3})a_\tau^2 (as\,\widehat{\varrho x})^2 \\ -\frac{(4)}{2}a_\tau^2 (ar\,\widehat{\tau x})^2 + 4(2\bar{3})a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (ab\,\widehat{\varrho x})^2 - 3(3)a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (ab\,\widehat{\sigma x})^2 \\ \qquad + \frac{(4)}{4}a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 (ab\,\widehat{\tau x})^2. \end{cases}$$

Diese Formel schieben wir zweimal über:

$\varrho, \sigma, \tau, a_\sigma^2(aru)^2,\ a_\sigma^2(asu)^2,\ a_\sigma^2(atu)^2,\ a_\tau^2(aru)^2,\ a_\tau^2(asu)^2,\ a_\tau^2(atu)^2$

und erhalten so für die Grösse:

$w_\varrho^2, w_\sigma^2, w_\tau^2, a_\sigma^2(awr)^2, a_\sigma^2(aws)^2, a_\sigma^2(awt)^2, a_\tau^2(awr)^2, a_\tau^2(aws)^2, a_\tau^2(awt)^2$

Ausdrücke in Fundamentalinvarianten und solchen Invarianten, welche schon in den vorigen Paragraphen als ganze Functionen der Fundamentalinvarianten dargestellt worden sind. Es wird:

$$w_\varrho^2 = \frac{3}{\sqrt{8}}(\bar{3}4\bar{4}) - 3\sqrt{2}(3\bar{3}5) - (3\bar{4}\bar{4}) + 6(3\bar{3})C_{23} - \frac{(4)}{4}C_{33} + 2(2\bar{3})C_{13};$$

$$w_\sigma^2 = \begin{cases} 3\sqrt{2}(23\bar{4}\bar{4}) - 6\sqrt{2}(3\bar{3}\bar{3}\bar{4}) - 12\sqrt{2}(2\bar{3}\bar{3}5) - \frac{1}{2}(4\bar{4}5) \\ \qquad + \left(8(22\bar{3}) - \frac{1}{2}(\bar{3}\bar{4})\right)C_{13} \\ + \left(\frac{(44)}{4} - 8(22\bar{3})\right)C_{23} + \left(6(3\bar{3}) - (24)\right)C_{33} + 2(\bar{3}55); \end{cases}$$

$$w_\tau^2 = 12\sqrt{2}(23\bar{3}4) - 36(\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}) - 2(\bar{3}\bar{4}5) + 6(\bar{3}\bar{3})C_{13} + (\bar{3}4)C_{23} - 4(2\bar{3})C_{33};$$

$$a_\sigma^2(awr)^2$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{4}(\bar{3}444) - 3(\bar{3}\bar{3}45) - \frac{(34\bar{4}\bar{4})}{\sqrt{2}} + \left(2(\bar{3}5) - \frac{(4\bar{4})}{2}\right)C_{12} \\ \qquad + \left(\sqrt{2}(234) - (\bar{3}6) + \frac{(45)}{4}\right)C_{13} \\ - 12\sqrt{2}(33\bar{3})C_{22} + 4\sqrt{2}(3\bar{3}4)C_{23} + 2(\bar{3}4)C_{32} - \left((35) + \frac{(44)}{4\sqrt{2}}\right)C_{33} \\ \qquad + \left(8(23\bar{3}) - \frac{(44)}{4}\right)c_{122} \\ - 24(33)(abc)(abs)c_\varrho s_\varrho a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2 + (4)(abc)(abt)c_\varrho s_\varrho a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2; \end{cases}$$

$$a_\sigma^2(aws)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -9(\bar3\bar3\bar3\bar5)+3\sqrt{\bar2}\,(2\bar3\bar4\bar5)-(\bar3\bar4)\,C_{12} \\ \qquad +\big(2(\bar3\bar5)-12\sqrt{\bar2}\,(2\bar3\bar3)\big)\,C_{22}+2(\bar3\bar5)\,C_{13} \\ +\big(\sqrt{\bar2}(2\bar3\bar4)-(\bar3\bar6)\big)\,C_{23}-\Big((2\bar5)+\frac{(\bar3\bar4)}{\sqrt{\bar8}}\Big)\,C_{33}-3\sqrt{\bar2}\,(\bar3\bar3)\,C_{32} \\ \qquad +\big(8(22\bar3)-\frac{5}{2}(\bar3\bar4)\big)\,c_{122} \\ -8(2\bar3)(abc)(abs)\,c_\varrho s_\varrho a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2+(4)(abc)(abt)c_\varrho t_\varrho a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2; \end{array} \right.$$

$$a_\sigma^2(awt)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -9\sqrt{\bar2}\,(3\bar3\bar3\bar3\bar4)+6(2\bar3\bar3\bar4\bar4)-\frac{(\bar3\bar4\bar5)}{\sqrt{\bar8}}-(3\bar4\bar4\bar5) \\ \qquad -3\sqrt{\bar2}\,(\bar3\bar3\bar5\bar5)+\big(6\sqrt{\bar2}\,(\bar3\bar3\bar3)-4(2\bar3\bar4)\big)\,C_{12} \\ +\big(\sqrt{\bar2}\,(3\bar3\bar4)+4(2\bar3\bar5)\big)C_{13}+\big(4(3\bar3\bar4)-3\sqrt{\bar2}\,(3\bar3\bar4)\big)\,C_{22} \\ \qquad +\Big(4(3\bar3\bar5)-\frac{(\bar3\bar4\bar4)}{\sqrt{\bar2}}\Big)\,C_{23}+2(\bar3\bar5)\,C_{32} \\ -\big(\sqrt{\bar2}\,(2\bar3\bar4)+(\bar3\bar6)+\frac{(45)}{4}\big)\,C_{33}+\big(2(2\bar3\bar4)+12(3\bar3\bar3)\big)\,c_{122} \\ \qquad -4(\bar3\bar4)(abc)(abs)\,c_\varrho s_\varrho a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2 \\ +16(2\bar3)(abc)(abt)\,c_\varrho t_\varrho a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_\sigma^2; \end{array} \right.$$

$$a_\tau^2(awr)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{9}{2}(\bar3\bar3\bar4\bar4)-18(\bar3\bar3\bar3\bar5)-3\sqrt{\bar2}\,(3\bar3\bar4\bar4) \\ \qquad +\Big((\bar3\bar5)-\frac{(\bar4\bar4)}{4}+6\sqrt{\bar2}\,(2\bar3\bar3)\Big)\,C_{13}+12\sqrt{\bar2}\,(3\bar3\bar3)\,C_{23} \\ +\Big((\bar3\bar4)-3\,\frac{(\bar3\bar4)}{\sqrt{\bar8}}\Big)\,C_{33}+\Big(8(23\bar3)-\frac{(44)}{4}\Big)\,c_{222} \\ \qquad -24(3\bar3)(abc)(abs)\,a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2 c_\varrho s_\varrho \\ +(4)(abc)(abt)\,a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2 c_\varrho t_\varrho; \end{array} \right.$$

$$a_\tau^2(aws)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -9(3\bar3\bar3\bar4)+3\sqrt{\bar2}\,(2\bar3\bar4\bar4)-\frac{(4\bar4\bar5)}{2}+(3\bar4)\,C_{13} \\ \qquad +\big(6\sqrt{\bar2}\,(2\bar3\bar3)+(\bar3\bar5)\big)\,C_{23} \\ +\Big(\frac{3}{\sqrt{\bar2}}(\bar3\bar3)-(24)\Big)\,C_{33}+\Big(8(223)-\frac{5}{2}(\bar3\bar4)\Big)\,c_{222} \\ \qquad -8(2\bar3)(abc)(abs)\,a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2 c_\varrho s_\varrho \\ +6(3)(abc)(abt)\,a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2 c_\varrho t_\varrho; \end{array} \right.$$

$$a_\tau^2(awt)^2$$

$$= \begin{cases} -54\sqrt{2}(3\bar{3}\bar{3}33) + 36(23\bar{3}\bar{3}\bar{4}) + \frac{3}{\sqrt{8}}(\bar{3}4\bar{4}\bar{4}) \\ \qquad\qquad -6\sqrt{2}(3\bar{3}\bar{4}\bar{5}) - (3\bar{4}\bar{4}\bar{4}) \\ +12\sqrt{2}(\bar{3}\bar{3}\bar{3})C_{13} + 8(3\bar{3}\bar{4})C_{23} + \left((\bar{3}5) - 6\sqrt{2}(23\bar{3}) - \frac{(4\bar{4})}{4}\right)C_{22} \\ -\left(2(2\bar{3}4) + 12(3\bar{3}\bar{3})\right)c_{222} - 4(34)(abc)(abs)a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2 c_\varrho s_\varrho \\ +16(2\bar{3})(abc)(abt)a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 c_{\tau_2}^2 c_\varrho t_\varrho. \end{cases}$$

Bei Weitem schwieriger ist die Auswerthung der Invarianten:

$$\text{(I)} \qquad \begin{matrix} (awr)^2(awr_1)^2, & (awr)^2(aws)^2, & (awr)^2(awt)^2 \\ (aws)^2(aws_1)^2, & (aws)^2(awt)^2, & (awt)^2(awt_1)^2, \end{matrix}$$

und auch hierauf gehe ich explicite ein, wenn auch die entsprechende Rechnung, nur unter leicht abweichender Bezeichnung, bereits in Band XIX durchgeführt wurde.

Zunächst bezeichne ich die Unterdeterminanten der Determinante:

$$\begin{vmatrix} (\varrho\varrho_1\widehat{aw})^2 & (\varrho\sigma\widehat{aw})^2 & (\varrho\tau\widehat{aw})^2 \\ (\varrho\sigma\widehat{aw})^2 & (\sigma\sigma_1\widehat{aw})^2 & (\sigma\tau\widehat{aw})^2 \\ (\varrho\tau\widehat{aw})^2 & (\sigma\tau\widehat{aw})^2 & (\tau\tau_1\widehat{aw})^2 \end{vmatrix}$$

mit H_{ik} und die symbolischen Producte:

$$m_H n_H (mn)_i, \quad n_H l_H (nl)_i, \quad l_H m_H (lm)_i$$

durch P_{i1}, P_{i2}, P_{i3}. Sodann berechne ich die H_{ik} mit Hülfe der Formel (7) § 4. aus bereits bekannten Werthen. Ich finde:

$$H_{11} = \begin{cases} (4)w_\sigma^2 w_\sigma^2 - 2(5)w_\sigma^2 w_\tau^2 + (6)w_\tau^2 w_\tau^2 \\ \qquad + \left(16(3)w_\sigma^2 - 2(4)w_\tau^2\right)a_\sigma^2(aws)^2 \\ \qquad + \left(32(23)w_\tau^2 - 2(4)w_\sigma^2\right)a_\tau^2(aws)^2 \\ +2(4)w_\tau^2 \cdot a_\tau^2(awr)^2 - 4(3)w_\tau^2 \cdot a_\sigma^2(awr)^2 - 8(3)w_\tau^2 a_\sigma^2(awt)^2, \end{cases}$$

$$H_{12} = \begin{cases} -(4)w_\varrho^2 w_\sigma^2 + (5)w_\varrho^2 w_\tau^2 - 8(\bar{5})w_\varrho^2 a_\tau^2(aws)^2 + w_\tau^2 a_\sigma^2(awt)^2 \\ \qquad + \left(2(3)w_\varrho^2 - 4(2)w_\tau^2\right)a_\tau^2(awr)^2 \\ +\left((4)w_\varrho^2 - 4(3)w_\tau^2\right)a_\tau^2(aws)^2 + w_\sigma^2 a_\tau^2(awt)^2, \end{cases}$$

$$H_{13} = \begin{cases} \frac{(4)}{\sqrt{\gamma}} w_\sigma^2 w_\tau^2 + (5) w_\varrho^2 w_\sigma^2 + \left(\sqrt{8}(33) - (6)\right) w_\varrho^2 w_\tau^2 - \sqrt{2}(\bar{3}) w_\sigma^2 w_\tau^2 \\ \qquad - \sqrt{8}(23) w_\tau^2 w_\tau^2 \\ + \left(2(\bar{3}) w_\varrho^2 + 2(2) w_\tau^2\right) a_\sigma^2 (awr)^2 \\ \qquad + \left(2(3) w_\tau^2 + (4) w_\varrho^2\right) a_\sigma^2 (aws)^2 - 2 w_\sigma^2 a_\sigma^2 (awt)^2 \\ + \left(2(2) w_\sigma^2 + (4) w_\varrho^2\right) a_\tau^2 (awr)^2 \\ + \left(2(3) w_\sigma^2 - 16(23) w_\varrho^2\right) a_\tau^2 (aws)^2 + 4(3) w_\varrho^2 a_\tau^2 (awt)^2, \end{cases}$$

$$H_{22} = -\frac{(2)}{\sqrt{2}} w_\tau^2 w_\tau^2 + (\bar{4}) w_\varrho^2 w_\varrho^2 + 2 w_\tau^2 a_\tau^2 (awr)^2 - 2 w_\varrho^2 a_\tau^2 (awt)^2,$$

$$H_{23} = \begin{cases} -\frac{(4)}{\sqrt{8}} w_\varrho^2 w_\tau^2 + \sqrt{2}(\bar{3}) w_\varrho^2 w_\sigma^2 - (5) w_\varrho^2 w_\varrho^2 + \frac{(2)}{\sqrt{2}} w_\sigma^2 w_\tau^2 \\ \qquad + \frac{(3)}{\sqrt{2}} w_\tau^2 w_\tau^2 - w_\tau^2 a_\sigma^2 (awr)^2 \\ + w_\varrho^2 a_\sigma^2 (awt)^2 + \left(2(2) w_\varrho^2 - w_\sigma^2\right) a_\tau^2 (awr)^2 \\ \qquad + 2(3) w_\varrho^2 a_\tau^2 (aws)^2, \end{cases}$$

$$H_{33} = \begin{cases} -\frac{(2)}{\sqrt{2}} w_\sigma^2 w_\sigma^2 + \left((6) - 4\sqrt{2}(3\bar{3})\right) w_\varrho^2 w_\varrho^2 + 4\sqrt{2}(23) w_\varrho^2 w_\tau^2 \\ \qquad - \sqrt{2}(3) w_\sigma^2 w_\tau^2 \\ + \left(2 w_\sigma^2 - 4(2) w_\varrho^2\right) a_\sigma^2 (awr)^2 - 4(3) w_\varrho^2 a_\sigma^2 (aws)^2. \end{cases}$$

Des Ferneren geben die Formeln pag. 540, Bd. XIX:

$$P_{11} = 2(3) H_{11} + 16(23) H_{12} + (4) H_{23} + 4(34) H_{22} + 32(3\bar{3}) H_{23},$$
$$P_{21} = -2(3) H_{13} + (4) H_{23} + 8(\bar{3}) H_{33},$$
$$P_{31} = -8(33) H_{22} - 2(3) H_{12} - 16(23) H_{23} - (4) H_{33},$$
$$P_{12} = -2(2) H_{11} - (4) H_{12} - 2(\bar{3}) H_{13} - 8(3\bar{3}) H_{22},$$
$$P_{22} = H_{11} + 2(2) H_{12} - 2(\bar{3}) H_{23},$$
$$P_{32} = 4(3) H_{12} + 2(2) H_{13} + 8(23) H_{22} + (4) H_{23} + 2(\bar{3}) H_{33},$$
$$P_{13} = \left(2(24) - 4(3\bar{3})\right) H_{12} + 16(2\bar{3}) H_{13} + \left((44) - 32(23\bar{3})\right) H_{22} + 8(\bar{3}4) H_{23} + 16(\bar{3}\bar{3}) H_{33},$$
$$P_{23} = -(4) H_{12} - 8(\bar{3}) H_{13} + \left(4(3\bar{3}) - 2(24)\right) H_{22} - 16(2\bar{3}) H_{23},$$
$$P_{33} = 2(3) H_{11} + 16(23) H_{12} + (4) H_{13} + \left(32(223) - 2(34)\right) H_{22} + \left(2(24) - 4(33)\right) H_{23}.$$

und hieraus endlich folgt (siehe pag. 540 ebenda):

$$D(awr)^2(awr_1)^2 = 6(3)P_{11} + 16(23)P_{12} + (4)P_{31},$$
$$D(awr)^2(aws)^2 = 2(2)P_{11} + (4)P_{21} + 6(\bar{3})P_{31} = 6(3)P_{12} + 16(23)P_{22} + (4)P_{32},$$
$$D(awr)^2(awt)^2 = (4)P_{11} + \big(2(24) + 12(3\bar{3})\big)P_{21} + 16(2\bar{3})P_{31} = 6(3)P_{13} + 16(23)P_{23} + (4)P_{33},$$
$$D(aws)^2(aws_1)^3 = 2(2)P_{12} + (4)P_{22} + 6(\bar{3})P_{32},$$
$$D(aws)^2(awt)^2 = 2(2)P_{13} + (4)P_{23} + 6(\bar{3})P_{33} = (4)P_{12} + \big(2(24) + 12(3\bar{3})\big)P_{22} + 16(23)P_{32},$$
$$D(awt)^2(awt_1)^2 = (4)P_{13} + \big(2(24) + 12(3\bar{3})\big)P_{23} + 16(2\bar{3})P_{33}.$$

§ 11.

Die typische Darstellung.

Im Vorhergehenden sind alle Mittel gegeben, deren ich zur Erledigung der von mir in's Auge gefassten Aufgaben bedarf.

Was zunächst die *typische Darstellung* von f und ϱ (resp. s) betrifft, so wähle ich, geometrisch zu reden, als typisches Coordinatendreieck die Pole der Geraden w_x in Bezug auf die Kegelschnitte ϱ, σ, τ, setze also:

$$v_1 = u_\varrho w_\varrho, \quad v_2 = u_\sigma w_\sigma, \quad v_3 = u_\tau w_\tau,$$

wo die Substitutionsdeterminante

$$U = w_\varrho w_\sigma w_\tau (\varrho\sigma\tau)$$

nach kurzer Rechnung folgenden Werth erhält:

$$U = \left(\tfrac{(45)}{4} - 4(234) + 3\sqrt{2}(23\bar{3})\right) w_\tau^2 + \left(\tfrac{(44)}{4} - 2(35)\right) w_\sigma^2 + 2(3\bar{3}4) w_\varrho^2 + \tfrac{(34)}{2} a_\tau^2 (awr)^2 + \left(32(233) - \tfrac{(44)}{2}\right) a_\tau^2 (aws)^2 - 6(3\bar{3})\, a_\tau^2 (awt)^2.$$

Um nun die typische Darstellung von s und f zu finden, beginne ich mit Formeln (3) des § 3. und setze in sie für x $\widehat{uw}$. Es wird dann:

$$\big(y_1\varrho + y_2\sigma + y_3\tau,\ y_1\varrho + y_2\sigma + y_3\tau,\ \widehat{uw}\big)^2$$
$$= l_y^2 (ruw)^2 + m_y^2 (suw)^2 + r_y^2 (tuw)^2$$
$$= 2(y_1\varrho + y_2\sigma + y_3\tau)(y_1 w_\varrho^2 + y_2 w_\sigma^2 + y_3 w_\tau^2) - 2(y_1 u_\varrho w_\varrho + y_2 u_\varrho w_\sigma + y_3 u_\tau w_\tau)^2$$
$$= 2w_x(y_1\varrho + y_2\sigma + y_3\tau) - 2v_y^2,$$

also:

$$v_y^2 = u_x^2 = w_x(y_1\varrho + y_2\sigma + y_3\tau)$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(l_y^2(ruw)^2 + m_y^2(suw)^2 + n_y^2(tuw)^2\right).$$

Trägt man hier für u passende Symbole ein, so wird zuvörderst:

$$s = w_x\left(2(2)\,y_1 + (4)\,y_2 + 6(3)\,y_3\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(l_y^2 w_\sigma^2 + m_y^2 w_\tau^2 + 2n_y^2\left((2)\,w_\sigma^2 + (3)\,w_\tau^2\right)\right)$$

und diess ist die typische Darstellung von s. Des Ferneren aber kommt:

$$a_x^2 a_\sigma^2 = w_x\left(\tfrac{(4)}{V8}\,y_1 + (6)\,y_2 + (5)\,y_3\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(l_y^2 a_\sigma^2(awr)^2 + m_y^2 a_\sigma^2(aws)^2 + n_y^2 a_\sigma^2(awt)^2\right),$$

$$a_x^2 a_\tau^2 = w_x\left(3\,\tfrac{(3)}{V2}\,y_1 + (5)\,y_2 + (4)\,y_3\right)$$
$$- \tfrac{1}{2}\left(l_y^2 a_\tau^2(awr)^2 + m_y^2 a_\tau^2(aws)^2 + n_y^2 a_\tau^2(awt)^2\right).$$

Um nun f zu berechnen, quadrire ich die obige Formel, ersetze die u durch die Symbole a und benutze dann die vorstehenden Werthe von $a_x^2 a_\sigma^2$, $a_x^2 a_\tau^2$. So kommt zuvörderst:

$$\left(2w_x(y_1 a_\varrho^2 + y_2 a_\sigma^2 + y_3 a_\tau^2) - 2a_x^2\right)^2$$
$$= \left(l_y^2(arw)^2 + m_y^2(aws)^2 + n_y^2(awt)^2\right)^2$$

und schliesslich:

$$a^4 = \left\{\begin{array}{l} -w_x^2\left(\tfrac{(2)}{V2}\,y_1^2 + \tfrac{(4)}{V2}\,y_1y_2 + 3V2(3)\,y_1y_3 + (6)\,y_2^2\right. \\ \qquad\qquad \left. + 2(5)\,y_2y_3 + (4)\,y_3^2\right) \\ \qquad + 2w_x\left(\tfrac{8}{V8}\,y_1 + a_x^2 a_\sigma^2 y_2 + a_x^2 a_\tau^2 y_3\right) \\ + \tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l} l_y^2 l_y^2(awr)^2(awr_1)^2 + 2l_y^2 m_y^2(awr)^2(aws)^2 \\ \qquad + 2l_y^2 n_y^2(awr)^2(awt)^2 \\ + m_y^2 m_y^2(aws)^2(aws_1)^2 + 12l_y^2 n_y^2(aws)^2(awt)^2 \\ \qquad + n_y^2 n_y^2(awt)^2(awt_1)^2 \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

Diess ist die typische Darstellung f. In ihr treten rechter Hand, wie auch in der eben gegebenen typischen Darstellung von s nur solche Invarianten auf, welche entweder selbst Fundamentalinvarianten sind oder doch auf solche in den vorhergehenden Paragraphen zurückgeführt wurden. *Unser erster Zweck, den wir uns in diesem Abschnitte stellten, ist also in der That erreicht.*

Mit Rücksicht auf die in Abschnitt II zu gebende Anwendung ist es zweckmässig, die hier entwickelten Formeln noch etwas zu modificiren. Es ist dort nämlich bequem, nur solche lineare Substitutionen zu betrachten, deren Determinante gleich Eins ist. Dementsprechend müssen wir statt der zu Anfang des gegenwärtigen Paragraphen eingeführten v_1, v_2, v_3, vielmehr $\frac{v_1}{\sqrt[3]{U}}$, $\frac{v_2}{\sqrt[3]{U}}$, $\frac{v_3}{\sqrt[3]{U}}$ in Betracht ziehen, unter U die ebendort mitgetheilte Substitutionsdeterminante verstanden. Die Umänderungen, welche die Schlussformeln dadurch erreichen, sind so unbedeutend, dass ich sie nicht hinzuschreiben brauche.

§ 12.

Relationen zwischen den Fundamentalinvarianten.

Was nun die Relationen zwischen den zwölf Fundamentalinvarianten:

$$(2),\ (3),\ (\bar{3}),\ (4),\ (\bar{4}),\ (\bar{\bar{4}}),\ (5),\ (\bar{5}),\ (6),\ (\bar{6}),\ (7),\ (\bar{7})$$

betrifft, so bemerke ich vor allen Dingen, dass *eine* derselben:

$$2(\bar{4}) + 2(\bar{\bar{4}}) - (4) + (22) = 0 \tag{1}$$

bereits in § 4. gegeben wurde. Um die weiteren Relationen zu finden, bilde ich folgende drei Identitäten:

$$\begin{aligned} &4a_\sigma b_\sigma a_\tau b_\tau a_{\sigma_1} b_{\sigma_1} a_{\tau_1} b_{\tau_1} \\ &= \left(a_\sigma^2 b_\tau^2 + b_\sigma^2 a_\tau^2 - (ab\,\widehat{\sigma\tau})^2\right)\left(2a_\sigma^2 b_\tau^2 - (ab\,\widehat{\sigma\tau})^2\right) \\ &= \left(2a_\sigma^2 b_{\sigma_1}^2 - (ab\,\widehat{\sigma\sigma_1})^2\right)\left(2a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 - (ab\,\widehat{\tau\tau_1})^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4(abs)^2 a_\sigma b_\tau c_\sigma c_\tau c_{\sigma_1} c_{\tau_1}(a_{\sigma_1} b_{\tau_1} - b_{\sigma_1} a_{\tau_1}) \\ &= \begin{cases} (abs)^2\left(2a_\sigma^2 c_{\sigma_1}^2 - (ac\,\widehat{\sigma\sigma_1})^2\right)\left(2b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 - (bc\,\widehat{\tau\tau_1})^2\right) \\ -(abs)^2\left(a_\sigma^2 c_\tau^2 + c_\sigma^2 a_\tau^2 - (ac\,\widehat{\sigma\tau})^2\right)\left(b_{\sigma_1}^2 c_{\tau_1}^2 + b_{\tau_1}^2 c_{\sigma_1}^2 - (bc\,\widehat{\sigma_1\tau_1})^2\right), \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4(abr)^2 a_\sigma b_\tau c_\sigma c_\tau c_{\sigma_1} c_{\tau_1}(a_{\sigma_1} b_{\tau_1} - b_{\sigma_1} a_{\tau_1}) \\ &= \begin{cases} (abr)^2\left(2a_\sigma^2 c_{\sigma_1}^2 - (ac\,\widehat{\sigma\sigma_1})^2\right)\left(2b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 - (bc\,\widehat{\tau\tau_1})^2\right) \\ -(abr)^2\left(a_\sigma^2 c_\tau^2 + a_\tau^2 c_\sigma^2 - (ac\,\widehat{\sigma\tau})^2\right)\left(b_{\sigma_1}^2 c_{\tau_1}^2 + c_{\sigma_1}^2 b_{\tau_1}^2 - (bc\,\widehat{\sigma_1\tau_1})^2\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Aus ihnen folgen nach § 3. die Formeln:

$$\left(2a_\sigma^2 b_{\sigma_1}^2 - (4)(abr)^2 - 16(23)(abs)^2 + 4(3)(abt)^2\right)\left(2a_\tau^2 b_{\tau_1}^2 - 8(\bar{3})(abs)^2\right)$$
$$= \left(a_\sigma^2 b_\tau^2 + b_\sigma^2 a_\tau^2 - 2(\bar{3})(abr)^3 - (4)(abs)^2\right)$$
$$\cdot \left(2a_{\sigma_1}^2 b_{\tau_1}^2 - 2(\bar{3})(abr)^2 - (4)(abs)^2\right),$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}}(\varrho\sigma\tau)(\varrho\sigma_1\tau_1)a_\sigma a_\tau a_{\sigma_1} a_{\tau_1}$$
$$= (abs_2)^2\left(2a_\sigma^2 c_{\sigma_1}^2 - (4)(acr)^2 - 16(23)(acs)^2 + 4(3)(act)^2\right)$$
$$\cdot \left(2b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 - 8(\bar{3})(bcs_1)^2\right)$$
$$- (abs_2)^2\left(c_\sigma^2 a_\tau^2 + c_\tau^2 a_\sigma^2 - 2(\bar{3})(acr)^2 - (4)(acs)^2\right)$$
$$\left(b_{\sigma_1}^2 c_{\tau_1}^2 + b_{\tau_1}^2 c_{\sigma_1}^2 - 2(\bar{3})(bcr_1)^2 - (4)(bcs_1)^2\right),$$

$$r_\nu^2(\nu\sigma\tau)(\nu\sigma_1\tau_1)a_\sigma a_\tau a_{\sigma_1} a_{\tau_1}$$
$$= (abr)^2\left(2a_\sigma^2 c_{\sigma_1}^2 - (4)(acr)^2 - 16(23)(acs)^2 + 4(3)(act)^2\right)$$
$$\cdot \left(2b_\tau^2 c_{\tau_1}^2 - 8(\bar{3})(bcs_1)^2\right)$$
$$- (abr_2)^2\left(a_\sigma^2 c_\tau^2 + c_\sigma^2 a_\tau^2 - 2(\bar{3})(acr)^2 - (4)(acs)^2\right)$$
$$\cdot \left(b_{\sigma_1}^2 c_{\tau_1}^2 + b_{\tau_1}^2 c_{\sigma_1}^2 - 2(\bar{3})(bcr_1)^2 - (4)(bcs_1)^2\right).$$

Führt man nun hier die angedeuteten Multiplicationen wirklich aus, so gelangt man zu lauter Formen, deren Werthe bereits in den vorigen Paragraphen berechnet sind. Ich trage die letzteren ein und habe so folgende neue Relationen zwischen den Fundamentalinvarianten:

$$8(\bar{3}7) + 4(3\bar{7})$$

$$(2) = \begin{cases} \frac{(4\bar{6})}{4} - (\bar{4}6) + \frac{(46)}{2} + (55) - 2(2\bar{3}\bar{5}) + 4\sqrt{2}(23\bar{5}) - 4(235) \\ -\sqrt{2}(24\bar{4}) - \frac{(24\bar{4})}{\sqrt{2}} + \sqrt{8}(3\bar{3}\bar{4}) + (\bar{3}\bar{3}\bar{4}) + 2(33\bar{4}) - \frac{3}{2}(\bar{3}\bar{3}4) \\ + \sqrt{2}(3\bar{3}4) - 3(334) + 10\sqrt{2}(223\bar{3}) - \sqrt{8}(2\bar{3}5); \end{cases}$$

$$(\bar{4}7)$$

$$(3) = \begin{cases} \frac{(\bar{5}6)}{\sqrt{8}} + \frac{(56)}{4} + (23\bar{6}) - 9\frac{(2\bar{3}6)}{4\sqrt{2}} - \frac{(24\bar{5})}{4} + \frac{(245)}{\sqrt{8}} - 3(3\bar{3}\bar{5}) \\ + \frac{(\bar{3}44)}{4} + \frac{(34\bar{4})}{\sqrt{8}} - \frac{(\bar{3}44)}{8} - \frac{(344)}{4\sqrt{2}} + 2(22\bar{3}\bar{4}) - 6\sqrt{2}(2234) \\ + 5\sqrt{2}(223\bar{4}) - \sqrt{2}(2\bar{4}5) - 3(335) + 3(23\bar{3}\bar{3}) - 33\sqrt{2}(233\bar{3}); \end{cases}$$

$$4\sqrt{2}(2\bar{3}7)$$

$$(4)\quad = \begin{cases} \frac{(6\bar{6})}{4} - \sqrt{2}(2\bar{4}6) + \frac{246}{\sqrt{8}} - 3\sqrt{2}(3\bar{3}\bar{6}) + 3(33\bar{6}) - 3\sqrt{2}(3\bar{3}6) \\ -(25\bar{5}) + \sqrt{2}(255) + 3(3\bar{3}6) + (3\bar{4}5) + (34\bar{5}) + \frac{(\bar{3}45)}{\sqrt{2}} + \frac{(345)}{\sqrt{2}} \\ -(345) - (\bar{3}45) + 4(2235) - \sqrt{8}(2235) - \frac{1}{4}(4\bar{4}\bar{4}) - \frac{(444)}{16} \\ +(22\bar{4}\bar{4}) - (224\bar{4}) - 5\frac{(2\bar{3}\bar{3}\bar{4})}{\sqrt{2}} + 24(23\bar{3}\bar{4}) + 28(23\bar{3}\bar{4}) \\ -3\frac{(233\bar{4})}{\sqrt{2}} - \frac{13}{2}(23\bar{3}4) - 3\frac{(2334)}{\sqrt{2}} + 14(22233). \end{cases}$$

Aus Formel (2) und (3) folgen aber durch Vertauschung noch folgende zwei Beziehungen:

$$8(3\bar{7}) + 4(3\bar{7})$$

$$(5)\quad = \begin{cases} \frac{(46)}{4} - (4\bar{6}) + \frac{(4\bar{6})}{2} + (\bar{5}5) - 2(235) + 4\sqrt{2}(2\bar{3}5) + \sqrt{8}(23\bar{5}) \\ -4(2\bar{3}\bar{5}) - \sqrt{2}(24\bar{4}) - \frac{(2\bar{4}\bar{4})}{\sqrt{2}} + \sqrt{8}(3\bar{3}4) + (33\bar{4}) + 2(\bar{3}\bar{3}\bar{4}) \\ -\frac{3}{2}(33\bar{4}) + \sqrt{2}(3\bar{3}4) - 3(\bar{3}34) + 10\sqrt{2}(223\bar{3}); \end{cases}$$

$$(\bar{4}7)$$

$$(6)\quad = \begin{cases} \frac{(56)}{\sqrt{8}} + \frac{(5\bar{6})}{4} + (2\bar{3}6) - 9\frac{(23\bar{6})}{4\sqrt{2}} - \frac{(24\bar{5})}{4} + \frac{(2\bar{4}5)}{\sqrt{8}} - 3(33\bar{5}) \\ + \frac{(3\bar{4}\bar{4})}{4} + \frac{(\bar{3}4\bar{4})}{\sqrt{8}} - \frac{(34\bar{4})}{8} - \frac{(\bar{3}4\bar{4})}{4\sqrt{2}} + 2(223\bar{4}) - 6\sqrt{2}(2\bar{2}34) \\ +5\sqrt{2}(22\bar{3}4) - \sqrt{2}(2\bar{4}5) - 3(3\bar{3}\bar{5}) + 3(2\bar{3}33) - 33\sqrt{2}(2\bar{3}\bar{3}3). \end{cases}$$

Hiermit aber haben wir das ganze Relationensystem und zwar in der Form, die in der Einleitung in Aussicht genommen wurde. Denn aus Formel (1) kann man $(\bar{4})$ rational berechnen, aus den Formeln (2), (3), (5), (6) die Invarianten (6), $(\bar{6})$, (7), $(\bar{7})$. Trägt man nun diese Werthe in Formel (4) ein, so entsteht zwischen den übrigen sieben Fundamentalinvarianten:

$$(2),\ (3),\ (\bar{3}),\ (4),\ (\bar{4}),\ (5),\ (\bar{5})$$

(von denen sechs unabhängig sein müssen) eine algebraische Relation, in welcher (5) und $(\bar{5})$ nur bis zur sechsten Potenz vorkommen.

Die zweite in diesem ersten Abschnitte zu behandelnde Aufgabe ist somit ebenfalls erledigt.

Abschnitt II.

Eine Anwendung der vorhergehenden Theorie.

§ 1.

Formulirung und Erledigung der Aufgabe.

Die Aufgabe, um welche es sich nunmehr handeln soll, ist diese: *Für* $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ *und einen unbekannten Kegelschnitt* ϱ *sind, in Uebereinstimmung mit der soeben gefundenen Relation, die numerischen Werthe der Fundamentalinvarianten* (2), (3), $(\bar{3})$, (4), (4), (5), $(\bar{5})$ *gegeben; man soll den unbekannten Kegelschnitt berechnen.*

Bemerken wir hierzu vorab, dass es auf dasselbe hinauskommen wird, ob wir ϱ oder das covariante s (§ 2.) berechnen, denn die Coefficienten von s sind, von dem Factor $\sqrt{2}$ abgesehen, von den in richtiger Reihenfolge genommenen Coefficienten von ϱ nicht verschieden (siehe oben).

Wir wollen ausserdem daran erinnern, dass die Form f durch 168 lineare Substitutionen von der Determinante Eins in sich selbst übergeht. Neben *einen* Kegelschnitt ϱ, den wir berechnen mögen, stellen sich also sofort 168 gleichberechtigte, und es wird die Gesammtzahl der Lösungen, welche wir finden, sonach ein Multiplum von 168 sein. Aus der sogleich zu formulirenden Lösungsmethode folgt, dass es genau 168 Kegelschnitte sind.

Unsere Lösungsmethode ist nun einfach die, dass wir unser neues Problem auf eines derjenigen zurückführen, die in Bd. XVII erledigt worden sind.

Wir haben dort nämlich u. A. die Aufgabe behandelt: eine biquadratische ternäre Form F, von der bekannt ist, dass sie sich durch eine lineare Substitution von der Determinante Eins in $f = x_1^3 x_2 x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ verwandeln lässt, die aber in irgend einer anderen Form gegeben ist, thatsächlich durch eine Substitution der genannten Art in f überzuführen*).

Hiervon haben wir jetzt einfach Gebrauch zu machen.

Wir kennen nämlich, vermöge unserer typischen Darstellung (die in § 11. gegeben wurde) die Gleichungsform, welche einerseits f, welche andererseits ϱ (oder vielmehr s) annimmt, wenn wir sie auf ein gewisses Coordinatensystem, nämlich das typische Coordinatensystem, beziehen. Dabei nehmen wir an, dass die Gleichungsformen

*) Bei der damaligen Darstellung ist der Umstand, dass die Determinante der Substitution gleich Eins sein sollte, obgleich er benutzt wurde, vielleicht nicht hinreichend hervorgehoben worden, worauf hier ausdrücklich aufmerksam gemacht sei.

so normirt seien, wie es, nach der Schlussbemerkung jenes Paragraphen, der Substitutionsdeterminante $U = 1$ entspricht.

Die *typische* Gestalt unseres f ist dann eben eine solche ternäre biquadratische Form, von der wir wissen, dass sie, rückwärts, durch eine Substitution von der Determinante Eins in das *kanonische* $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ verwandelt werden kann.

Wir suchen eine solche Substitution, indem wir unmittelbar von der in Bd. XVII behandelten Hülfsaufgabe Gebrauch machen. *Diese Substitution führt dann ganz ohne Weiteres unser typisches* ϱ (*oder* s) *in das gesuchte* (*kanonische*) *über und erledigt somit unsere Aufgabe mit einem Schlage.*

Erlangen, Ende Mai 1882.

Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen.

Von

Paul Gordan in Erlangen.

Dass es Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen giebt, hat Galois bekanntlich bei seinen allgemeinen Untersuchungen über die Gruppe der Modulargleichungen gefunden.*) Es hat dann Herr Betti zuerst die Angaben von Galois bewiesen und explicite jene Gruppe von 7 Buchstaben hergestellt**). Hr. Kronecker***) erfasste das Problem in allgemeinerer Weise. Nachdem er die Existenz jener Gruppe besprochen, auch eine Affectfunction mitgetheilt (die übrigens nach unserer jetzigen Auffassung nicht die einfachste ist), fährt er folgendermassen fort:

„Es ist ferner von Interesse, dass alle diejenigen Gleichungen siebenten Grades, auf welche die Modulargleichung achten Grades zu reduciren ist, jenen Affect haben, und ich glaube, dass auch umgekehrt *alle* mit diesem Affect begabten Gleichungen siebenten Grades durch diese von der Theorie der elliptischen Functionen gelieferten Gleichungen aufzulösen sind. Dies letztere zu beweisen, scheint indessen schwierig zu sein; wenigstens haben mich die Untersuchungen, welche ich zu diesem Zwecke vor zwei Jahren angestellt habe, als ich mich mit dem Gegenstande der vorliegenden Notiz beschäftigte, nicht zum Ziele geführt."

Es scheint nicht, dass Herr Kronecker in seinen Publicationen auf die hiermit angedeutete Fragestellung näher eingegangen ist. Was er in den Monatsberichten von 1861 und 1879 über verwandte Probleme mitgetheilt hat, bezieht sich auf die Zurückführung gewisser Gleichungen vom $2(n+1)^{\text{ten}}$ Grade†) auf diejenigen Gleichungen desselben

*) Vergl. Liouville's Journal, ser. 1, Bd. 11.

**) Annali di Scienze, da B. Tortolini, t. IV (1853).

***) Monatsberichte der Berliner Akademie, 1858.

†) n ist eine beliebige Primzahl > 3.

Grades mit $\frac{n+1}{2}$ Parametern, welche Herr Brioschi als Jacobi'sche Gleichungen bezeichnet.

Ich habe ferner der hierher gehörigen Arbeiten von Hrn. Hermite zu gedenken. Ursprünglich von allgemeinen Untersuchungen über Modulargleichungen ausgehend*) hat er erst später jene bei 7 Elementen mögliche Gruppe von 168 Substitutionen zum speciellen Gegenstande seiner Studien gemacht**) und neben verschiedenen analytischen Ausdrucksformen der Gruppe vor allen Dingen den Satz gefunden, dass jede Gleichung 7. Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen von einer zweiten Gleichung desselben Grades als Resolvente begleitet wird. Ursprünglich scheint Herr Hermite geglaubt zu haben, dass diese beiden Gleichungen, deren Beziehung eine gegenseitige ist, verschiedenen Typen von Gleichungen siebenten Grades zuzurechnen seien***), in einem an Herrn Brioschi gerichteten Briefe†) constatirt Herr Kronecker, dass dem nicht so ist.

Im Zusammenhange mit diesen Untersuchungen erwähne ich gleich hier der Nöther'schen Arbeit: „Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung im 15. Bande der Mathematischen Annalen. Es wird dort die Gruppe von 168 Substitutionen insofern auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht, als hervorgehoben wird, dass sich unter den 35 Tripeln, die man aus 7 Elementen bilden kann, jener Gruppe gegenüber 7 absondern und man die Gruppe geradezu definiren kann als den Inbegriff derjenigen Substitutionen, welche einerseits die 7 Elemente und andererseits diese 7 ausgezeichneten Tripel unter sich vertauschen. Zwischen den ursprünglichen Elementen und diesen Tripeln besteht dann eben das von Herrn Hermite bemerkte Reciprocitätsverhältniss.

So werthvoll auch diese Arbeiten sind, so lassen sie doch die oben berührte, von Herrn Kronecker aufgestellte Fragestellung gänzlich ausser Betracht. Es ist das Verdienst von Herrn Klein, als erster diese Fragestellung aufgegriffen und bis zu einem gewissen Punkte erledigt zu haben††) Herr Klein findet, dass man die allgemeinen

*) Théorie des équations modulaires; Paris 1859.

**) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, vol. 57, 1863: Sur les fonctions de sept lettres.

***) Annali di Matematica, ser. 1, t. II. (1859).

†) Ebenda.

††) Zwei Mittheilungen in den Erlanger Berichten, vom März und Mai 1878, über Gleichungen siebenten Grades.

Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen. Math. Annalen Bd. XIV.

Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade. Math. Annalen Bd. XV.

Gleichungen siebenten Grades der hier in Betracht kommenden Art in der That auf solche mit nur einem Parameter reduciren kann (die man dann ihrerseits mit der Modulargleichung der elliptischen Functionen in Zusammenhang bringen mag), aber nur dann, wenn man eine Hülfsgleichung vierten Grades, die auf keine Weise zu vermeiden ist, adjungirt. Er entwickelt sodann, dass den eigentlichen Kernpunkt der Frage eine gewisse ternäre biquadratische Form ausmacht, welche durch 168 lineare Substitutionen von der Determinante Eins in sich übergeht, und dass das Studium unserer Gleichungen auf eine Untersuchung des simultanen Systems hinauskommt, welches diese ternäre Form zusammen mit einem beliebigen Kegelschnitte besitzt.

Ich selbst habe bei meinen Untersuchungen*) an diese Klein'schen Ideen angeknüpft, habe dieselben, soweit es nöthig schien, präcisirt und bin nun in der Lage, im Folgenden eine *explicite* Lösung jener Gleichungen siebenten Grades zu geben. Ich brauche kaum hervorzuheben, dass die Arbeit, welche ich nun glücklich überwunden habe, keineswegs eine leichte war und dass ich vielleicht nie zum Schlussresultate gekommen wäre, hätte mich nicht das grosse Ansehn, welches Herr Kronecker in der mathematischen Welt mit Recht geniesst, zu immer erneuter Anstrengung angespornt. Uebrigens ist besagtes Schlussresultat implicite bereits in der hier vorstehend abgedruckten Arbeit: „Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$" enthalten, und es gilt im Folgenden nur noch, mit den dort gegebenen Entwickelungen einige wenige Betrachtungen über die 168 Substitutionen, welche f in sich überführen, und insbesondere über gewisse $2 \cdot 7$ Kegelschnitte, die sich, wie Herr Klein fand**), bei jenen 168 Substitutionen unter einander vertauschen, zu combiniren.

Wenn sich, wie ich glaube, das Resultat, das ich auf solchem Wege erreiche, materiell nicht noch wesentlich wird verbessern lassen, so gilt dasselbe meiner Meinung nach keineswegs von meiner Methode. Nicht nur, dass ich die Invariantentheorie der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ vielleicht zu stark habe in den Vordergrund treten lassen, so habe ich diese Theorie auch mit denjenigen Mitteln behandelt, welche bei der Behandlung der *allgemeinen* ternären Formen allerdings wohl zweckmässig sind, bei der Behandlung *specieller* Formen aber durch andere Processe vermuthlich werden ersetzt werden können. Ich habe eben diejenigen Kenntnisse und Fähigkeiten verwerthet, die ich mir in früherer ausgiebiger Beschäftigung mit allge-

*) Vergl. meine Arbeiten in Bd. 17 und 19 der Annalen, so wie die hier vorangehende Arbeit.

**) Vergl. Bd. XIV dieser Annalen, pag. 446, 456.

meinen, invariantentheoretischen Fragen angeeignet habe. Individuell berechtigt, wie dieses Verfahren ist, wird es eben so wenig bleibende Bedeutung besitzen, wie das Individuum selbst. Ich möchte mir vorbehalten, auf die im Folgenden gewonnenen Resultate noch einmal zurückzukommen, und von ihnen eine Darstellung zu geben, bei welcher jede Spur von dem Wege, auf welchem ich dieselben nun gewonnen habe, verwischt ist.

§ 1.

Die 168 Substitutionen von f.

Bekanntlich geht

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = a_x^4,$$

wie Herr Klein fand*), durch 168 lineare Substitutionen von der Determinante Eins in sich über. Diese Substitutionen erwachsen durch Wiederholung und Combination der folgenden beiden:

$$y_1 = \varepsilon x_1, \quad y_2 = \varepsilon^4 x_2, \quad y_3 = \varepsilon^2 x_3;$$

$$\begin{cases} \sqrt{-7} \cdot y_1 = (\varepsilon^5 - \varepsilon^2) x_1 + (\varepsilon^3 - \varepsilon^4) x_2 + (\varepsilon^6 - \varepsilon) x_3, \\ \sqrt{-7} \cdot y_2 = (\varepsilon^3 - \varepsilon^4) x_1 + (\varepsilon^6 - \varepsilon) x_2 + (\varepsilon^5 - \varepsilon^2) x_3, \\ \sqrt{-7} \cdot y_3 = (\varepsilon^6 - \varepsilon) x_1 + (\varepsilon^5 - \varepsilon^2) x_2 + (\varepsilon^3 - \varepsilon^4) x_3, \end{cases}$$

unter ε die Grösse $\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ verstanden, wo also $\sqrt{-7}$ $= \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 - \varepsilon^6 - \varepsilon^3 - \varepsilon^5$ ist.

Diesem ersten Systeme von Substitutionen, das einen Augenblick mit (S) bezeichnet sein soll, stellt sich ein zweites (S') zur Seite, das in seiner Gesammtheit übrigens dieselben Substitutionen enthält, wie (S). Die Substitutionen (S') erwachsen, wenn man in $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ die x den Substitutionen (S) unterwirft und nun solche Substitutionen der u sucht, dass u_x ungeändert bleibt.

Hinsichtlich dieser beiden Substitutionssysteme hat nun die Invariantentheorie der Form f eine bestimmte principielle Bedeutung. Indem ich die letztere hier ausspreche, unterdrücke ich den etwas weitläufigen aber in keiner Weise schwierigen Beweis.

Zuvörderst ist deutlich, dass alle Covarianten von f bei den (S) ungeändert bleiben, ebenso alle zugehörigen Formen bei den (S'), und alle Zwischenformen von f, d. h. diejenigen invarianten Bildungen, welche sowohl die x als die u enthalten, bei gleichzeitiger Anwendung der (S) und der (S'). Aber das Wichtige ist, dass man diesen Satz umkehren kann und also folgende Behauptung zutrifft:

*) Math. Annalen Bd. XIV, pag. 444.

Jede ganze Function der x, oder der u, oder auch der x und u, welche bei den (S), bez. bei den (S'), oder bei gleichzeitiger Anwendung der (S), (S') ungeändert bleibt, ist eine Covariante oder zugehörige Form, oder Zwischenform von f.

Man kann dieses Theorem nun noch dadurch verallgemeinern, dass man statt der x, u gleichzeitig mehrere Reihen von Punkt- bez. Liniencoordinaten einführt oder auch einzelne dieser Coordinaten durch die Symbole einer Classencurve, bez. Ordnungscurve ersetzt. Man erhält so einen allgemeinen Satz, der im Folgenden nur in so weit zur Verwendung kommt, als es sich um einen Kegelschnitt handelt, der zur Form f hinzutritt. Unter Beschränkung auf diesen Fall werden wir uns merken:

Alle ganzen Functionen der ϱ_{ik}, welche ungeändert bleiben, wenn man die u in u_ϱ^2 den Substitutionen (S') unterwirft, sind simultane Invarianten von u_ϱ^2 und f, und umgekehrt.

In diesem Sinne gewinnen die Untersuchungen meiner vorigen Arbeit über jenes simultane System eine unmittelbare gruppentheoretische Bedeutung, die nun des Ferneren immer deutlicher hervortreten wird.

§ 2.

Die $2 \cdot 7$ Kegelschnitte φ, Φ, bez. ψ, Ψ.

Ich führe nun die $2 \cdot 7$ quadratischen Formen ein:

$$\varphi_k = \alpha(\varepsilon^{2k}x_1^2 + \varepsilon^k x_2^2 + \varepsilon^{4k}x_3^2) + \beta\sqrt{2}\,(\varepsilon^{5k}x_1x_2 + \varepsilon^{6k}x_2x_3 + \varepsilon^{3k}x_3x_1),$$

$$\Phi_k = \beta(\varepsilon^{5k}x_1^2 + \varepsilon^{6k}x_2^2 + \varepsilon^{3k}x_3^2) + \alpha\sqrt{2}\,(\varepsilon^{2k}x_1x_2 + \varepsilon^k x_2x_3 + \varepsilon^{4k}x_3x_1),$$

$$(k = 0, 1, \cdots, 6)$$

wo

$$\alpha = \frac{\sqrt{-1}+\sqrt{-7}}{\sqrt[4]{8}}, \qquad \beta = \frac{\sqrt{-1}-\sqrt{-7}}{\sqrt[4]{8}}$$

gesetzt ist.

Ihre zugehörigen Formen lauten:

$$\psi_k = \beta(\varepsilon^{5k}u_1^2 + \varepsilon^{6k}u_2^2 + \varepsilon^{3k}u_3^2) + \alpha\sqrt{2}\,(\varepsilon^{2k}u_1u_2 + \varepsilon^k u_2u_3 + \varepsilon^{4k}u_3u_1),$$

$$\Psi_k = \alpha(\varepsilon^{2k}u_1^2 + \varepsilon^k u_2^2 + \varepsilon^{4k}u_3^2) + \beta\sqrt{2}\,(\varepsilon^{5k}u_1u_2 + \varepsilon^{6k}u_2u_3 + \varepsilon^{3k}u_3u_1).$$

Wenn man hier die x mit den u vertauscht, so gehen, wie man bemerkt, die φ_k und Ψ_k und andererseits die ψ_k und Φ_k resp. in einander über.

Von den Formen φ_k, Φ_k hat Herr Klein l. c. nachgewiesen, dass sie sich bei den 168 Substitutionen (S) unter sich vertauschen. In der That findet man den beiden in § 1 angegebenen Substitutionen

(S) entsprechend, wie man sofort verificirt, die folgenden Permutationen der Indices (k):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

In derselben Weise permutiren sich natürlich die ψ_k, Ψ_k bei den Substitutionen (S').

Zwischen diesen φ, Φ, ψ, Ψ findet man nun mit Leichtigkeit eine Reihe weiterer Relationen. Ich notire hier zvörderst die folgenden:

$$\varphi_i^2 \psi_k = \Phi_i^2 \Psi_k = \begin{cases} 6 \text{ für } i = k, \\ -1 \text{ für } i \gtrless k, \end{cases}$$

$$\varphi_{k,\nu}^2 u_\nu^2 = \frac{1}{\sqrt{8}} \psi_k, \quad a_{\psi_k}^2 a_\nu^2 = \frac{1}{\sqrt{8}} \varphi_k,$$

$$\sum \varphi_k = 0, \quad \sum \Phi_k = 0, \quad \sum \psi_k = 0, \quad \sum \Psi_k = 0,$$

dann aber die charakteristischen Gleichungen:

$$\varphi_{-k-1} + \varphi_{-k-2} + \varphi_{-k-4} = \sqrt{2} \cdot \Phi_k,$$

$$\Phi_{-k-1} + \Phi_{-k-2} + \Phi_{-k-4} = \sqrt{2} \cdot \varphi_k,$$

(die man natürlich ebenso wieder in den ψ würde schreiben können).

Offenbar haben wir in den $2 \cdot 7$ Formen φ, Φ $2 \cdot 7$ Elemente, welche sich bei den 168 Substitutionen (S) ebenso vertauschen, wie die $2 \cdot 7$ Elemente bei Hermite und Nöther. In den beiden zuletzt angeführten Formeln tritt die reciproke Zuordnung der beiden Elementenreihen, wie die Tripeleigenschaft auf das Deutlichste hervor.

§ 3.

Hinzunahme eines beliebigen Kegelschnitts.

Den bisherigen Formen adjungire ich nunmehr einen beliebigen Kegelschnitt:

$$\varrho = u_\varrho^2$$

oder, was nach § 2. meiner vorigen Arbeit auf dasselbe hinauskommt, den Kegelschnitt

$$s = \frac{1}{\sqrt{8}} a_x^2 a_\varrho^2.$$

Ich habe in meiner vorigen Arbeit gezeigt, dass alle simultanen In-

*) u_ν^4 bedeutet dabei, wie in meinen früheren Arbeiten,

$$2(a\,b\,u)^4 = u_1^3 u_2 + u_2^3 u_3 + u_3^3 u_1.$$

varianten von ϱ und f ganze Functionen von 12 *Fundamentalinvarianten* sind und dass diese selbst sich durch 7 unter ihnen, zwischen denen eine algebraische Relation besteht, die ich aufstellte, rational ausdrücken lassen. Um die Definition dieser Invarianten zu recapituliren, so setzte ich:

$$\sigma = (rsu)^2, \qquad r = (\varrho\varrho_1 x)^2,$$
$$t = (\varrho\tau x)^2, \qquad \tau = (ss_1 u)^2$$

und hatte dann*):

$$s_\varrho{}^2 = 2(2), \qquad r_\varrho{}^2 = 6(3), \qquad s_\tau{}^2 = 6(\bar{3}),$$
$$r_\tau{}^2 = (4), \qquad a_\tau{}^2 a_{\tau_1}^2 = (\bar{4}), \qquad r_\nu{}^2 r_\nu'^2 = (\bar{\bar{4}}),$$
$$a_\sigma{}^2 a_\tau{}^2 = (5), \qquad r_\nu{}^2 t_\nu{}^2 = (\bar{5}),$$
$$a_\sigma^2 a_{\sigma_1}^2 = (6), \qquad t_\nu{}^2 t_\nu'^2 = (\bar{6}),$$
$$a_\sigma{}^2 b_\sigma{}^2 (abs)^2 = (7), \qquad t_\nu{}^2 t_{\nu_1}'^2 (\nu\nu_1\varrho)^2 = (\bar{7}).$$

Von diesen Invarianten ist übrigens (4) überflüssig, insofern

$$(\bar{4}) + (\bar{\bar{4}}) + \tfrac{(4)}{2} + \tfrac{(22)}{2} = 0,$$

und wurde von mir nur aus systematischen Gründen zu den übrigen hinzugenommen.

Der engere Kreis jener 7 Invarianten, welche zur rationalen Darstellung ausreichen und die ich im Folgenden *Elementarinvarianten* nennen will, wird durch (2), (3), $(\bar{3})$, $(\bar{4})$, $(\bar{\bar{4}})$, (5), $(\bar{5})$ gebildet. In die zwischen ihnen bestehende Relation gehen (5) und $(\bar{5})$ nur bis zum sechsten Grade ein.

Diese Angaben gewinnen jetzt im Sinne des § 1 *die Bedeutung, dass alle ganzen Functionen der ϱ_{ik}, welche ungeändert bleiben, wenn man die u den Substitutionen (S') unterwirft, ganze Functionen der Fundamentalinvarianten und rationale Functionen der Elementarinvarianten sind.*

Ich werde nun gewisse siebenwerthige Functionen der ϱ_{ik} bilden, indem ich nämlich die Ueberschiebungen

$$s_{\psi_k}^2 = \varphi_{k,\varrho}^2 \qquad \text{und} \qquad \Phi_{k,\varrho}^2 = s_{\psi_k}^2$$

bilde. Die symmetrischen Functionen dieser siebenwerthigen Grössen bleiben bei den 168 Substitutionen (S') gewiss ungeändert. Sie sind also in dem Falle des gerade formulirten Satzes. Ich will insbesondere die Potenzsummen

$$S_\epsilon = \frac{1}{7}\sum_k (\varphi_{k,\varrho}^2)^\epsilon, \qquad T_\epsilon = \frac{1}{7}\sum_k (\Phi_{k,\varrho})^\epsilon$$

*) Die Invarianten selbst benenne ich, wie früher, durch in Klammern eingeschlossene Zahlen, welche den Grad in den Coefficienten ϱ_{ik} angeben.

für $l = 1, 2, \cdots, 7$ herausgreifen. Der folgende Paragraph ist bestimmt, dieselben explicite als ganze Functionen der Fundamentalinvarianten darzustellen. Dabei können S_1, T_1 von vornherein ausser Betracht bleiben, da sie offenbar beide gleich Null sind. Uebrigens gebe ich auch für S_6, S_7 und ebenso für T_6, T_7, um nicht zu weitläufig zu sein, nicht mehr die ausgeführten Rechnungen.

§ 4.

Zusammenhang der Potenzsummen mit den Invarianten.

Das Hauptresultat, das sich in diesem Paragraphen vermöge der anzustellenden Rechnungen ergeben wird, ist diess, dass sich nicht nur S_2, S_3, S_4, S_5 und T_2, T_3, T_4, T_5 (wobei, wie gleich bemerkt sei, $S_2 = T_2$ wird) durch die Elementarinvarianten rational ausdrücken lassen, sondern auch umgekehrt die Elementarinvarianten durch jene Potenzsummen, so dass also die Potenzsummen an die Stelle der Elementarinvarianten treten können. Ein analoger Satz, der aber hier nicht bewiesen werden soll, besteht, was Darstellung durch *ganze* Functionen angeht, hinsichtlich der 12 Fundamentalinvarianten (von denen (4) in Wegfall kommt), und der Potenzsummen $S_2, \cdots, S_7$, $T_2, \cdots, T_7$.

Indem ich mich nun zur Ausführung der Rechnungen wende, stelle ich die folgenden sofort zu beweisenden Formeln voraus:

$$u_x^2 = \frac{1}{7} \sum \varphi\psi,$$

$$\varrho = \frac{1}{7} \sum \varphi_\varrho^2 \cdot \psi, \qquad s = \frac{1}{7} \sum s_\psi^2 \cdot \varphi,$$

$$r = \frac{1}{7} \sum r_\psi^2 \cdot \varphi, \qquad \tau = \frac{1}{7} \sum \varphi_\tau^2 \cdot \psi,$$

wo also ϱ, s, r, τ durch lineare Aggregate der sieben ψ, bez. φ ausgedrückt erscheinen, und zwar so, dass die Summe der Coefficienten gleich Null ist.

Constatiren wir ferner, dass $S_2, \cdots, S_5$, $T_2, \cdots, T_5$ nothwendig ganze Functionen derjenigen Fundamentalinvarianten sein müssen, deren Grad den fünften Grad nicht übersteigt, d. h. der folgenden acht:

$$(2), (3), (\bar{3}), (4), (\bar{4}), (\bar{\bar{4}}), (5), (\bar{5}).$$

Hiernach ist es leicht die zu berechnenden Formeln von Vorneherein der Art nach hinzuschreiben, worauf nur noch die Bestimmung der Zahlencoefficienten zu leisten sein wird. Was die letztere angeht, so erinnere man sich, dass die φ aus den Φ durch Vertauschung der

Irrationalitäten α und β hervorgehen. Die Zahlencoefficienten also, welche bei den T_ϱ auftreten, werden sich von denjenigen, die sich bei den S_ϱ einstellen, jedesmal nur durch das Vorzeichen von $\sqrt{-7}$ unterscheiden.

Ich will endlich noch bemerken, dass die nachstehenden Formeln so geordnet sind, dass in die einzelne Abtheilung hinein ausser der beabsichtigten Endformel immer auch noch diejenigen später zu benutzenden Hülfsformeln genommen sind, welche mit jener Endformel die Ableitung gemein haben.

I. Berechnung von $S_2 = T_2$.

Die Berechnung von $S_2 = T_2$ gestaltet sich unmittelbar. Man hat:

$$s_\varrho^2 = 2(2) = \frac{1}{7}\sum \varphi_{k,\varrho}^2 s_{\psi_i}^2 = \frac{1}{7}\sum (\varphi_{k,\varrho}^2)^2 = S_2 = T_2.$$

Da:

$$\frac{1}{7}\sum (\varphi_{k,\varrho})^2 = a_\varrho^2 a_{\varrho_1}^2 \sqrt{8}$$

ist, so folgt auf gleiche Weise:

$$\frac{1}{7}\sum (\varphi_{k,\tau}^2)^2 = (\bar{4}), \quad \frac{1}{7}\sum (r_{\psi,k}^2)^2 = (\bar{\bar{4}}).$$

Ausserdem hat man noch die Formel:

$$\frac{1}{7}\sum \varphi_{k,\tau}^2 r_{,k}^2 = (4).$$

II. Berechnung von S_3, T_3.

Die Invarianten (3) und $(\bar{3})$ haben die Werthe:

$$(3) = \begin{vmatrix} \varrho_{11} & \varrho_{12} & \varrho_{13} \\ \varrho_{21} & \varrho_{22} & \varrho_{23} \\ \varrho_{31} & \varrho_{32} & \varrho_{33} \end{vmatrix}, \qquad (\bar{3}) = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix},$$

wo

$$s_{k,k} = \sqrt{2} \cdot \varrho_{k,k+1}, \qquad \varrho_{k,k} = \sqrt{2} \cdot s_{k,k+1} \ (k \bmod 3).$$

Auf Grund der vorausgeschickten Bemerkung setze ich jetzt mit unbestimmten Coefficienten:

$$S_3 = \frac{1}{7}\sum (\varphi_{k,\varrho}^2)^3 = c(3) + \bar{c}(\bar{3}).$$

Dann giebt der Vergleich von $\varrho_{11}\varrho_{23}^2$ und $s_{11}s_{23}^2$ beiderseits sofort:

$$6\beta = -c, \quad 6\alpha = -\bar{c}.$$

Daher ist:

$$S_3 = -6\beta(3) - 6\alpha(\bar{3}) = -\beta(\varrho\varrho_1\varrho_2)^2 - \alpha(ss_1s_2)^2,$$

und durch Vertauschung:

$$T_3 = -6\alpha(3) - 6\beta(\bar{3}).$$

Indem ich $S_3 = \frac{1}{7}\sum(\varphi_{k,\varrho}^2)^3$ nach ϱ differentiire, finde ich noch:

$$-\frac{1}{7}\sum(\varphi_{k,\varrho}^2)^2\cdot\varphi_k = \beta r + \sqrt{8}\cdot\alpha\cdot a_x^2 a_\tau^2$$
$$= \frac{\beta}{7}\sum r_{\psi,k}^2\varphi_k + \frac{\alpha}{7}\sum\varphi_{k,\tau}^2\varphi_k$$

und also die wichtige Hülfsformel:

$$(\varphi_{k,\varrho}^2)^2 = S_2 - \beta r_{\psi,k}^2 - \alpha\varphi_{k,\tau}^2,$$

welche in der Folge fortwährend verwandt wird, insofern sie das Quadrat der linken Seite in die linearen Ausdrücke der rechten Seite verwandelt.

III. Berechnung von S_4 und T_4.

Durch Quadriren der gerade gewonnenen Hülfsformel kommt:

$$7S_4 = \sum(\varphi_{k,\varrho}^2)^4 = \sum(S_2 - \beta r_{\psi,k}^2 - \alpha\varphi_{k,\tau}^2)^2$$

und also mit Rücksicht auf I. ohne Weiteres:

$$S_4 = \varphi_2^2 + \beta^2\sqrt{8}(\bar{4}) + \alpha^2\sqrt{8}(\bar{4}) + 2(4),$$

sowie durch Vertauschung:

$$T_4 = \varphi_2^2 + \alpha^2\sqrt{8}(\bar{4}) + \beta^2\sqrt{8}(\bar{4}) + 2(4).$$

Erinnert man sich hier der Relation zwischen den Fundamentalinvarianten:

$$(\bar{4}) + (\bar{4}) - \overset{(4)}{2} + \overset{(22)}{2} = 0,$$

so kann man S_4 z. B. auch in folgende Gestalten umsetzen:

$$S_4 = (4 - \beta^2\sqrt{2})(22) + (\alpha^2 - \beta^2)\sqrt{8}(\bar{4}) + (2 + \beta^2\sqrt{2})(4)$$
$$= (4 - \alpha^2\sqrt{2})(22) + (\beta^2 - \alpha^2)\sqrt{8}(4) + (2 + \alpha^2\sqrt{2})(4).$$

IV. Berechnung von S_5, T_5.

Man hat vermöge der Hülfsformel unter II:

$$7S_5 = \sum(\varphi_{k,\varrho}^2)^5 = \sum(\varphi_{k,\varrho}^2)^3(S_2 - \beta r_{\psi,k}^2 - \alpha\varphi_{k,\tau}^2),$$

also:

$$S_5 = S_2 S_3 - \frac{\beta}{7}\sum (\varphi_{k,\varrho}^2)^3 r_{\psi,k}^2 - \frac{\alpha}{7}\sum (\varphi_{k,\varrho}^2)^3 \varphi_{k,\tau}^2.$$

Nach III. ist nun, indem man aus den dort gegebenen Formeln genau so Hülfsformeln ableitet, wie dies unter II. geschehen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{7}\sum_k (\varphi_{k,\varrho}^2)^3 \varphi_{k,\tau}^2 &= 3(4-\alpha^2)\sqrt{2}(2\bar{3}) + (\beta^2-\alpha^2)\sqrt{8}(\bar{5}) \\ &\quad + \left(1+\frac{\alpha^2}{\sqrt{2}}\right)\left(16(2\bar{3}) + (5)\sqrt{8}\right) \\ &= (28+5\alpha^2\sqrt{2})(2\bar{3}) + (\beta^2-\alpha^2)\sqrt{8}(\bar{5}) + (\sqrt{8}+2\alpha^2)(5), \\ \frac{1}{7}\sum_k (\varphi_{k,\varrho}^2)^3 r_{\psi_k}^2 &= 3(4-\beta^2\sqrt{2})(23) + (\alpha^2-\beta^2)\sqrt{8}(5) \\ &\quad + \left(1+\frac{\beta^2}{\sqrt{2}}\right)\left(16(23) + (\bar{5})\sqrt{8}\right) \\ &= (28+5\beta^2\sqrt{2})(23) + (\alpha^2-\beta^2)\sqrt{8}(5) + (\sqrt{8}+2\beta^2)(\bar{5}),\end{aligned}$$

und nach (II)

$$S_2 S_3 = -12\beta(23) - 12\alpha(2\bar{3}),$$

also kommt:

$$\begin{aligned}S_5 &= (-40\beta+5\beta^3\sqrt{2})(23) - (40\alpha+5\alpha^3\sqrt{2})(2\bar{3}) \\ &\quad + (\beta^3\sqrt{8}-4\alpha\sqrt{2}-2\alpha^3)(5) + (\alpha^3\sqrt{8}-4\beta\sqrt{2}-2\beta^3)(\bar{5}) \\ &= (-35\beta+5\alpha\sqrt{2})(23) + (-35\alpha+5\beta\sqrt{2})(2\bar{3}) - 5\alpha\sqrt{2}(5) \\ &\quad - 5\beta\sqrt{2}(\bar{5}),\end{aligned}$$

oder endlich:

$$-\frac{S_5}{5\sqrt{2}} = \alpha(5) + \beta(\bar{5}) + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\beta - \alpha\right)(23) + \left(\frac{7\alpha}{\sqrt{2}} - \beta\right)(2\bar{3}),$$

sowie durch Vertauschung:

$$= \frac{T_5}{5\sqrt{2}} = \beta(5) + \alpha(\bar{5}) + \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\alpha - \beta\right)(23) + \left(\frac{7\beta}{\sqrt{2}} - \alpha\right)(2\bar{3}).$$

§ 5.

Uebergang zu den Gleichungen siebenten Grades.

Es gilt nun, das bisher Abgeleitete in anderer Weise auszusprechen.

Man setze der bequemeren Bezeichnung wegen:

$$\varphi_{k,\varrho}^2 = \alpha(\varepsilon^{2k}\varrho_{11} + \varepsilon^k\varrho_{22} + \varepsilon^{4k}\varrho_{33}) + \beta\sqrt{2}(\varepsilon^{5k}\varrho_{12} + \varepsilon^{6k}\varrho_{23} + \varepsilon^{3k}\varrho_{31}) = Y_k$$

und analog:

$$\psi_{k,\varrho}^2 = \beta(\varepsilon^{5k}\varrho_{11} + \varepsilon^{6k}\varrho_{22} + \varepsilon^{3k}\varrho_{33}) + \alpha\sqrt{2}(\varepsilon^{2k}\varrho_{12} + \varepsilon^k\varrho_{23} + \varepsilon^{4k}\varrho_{31}) = z_k,$$

wo also die y_k, z_k durch die umkehrbaren Gleichungen zusammenhängen:

$$z_k = \frac{y_{-k-1} + y_{-k-2} + y_{-k-4}}{\sqrt{2}}, \quad y_k = \frac{z_{-k-1} + z_{-k-2} + z_{-k-4}}{\sqrt{2}},$$

und übrigens:

$$\sum y_k = \sum z_k = 0.$$

Dann verwandeln sich die Potenzsummen $S_2 \cdots S_5$, $T_2 \cdots T_5$ in folgende Ausdrücke:

$$7S_2 = 7T_2 = \sum{}' y_k^2 = \sum z_k^2,$$

$$7S_3 = \sum y_k^3, \quad 7S_4 = \sum y_k^4, \quad 7S_5 = \sum y_k^5,$$

$$7T_3 = \sum z_k^3, \quad 7T_4 = \sum z_k^4, \quad 7T_5 = \sum z_k^5.$$

Nun haben wir im vorigen Paragraphen die Elementarinvarianten durch diese S, T rational ausgedrückt. Andererseits haben wir (in der hier vorausgehenden Arbeit) die Aufgabe gelöst, die ϱ_{ik} und also auch die y_k, z_k zu berechnen, wenn die Elementarinvarianten des Kegelschnittes ϱ gegeben sind. Unser dermaliges Resultat erledigt also zugleich die folgende Aufgabe:

Es sollen $2 \cdot 7$ *Grössen* y_k, z_k *berechnet werden, wenn zwischen ihnen die Relationen bestehen:*

$$z_k = \frac{y_{-k-1} + y_{-k-2} + z_{-k-4}}{\sqrt{2}}, \quad y_k = \frac{z_{-k-1} + z_{-k-2} + z_{-k-4}}{\sqrt{2}},$$

$$\sum y_k = \sum z_k = 0$$

und übrigens die Werthe der Potenzsummen $S_2 = T_2$, S_3, S_4, S_5 und T_3, T_4, T_5 *gegeben sind.*

Zugleich erfahren wir, indem wir die Werthe der Fundamentalinvarianten in den S_ε, T_ε in die Relation der vorigen Arbeit eintragen), *dass zwischen diesen* S_ε, T_ε *eine dort näher charakterisirte*

Relation besteht, die in den S_5, T_5 nur bis zum sechsten Grade aufsteigt, dass aber übrigens die S_6, T_6 unabhängig sind.

Hiermit haben wir nun zugleich die *Formulirung*, unter der man zweckmässigerweise die Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen sich gegeben denkt, und die *fertige Auflösung* derselben. Ich habe nur noch einige Betrachtungen hinzuzufügen, in denen es sich um einen Rückblick über das gewonnene Resultat, aber nicht mehr um eine Weiterführung desselben handelt.

§ 6.

Allgemeines zur Gleichungstheorie.

Eine Fragestellung, welche bislang in den Arbeiten über Gleichungstheorie noch gar nicht zur Entwickelung gekommen ist, ist die, *wie man jedesmal in zweckmässigster Weise einen Affect definiren soll.* Gewöhnlich vergleicht man die aufzustellende Gleichung mit der *allgemeinen* Gleichung ihres Grades. Man denkt sich also jedenfalls die Coefficienten der Gleichung, d. h. die symmetrischen Functionen der Wurzeln, explicite gegeben und nimmtdann irgend eine, gewöhnlich nicht näher definirte, *Affectfunction* zu Hülfe, welche mit jenen symmetrischen Functionen durch eine (vermuthlich sehr hohe) Gleichung verbunden ist, die selbst eine Resolvente der allgemeinen Gleichung des in Betracht kommenden Grades ist. Man beruft sich dann ferner auf den Satz des Lagrange, demzufolge alle anderen Affectfunctionen rationale Functionen der einen, angenommenen und übrigens der symmetrischen Functionen sind.

Dieser Ansatz unterliegt in doppeltem Sinne der Kritik. Einmal gewinnt man auf diesem Wege keinen Einblick in die wesentlichen Beziehungen zwischen den verschiedenen Affectfunctionen; denn die Formel, welche sich an den Satz von Lagrange anschliesst, ist in keiner Weise praktisch zu handhaben. Dann aber erscheint durch die Vergleichung mit der jeweiligen allgemeinen Gleichung desselben Grades die ganze Theorie in einer schiefen Perspective: Wenn wirklich, wie dies in den höheren Fällen vermuthlich nicht zu vermeiden ist, eine überzählige Anzahl von Affectfunctionen in Betracht zu ziehen ist, zwischen denen algebraische Relationen bestehen, so ist doch in keiner Weise eine Nothwendigkeit zu erkennen, wesshalb diese algebraischen Relationen als Resolventen jener allgemeinen Gleichung des vorgegebenen Grades aufgefasst werden müssten.

Was den ersten Punkt dieser Kritik angeht, so wird Jeder, der sich mit Invariantentheorie*) beschäftigt und den Unterschied zwischen

*) Invariantentheorie im allgemeinen Sinne, der auch die Zahlentheorie umfasst.

dem „vollen Formensysteme“ und dem Systeme der „associirten Formen“ (die nur rationale Darstellung ermöglichen) erfasst hat, von Vorneherein ein doppeltes Postulat formuliren. Einmal wird er verlangen, dass man das kleinste System der Affectfunctionen (natürlich mit den zwischen diesen Functionen bestehenden Identitäten) angebe, vermöge dessen sich *rationale* Darstellung der übrigen Affectfunctionen ermöglicht. Dann aber wird er das umfassendere System zu kennen wünschen, aus dessen Formen sich alle anderen Affectfunctionen als *ganze* Functionen zusammensetzen. — Der zweite Punkt unserer Kritik ist wohl für's Erste noch zu unzugänglich, als dass sich etwas Allgemeines über ihn behaupten liesse*).

Es ist nun ebenso interessant als lehrreich, zu sehen, wie für die Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen beide Punkte vermöge der Formulirung des vorigen Paragraphen und meiner sonstigen Entwickelungen auf das Eleganteste erledigt sind.

Indem ich neben den y_k immer zugleich die z_k betrachte, habe ich zuvörderst in den Potenzsummen $S_2 = T_2$, S_3, S_4, S_5, T_3, T_4, T_5 das volle System der Affectfunctionen, vermöge deren sich rationale Darstellung aller übrigen ermöglicht.

Dann aber wurde bereits bemerkt, dass die zwölf Fundamentalinvarianten durch die Potenzsummen $S_2 = T_2$, $S_3 \cdots S_7$, $T_3 \cdots T_7$ ersetzt werden konnten. Allerdings schoss dabei die Fundamentalinvariante (4) über; aber diese haben wir früher nur aus anderweitigen Zweckmässigkeitsgründen unter den Kreis der Fundamentalinvarianten mit aufgenommen; sie ist selbst eine ganze Function der übrigen, wie die wiederholt angeführte Relation beweist. Statt der Potenzsummen, $S_2 \cdots S_7$, $T_2 \cdots T_7$ können wir natürlich die Coefficienten der Gleichungen siebenten Grades für y und z substituiren (wobei man sich immer erinnern mag, dass $\Sigma y = \Sigma z = 0$ gesetzt wurde). Daher haben wir:

Das System derjenigen Affectfunctionen, vermöge deren sich alle anderen als ganze Functionen zusammensetzen, wird einfach von den Coefficienten der Gleichungen für y_k und z_k gebildet.

Und was nun endlich die Relationen angeht, die zwischen den Affectfunctionen des einen oder anderen Systems bestehen, so haben

*) Die Bemerkungen des Textes richten sich gegen die Darstellungen der Lehrbücher. Ich habe erst neuerdings bemerkt, dass sich Herr Kronecker im Monatsbericht der Berliner Akademie von 1879, sowie im Journal für Mathematik, Bd. 91, in ähnlichem Sinne äussert. Immerhin dürften die Gleichungen 7ten Grades, wie ich sie im Texte behandele, das erste höhere Beispiel sein, an welchem jene Forderungen explicite durchgeführt werden. [Sept. 1882].

wir diese sämmtlich in § 12. meiner vorigen Arbeit explicite angegeben. Beschränkt man sich auf $S_2 \cdots S_5$, $T_2 \cdots T_5$, so hat man ausser $S_2 = T_2$ nur eine Relation, und diese steigt in S_5, T_5 nur bis zum sechsten Grade.

§ 7.

Bedeutung der ternären Formen.

Der Zusammenhang unserer Gleichungen siebenten Grades mit gewissen ternären Formen ist im Vorhergehenden nur insofern hervorgetreten, als wir, von jenen ternären Formen ausgehend, thatsächlich zu Gleichungen siebenten Grades der betreffenden Art gekommen sind. Man kann fragen, wie man am raschesten die Nothwendigkeit dieses Zusammenhanges einsehen kann. In dieser Richtung habe ich folgende Bemerkung zu machen, mit der meine heutige Darlegung abschliessen mag. Jener Zusammenhang beruht offenbar darauf, dass die ϱ_{ik}:

$$7\varrho_{11} = \beta \sum \varepsilon^{5k} y_k, \quad 7\varrho_{22} = \beta \sum \varepsilon^{6k} y_k, \quad 7\varrho_{33} = \beta \sum \varepsilon^{3k} y_k,$$

$$7\varrho_{23} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sum \varepsilon^{k} y_k, \quad 7\varrho_{31} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sum \varepsilon^{4k} y_k, \quad 7\varrho_{12} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \sum \varepsilon^{2k} y_k,$$

(wo wieder

$$\alpha = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{-7}}{\sqrt{8}}}, \qquad \beta = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{-7}}{\sqrt{8}}},$$

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + i \sin\frac{2\pi}{7}$$

zu nehmen ist), d. h. also die mit gewissen Zahlencoefficienten multiplicirten Lagrange'schen Ausdrücke vermöge $\Sigma y_k = 0$ sich bei den 168 Vertauschungen der y wie die Coefficienten eines Kegelschnittes transformiren. Diese Thatsache aber lässt sich am Besten constatiren, wenn man ϱ_{ik} symbolisch durch $\varrho_i \cdot \varrho_k$ ersetzt und auf die ϱ_i, bez. ϱ_k eben die ternären Substitutionen anwendet, welche oben (§ 1.) angegeben wurden. In der That verificirt man sofort, dass unsere ϱ_{ik} dieselbe Umänderung erfahren, wenn man einmal jene beiden ternären Substitutionen in der Gestalt verwendet:

$$\varrho_1' = \varepsilon\varrho_1, \quad \varrho_2' = \varepsilon^4\varrho_2, \quad \varrho_3' = \varepsilon^2\varrho_3;$$

$$\begin{cases} \sqrt{-7}\cdot\varrho_1' = (\varepsilon^5 - \varepsilon^2)\varrho_1 + (\varepsilon^3 - \varepsilon^4)\varrho_2 + (\varepsilon^6 - \varepsilon)\varrho_3, \\ \sqrt{-7}\cdot\varrho_2' = (\varepsilon^3 - \varepsilon^4)\varrho_1 + (\varepsilon^6 - \varepsilon)\varrho_2 + (\varepsilon^5 - \varepsilon^2)\varrho_3, \\ \sqrt{-7}\cdot\varrho_3' = (\varepsilon^6 - \varepsilon)\varrho_1 + (\varepsilon^5 - \varepsilon^2)\varrho_2 + (\varepsilon^3 - \varepsilon^4)\varrho_3, \end{cases}$$

und wenn man andererseits die y in folgender Art permutirt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Durch die Zusammensetzung dieser beiden letzten Permutationen erwächst aber bekanntlich die Gruppe der 168.

Von diesem Standpunkte aus lässt sich auch die Normalform, welche Herr Klein im XV. Annalenbande pag. 266 [Formel 12 daselbst] mittheilt, einfach charakterisiren; sie entspricht der Annahme, dass die ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 nicht blosse Symbole, sondern wirkliche Grössen sind. Man transformirt eine beliebig gegebene Gleichung auf diese Normalform, indem man statt der eben mitgetheilten ϱ_{ik} solche ϱ'_{ik} einführt, für welche die genannte Annahme zutrifft.

Erlangen, Ende Mai 1882.

Ueber das Polvierseit.

Von

A. Brill in München.

Wenn die Elemente eines geometrischen Gebildes sich in Gruppen von übereinstimmenden Eigenschaften anordnen lassen, so besitzt das Gebilde meist auch ein Interesse vom Standpunkte der Algebra. Es ist Hesse's grosses Verdienst, durch Untersuchung längst bekannter geometrischer Figuren auf diesen Zusammenhang die Algebra um wichtige Beispiele zur Gruppentheorie bereichert zu haben. Aber auch umgekehrt lassen algebraische Sätze zuweilen eine geometrische Interpretation zu, die auf Figuren mit solchen Gruppeneigenschaften führt. Auf diesem Wege bin ich zu einer einfachen Configuration in der Ebene gelangt, welche, im Wesentlichen aus dem Polvierseit von Hesse*) und dessen Polarfigur, einem Polviereck, bestehend, mehrfach Beziehungen der erwähnten Art aufweist, die meines Wissens nicht bekannt sind.

Gegeben sei ein Kegelschnitt K und ein Dreiseit in einer Ebene. Sucht man zu dessen Eckpunkten die Polaren in Bezug auf K, so bilden dieselben wieder ein Dreiseit, das bekanntlich zu dem ersten perspectivisch gelegen ist. Zieht man die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte und die Gerade, auf der sich entsprechende Seiten schneiden, so bilden diese $3 + 3 + 3 + 1 = 10$ Geraden ein Zehnseit, dessen Seiten sich mehrfach zu je dreien in einem Punkte schneiden und dessen 45 Eckpunkte mehrfach zu je dreien in einer Geraden liegen**), so zwar, dass sich die Seiten auf 20 verschiedene

*) Crelle's Journal für Mathematik, Band 20, S. 285. Die Bezeichnungen „Polvierseit", „Polviereck" entnehme ich Reye's Geometrie der Lage, 2. Aufl., Bd. 1, S. 191.

**) Diese Figur ist auch im Hexagrammum mysticum nachweisbar, wo die 60 Pascal'schen Linien sich, wie Herr G. Veronese (Accad. dei Lincei 1877) gezeigt hat, zu 6 Zehnseiten der oben angegebenen Art gruppiren lassen, deren dreifache Eckpunkte die 60 Kirkman'schen Punkte sind.

Arten zu Dreiseiten gruppiren lassen, welche, zusammen mit K, *auf gleiche Weise* der Construction zu Grunde gelegt werden können.

In der That: Sind $S_1 S_2 S_3$ die Seiten des gegebenen Dreiseits, $S_{23} S_{31} S_{12}$ die des Dreiseits der Polaren, $S_{14} S_{24} S_{34}$ die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte der beiden Dreiseite (statt S_{ik} werden wir auch S_{ki} schreiben); ist ferner S_4 die Axe der Collineation, auf der sich bezüglich die Geraden $S_1 S_{23}$; $S_2 S_{31}$; $S_3 S_{12}$ schneiden, und die zugleich Polare des Collineationscentrums (des Schnittpunktes von $S_{14} S_{24} S_{34}$) ist, so gehen nach Construction durch einen Punkt je die Seiten:

$$(1) \quad \begin{cases} S_2 S_3 S_{14}(P_{23}); & S_{12} S_{13} S_{14}(P_1); & S_4 S_1 S_{23}(P_{14}); \\ S_3 S_1 S_{24}(P_{31}); & S_{23} S_{21} S_{24}(P_2); & S_4 S_2 S_{31}(P_{24}); \\ S_1 S_2 S_{34}(P_{12}); & S_{31} S_{32} S_{34}(P_3); & S_4 S_3 S_{12}(P_{31}), \end{cases}$$

wo die Klammer die Bezeichnung jedes Schnittpunktes enthält. Dabei bedeutet P_i den Pol der Geraden S_i, P_{ik} den von S_{ik} in Bezug auf K.

Diese Aufzählung, die im Wesentlichen nur den Gang der Construction wiedergiebt, bleibt nun bei folgenden Vertauschungen ungeändert:

1. Wenn man die Indices 23, 31, 12 bezüglich mit 1, 2, 3 vertauscht. Man kann also, statt von dem Dreiseit $S_1 S_2 S_3$, auch von dem $S_{23} S_{31} S_{12}$ ausgehen.

2. Wenn man in allen Indices die Ziffern 1, 2, 3, 4 in irgend einer *anderen* Anordnung benutzt. Man kann also statt von $S_1 S_2 S_3$ auch z. B. von $S_1 S_2 S_4$ ausgehen; oder, indem man eine Vertauschung 2. auf eine 1. folgen lässt, von irgend dreien der vier Seiten $S_{23} S_{31} S_{12} S_4$, u. s. w. Ueberhaupt kann man der Construction irgend drei von den vier Seiten des Zehnseits, die in der folgenden Aufzählung in einer Zeile stehen, zu Grunde legen:

$$(2) \quad \begin{array}{l} S_1\ S_2\ S_3\ S_4, \\ S_{23} S_{31} S_{12} S_4, \\ S_{12} S_{24} S_{41} S_3, \\ S_{41} S_{13} S_{34} S_2, \\ S_{34} S_{42} S_{23} S_1. \end{array}$$

Von den 10 Punkten $P_i P_{ik} (i, k = 1, \cdots, 4)$ kann jeder als ein unendlich kleines Dreieck angesehen werden, in welchem drei von den 45 Eckpunkten des Zehnseits zusammengefallen sind. Dualistisch entsprechend lassen sich die 10 Seiten $S_i S_{ik}$ als dreifache Seiten des von den 10 Punkten $P_i P_{ik}$ gebildeten Zehnecks auffassen. Bei der Aufstellung der folgenden Sätze, die sämmtlich auch in dualistischer Uebertragung ausgesprochen werden können, wollen wir an die Figur des *Zehnecks* anknüpfen.

Wenn man die übrigen $45 - 3 \cdot 10 = 15$ Seiten desselben construirt, so lassen sich dieselben in folgender Weise zu fünf Dreiseiten von merkwürdigen Eigenschaften gruppiren:

$$\begin{array}{lll} \Delta_1 : P_{23}P_{14}; & P_{31}P_{24}; & P_{12}P_{34}; \\ \Delta_2 : P_{12}P_2 ; & P_{13}P_3 ; & P_{14}P_4 ; \\ \Delta_3 : P_{23}P_3 ; & P_{24}P_4 ; & P_{21}P_1 ; \\ \Delta_4 : P_{34}P_4 ; & P_{31}P_1 ; & P_{32}P_2 ; \\ \Delta_5 : P_{41}P_1 ; & P_{42}P_2 ; & P_{43}P_3 ; \end{array}$$

wo $P_{23}P_{14}$ die Verbindungslinie dieser Punkte bezeichnet, u. s. w.

Je zwei der Dreiseite Δ sind perspectivisch gelegen. Denn z. B. die Punkte P_{12}, P_{13}, P_{14}, welche auf der Linie S_1 liegen, (vgl. (1)), sind die Schnittpunkte je einer Seite des Dreiecks Δ_1 mit einer von Δ_2, u. s. w.

Wenn man irgend einem der Dreiseite Δ_i, als Dreieck aufgefasst, einen Kegelschnitt umzubeschreiben verlangt, welcher den gegebenen Kegelschnitt K in zwei Punkten (die auch zusammenfallen können) berührt, so erhält man die vier Lösungen, welche diese Aufgabe zulässt, indem man die Schnittpunkte von K mit den vier Geraden sucht, die in der i^{ten} Zeile der Tabelle (2) verzeichnet sind; also z. B. für das Dreieck Δ_1 die Schnittpunkte von K mit $S_1S_2S_3S_4$. In der That, die Seiten des Dreiecks Δ_1 sind die Diagonalen eines vollständigen Vierseits, dessen Eckpunkte $P_{14}P_{23}$; $P_{24}P_{31}$; $P_{34}P_{12}$ paarweise zu K harmonisch conjugirt sind, indem P_{14} auf der Polaren S_{23} von P_{23} gelegen ist, u. s. w. Dies ist aber gerade die Bedingung (v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, § 369, S. 238) für die Verbindungslinien der vier Paare von Berührungspunkten, welche die einem Dreieck umschriebenen Kegelschnitte mit einem gegebenen K besitzen können.

Da sich aus dem Dreieck der Diagonalen, wenn K bekannt ist, das Vierseit eindeutig bestimmt, so kann man unsere Figur auch aus einem der Dreiecke Δ entstehen lassen.

Die fünf Dreiecke Δ besitzen aber noch eine weitere merkwürdige Beziehung zu dem Kegelschnitt K, die ich als das Ergebniss algebraischer Betrachtungen*) hier ohne Beweis anführen will.

Durch drei feste Punkte in der Ebene kann man bekanntlich sechs Kegelschnitte legen, die einen gegebenen Kegelschnitt K osculiren (in drei consecutiven Punkten schneiden).

Ist nun ein Dreieck Δ_1 und ein Kegelschnitt K beliebig in der Ebene gegeben, so sind die sechs Punkte von K, in welchen die dem Dreieck Δ_1 umschriebenen Kegelschnitte osculiren, zugleich Osculationspunkte für die vier anderen Dreiecken $\Delta_2 \cdots \Delta_5$ umschriebenen Kegel-

*) Diese Annalen, Band XX, S. 351 ff.

schnitte, und zwar lassen sich diese Dreiecke nach dem Vorstehenden aus Δ_1 und K durch folgende lineare Construction ableiten.

Man suche zu Δ_1 das Polvierseit, dessen Diagonalen die Seiten von Δ_1 sind. Die Eckpunkte desselben liegen paarweise auf den Seiten von Δ_1, und sind je die Doppelpunkte der Involution, die sich aus den Paaren der Schnittpunkte mit den beiden anderen Seiten und dem Kegelschnitt K bestimmt. Zu irgend dreien von den Seiten dieses Vierseits suche man die Pole in Bezug auf K und betrachte das aus den Verbindungslinien der drei Pole und aus der nicht benutzten Seite bestehende Vierseit. Die Diagonalen desselben bilden eines der gesuchten Dreiecke.

München, im Juni 1882.

Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze.

Von

Otto Hölder in Tübingen.

1.

$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^{\nu-1}$ sei eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius 1; x denke man sich reell und positiv, < 1, und dem Werth 1 sich beliebig nähernd.

Wenn die Summe $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ für $n = \infty$ einen Grenzwerth hat, so ist bekanntlich:

(I) $$\lim_{x=1} \left\{ \sum_{1}^{\infty} a_\nu x^{\nu-1} \right\} = \sum_{1}^{\infty} a_\nu .$$

Auf der andern Seite kann die Potenzreihe auch einen Grenzwerth haben, wenn die Coefficientenreihe schwankt. Z. B. die Function

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

hat die Grenze $\frac{1}{2}$, während die Reihe der Coefficienten $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ divergirt, und zwar so, dass sie stets zwischen $+1$ und 0 hin- und herschwankt. Es fällt hier sofort auf, dass jener Grenzwerth $\frac{1}{2}$ das arithmetische Mittel ist zwischen den Grössen 0 und 1, zwischen denen die Coefficientensumme schwankt.

Die Verallgemeinerung dieser Bemerkung führt zu einer Kette von Sätzen.

2.

Wenn $\sum_{1}^{n} a_\nu = s_n$ *mit* $n = \infty$ *keinen Grenzwerth hat, aber die Grössen* $s_1, s_2, \cdots$ *einen Durchschnitt* c *haben, so dass*

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = c$$

ist, so hat auch die Function $\sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1}$ *für* $x = 1$ *eine Grenze, und diese ist auch* $= c$*).

Weiter: Wenn kein Durchschnitt der $s_1, s_2, \cdots$ vorhanden ist, setze man:

$$s_n' = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n},$$

$$s_n'' = \frac{s_1' + s_2' + \cdots + s_n'}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n^{(\gamma)} = \frac{s_1^{(\gamma-1)} + s_2^{(\gamma-1)} + \cdots + s_n^{(\gamma-1)}}{n},$$

und nun gilt: *Wenn* $\lim_{n=\infty} s_n^{(\gamma)} = c$, *so ist:*

$$\lim_{x=1} \left\{ \sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1} \right\} = c.$$

Diese Kette von Sätzen gilt auch für complexe Coefficienten.

3.

Eine Verallgemeinerung des Satzes (I) nach einer andern Seite hin, die für reelle Coefficienten gilt, ist folgende:

Wenn die Grösse s_n schwankt, aber zwischen endlichen Grenzen bleibt, so müssen bekanntlich zwei Grössen G_1 und H_1 existiren, $H_1 > G_1$, so dass zu jedem beliebigen Werth ε eine Stelle der Reihe $s_1, s_2, s_3, \cdots$ gefunden werden kann, von der ab für alle folgenden Glieder

$$G_1 - \varepsilon < s_n < H_1 + \varepsilon.$$

Wenn dabei die Grenzen G_1 und H_1 so eng als möglich bestimmt sind, so sind G_1 und H_1 das, was Herr P. du Bois-Reymond die Unbestimmtheitsgrenzen von s_n nennt**). Dann ist stets auch

$$G_1 - \varepsilon' < \sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1} < H_1 + \varepsilon',$$

wobei die Ungleichung für ein beliebig kleines ε' muss gültig gemacht werden können, indem wir x in einer genügend kleinen Strecke bei $x = 1$ annehmen. G_1 und H_1 sind aber dann für die Potenzreihe nicht nothwendig die engsten Grenzen. Es muss dann für ihre

*) Dieser erste Satz ist bereits von Hrn. Frobenius aufgestellt und bewiesen worden: siehe dessen Arbeit „über die Leibnitz'sche Reihe" im 89. Bande von Borchardt's Journal, p. 262–264.

**) Siehe dessen allgem. Functionentheorie, pag. 269.

Schwankung in der Nähe von $x = 1$ noch zwei Grenzen geben, G_2 und H_2, die unter Umständen zusammenfallen, wenn nämlich die Function einen limes hat. Es ist dann:

$$G_1 \leq G_2 \leq H_2 \leq H_1 .$$

Den Fall, dass s_n einen lim hat, kann man hierin auch mit einschliessen;

Dann folgt aus $G_1 = H_1$

$$G_2 = H_2 = G_1 = H_1 .$$

Dieser Satz gilt auch, wenn man s_n' setzt statt s_n; ihn weiter zu verallgemeinern, gestatten wenigstens unsere Beweise nicht.

4.

Wir beweisen im Folgenden die Sätze zusammen und setzen reelle Coefficienten voraus.

Dabei werden wir uns stets der bekannten Formel für partielle Summation bedienen:

$$\text{(II)} \qquad \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu q_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \left\{ (q_\nu - q_{\nu+1}) \sum_{\varrho=1}^{\nu} p_\varrho \right\} + q_{n+1} \sum_{\varrho=1}^{n} p_\varrho .$$

5.

Die Grössen s_n, s_n', s_n'', $\cdots$, die in Art. 2 definirt wurden, genügen den Gleichungen:

$$\frac{s_1^{(\delta)} + s_2^{(\delta)} + \cdots + s_n^{(\delta)}}{n} = s_n^{(\delta+1)}$$

und

$$s_n^{(\delta)} = n s_n^{(\delta+1)} - (n-1)\, s_{n-1}^{(\delta+1)} .$$

Kommt einmal eine Reihe $s_1^{(\gamma)}$, $s_2^{(\gamma)}$, $\cdots$, die zwischen endlichen Grenzen schwankt, so ist

$$\left| s_n^{(\gamma)} \right| < A$$

(dem absoluten Betrag nach) für jedes n; also, da

$$s_n^{\gamma-1} = n s_n^{(\gamma)} - (n-1)\, s_{n-1}^{(\gamma)} ,$$

ist

$$\begin{aligned} \left| s_n^{(\gamma-1)} \right| &< nA + (n-1)A \\ &< 2nA; \end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned} \left| s_n^{(\gamma-2)} \right| &< n \left| s_n^{\gamma-1} \right| + (n-1) \left| s_{n-1}^{(\gamma-1)} \right| \\ &< 2n^2 A + (n-1)\, 2nA \\ &< 4n^2 A \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |s_n| &< 2^\gamma n^\gamma A; \end{aligned}$$

allgemein:

(III) $$|s_n^{\gamma-\delta}| < 2^\delta n^\delta A,$$
$$\delta = 0, 1, 2, \cdots, \gamma.$$

Ferner ist

$$a_n = s_n - s_{n-1},$$

also:

$$|a_n| < 2^{\gamma+1} n^\gamma A,$$

woraus ersichtlich ist, dass unter den gegebenen Bedingungen die Potenzreihe $\sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1}$ für alle $x < 1$ divergirt. Wenn ferner die $s_1, s_2, \cdots$ keine Grenze haben, ist auch klar, dass die Convergenz nicht über 1 hinausgeht.

6.

Nach Formel (II) Art. 4 ist:

$$\sum_1^n a_\nu x^{\nu-1} = \sum_1^n s_\nu (x^{\nu-1} - x^\nu) + x^n s_n,$$

nach (III) Art. 5 ist:

$$\lim_{n=\infty} (x^n s_n) = 0,$$

also:

$$\sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1} = (1-x) \sum_1^\infty s_\nu x^{\nu-1}$$

und, wenn die s_n zwischen endlichen Grenzen bleiben:

$$= (1-x) \left\{ \sum_1^{m-1} s_\nu x^{\nu-1} + [s_m] \sum_m^\infty x^{\nu-1} \right\}$$

$$= (1-x) \sum_1^{m-1} s_\nu x^{\nu-1} + [s_m] x^{m-1};$$

$[s_m]$ ist ein Werth zwischen der oberen und unteren Grenze von $s_m, s_{m+1}, \cdots$

Durch passende Wahl von m macht man

$$G_1 - \varepsilon < [s_m] < H_1 + \varepsilon,$$

wenn G_1 und H_1 die Unbestimmtheitsgrenzen sind für die s_n. Nun kann durch passende Wahl von x, genügend nahe bei 1, der Werth von x^{m-1} so nahe an die 1, und der von $(1-x)\sum_1^m s_\nu x^{\nu-1}$ so nache an die 0 gebracht werden, als man will; so dass dann:

$$G_1 - \varepsilon' < \sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1} < H_1 + \varepsilon';$$

ε' wird mit $1 - x$ ∞ klein. Ist speciell

$$G_1 = H_1 = c,$$

so ist

$$\lim_{x=1} \left\{ \sum_1^\infty a_\nu x^{\nu-1} \right\} = c.$$

7.

Wenn die $s_1, s_2, \cdots$ schwanken, setze man:

$$(1-x) \sum_1^n s_\nu x^{\nu-1} = (1-x) \left\{ \sum_1^n \nu s'_\nu (x^{\nu-1} - x^\nu) + n s'_n x^n \right\}$$

$$= (1-x)^2 \sum_1^\infty \nu s'_\nu x^{\nu-1} \quad \text{(wie oben)}$$

$$= (1-x)^2 \left\{ \sum_1^{m-1} \nu s'_\nu x^{\nu-1} + [s'_m] \sum_m^\infty \nu x^{\nu-1} \right\}$$

$$= (1-x)^2 \left\{ \sum_1^{m-1} \nu s'_\nu x^{\nu-1} - [s'_m] \sum_1^{m-1} \nu x^{\nu-1} + [s'_m] \sum_1^\infty \nu x^{\nu-1} \right\}$$

$$= (1-x)^2 \left\{ \sum_1^{m-1} \nu s'_\nu x^{\nu-1} - [s'_m] \sum_1^{m-1} \nu x^{\nu-1} \right\} + [s'_m].$$

Man kann nun die Schlüsse wiederholen und findet dieselben Sätze für s'_n. Bei weiterer Verwandlung kommt:

$$(1-x)^2 \sum_1^\infty \nu s'_\nu x^{\nu-1} = (1-x)^2 \sum_1^\infty \nu s''_\nu \left\{ \nu x^{\nu-1} - (\nu+1) x^\nu \right\},$$

indem

$$\sum_1^n s'_\nu = n s''_n;$$

dies lässt sich ähnlich behandeln, wenn man es gleich

$$(1-x)^3 \sum_1^\infty \nu (\nu+1) s''_\nu x^{\nu-1} - (1-x)^2 \sum_1^\infty \nu s''_\nu x^{\nu-1}$$

setzt.

8.

Um die in Art. 2 gegebenen Sätze allgemein beweisen zu können, schicken wir einige andere voraus.

Sei:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^\infty \varphi(\nu) s_\nu x^{\nu-1},$$

$\varphi(\nu)$ eine rationale ganze Function r^{ten} Grades mit dem höchsten Coefficienten e, also:

$$\varphi(\nu) = e\nu^r + \cdots$$

Die s_ν sollen wieder im Unendlichen zwischen den Grenzen G_1 und H_1 schwanken, so ist:

$$G_1 \cdot e \cdot r! - \varepsilon < (1-x)^{r+1} f(x) < H_1 \cdot e \cdot r! + \varepsilon,$$

wo wieder ε unendlich klein, wenn x unendlich nahe bei 1.

Speciell ist:

$$G_1 = H_1 = c,$$

$$\lim_{n=\infty} s_n = c,$$

so ist:

$$\lim_{x=1} \{(1-x)^{r+1} f(x)\} = c \cdot e \cdot r!.$$

Beweis:

$$(1-x)^{r+1} f(x)$$

$$= (1-x)^{r+1} \left\{ \sum_1^{m-1} \varphi(\nu) s_\nu x^{\nu-1} + \left[s_m \frac{\varphi(m)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)} \right] \sum_{\nu=m}^{\infty} x^{\nu-1} \frac{d^r (x)^\nu}{dx^r} \right\}$$

$$= (1-x)^{r+1} \left\{ \sum_1^{m-1} \varphi(\nu) s_\nu x^{\nu-1} - x^{r-1} \cdot \left[s_m \frac{\varphi(m)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)} \right] \sum_1^{m-1} \frac{d^r (x)^\nu}{dx^r} \right\}$$

$$+ \left[s_m \frac{\varphi(m)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)} \right] x^{r-1} \cdot r!,$$

wobei

$$\lim \frac{\varphi(m)}{m(m-1)\cdots(m-r+1)} = e.$$

Wir machen dieselben Schlüsse wie oben und erhalten so den behaupteten Satz.

9.

Ist wieder:

$$\frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n} = s_n',$$

$$\frac{s_1' + s_2' + \cdots + s_n'}{n} = s_n'',$$

. . . . . .

so ist:

$$\sum_1^\infty \varphi(\nu) s_\nu^{(\vartheta)} x^{\nu-1} = \sum_1^\infty \nu s_\nu^{(\vartheta+1)} \{\varphi(\nu) x^{\nu-1} - \varphi(\nu+1) x^\nu\},$$

vorausgesetzt, dass die s, die in Art. 5 erwähnte Bedingung erfüllen. Also:

$$\sum_1^\infty \varphi(\nu) s_\nu^{(\delta)} x^{\nu-1} = (1-x) \sum_1^\infty \nu s_\nu^{(\delta+1)} \varphi(\nu) x^{\nu-1}$$

$$- \sum_1^\infty \nu s_\nu^{(\delta+1)} \{ \varphi(\nu+1) - \varphi(\nu) \} x^\nu .$$

Aber $\varphi(\nu)$ soll, wie oben, vom r^{ten} Grade sein; $\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu)$ ist vom $r-1^{\text{ten}}$, und zwar

$$\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu) = c \cdot r \cdot \nu^{r-1} + \cdots,$$

wenn

$$\varphi(\nu) = e\nu^r + \cdots$$

10.

Sei nun:

$$F(x) = \sum_1^\infty \varphi(\nu) s_\nu x^{\nu-1}, \ \varphi \text{ (wie oben)};$$

aber die s_ν mögen schwanken, und es sei

$$\lim_{\nu=\infty} s_\nu^{(\gamma)} = c,$$

dann folgt zunächst aus dem in Art. 8 bewiesenen Satz:

$$\lim_{x=1} \left\{ (1-x)^{r+1} \sum_1^\infty \varphi(\nu) s_\nu^{(\gamma)} x^{\nu-1} \right\} = c \cdot e \cdot r! .$$

Aber nach Art. 9 ist

$$\sum_1^\infty \varphi(\nu) s_\nu^{(\gamma-1)} x^{\nu-1} = (1-x) \sum_1^\infty s_\nu^{(\gamma)} \nu \varphi(\nu) x^{\nu-1}$$

$$- x \cdot \sum_1^\infty s_\nu^{(\gamma)} \nu \big(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu) \big) x^{\nu-1},$$

und es ist vermöge Art. 8 und 9, weil

$$\nu \varphi(\nu) = e\nu^{r+1} + \cdots$$

und

$$\nu \big(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu) \big) = e \cdot r \cdot \nu^r + \cdots,$$

$$\lim_{x=1} \left\{ (1-x)^{r+2} \sum_1^\infty s_\nu^{(\gamma)} \nu \varphi(\nu) x^{\nu-1} \right\} = e \cdot c \cdot (r+1)!;$$

und

$$\lim_{x=1} \left\{ (1-x)^{r+1} \sum_1^\infty s_\nu^{(\gamma)} \nu \big(\varphi(\nu+1) - \varphi(\nu) \big) x^{\nu-1} \right\} = e \cdot c \cdot r \cdot r! .$$

Also:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)^{r+1}\sum_{1}^{\infty}\varphi(\nu)s_\nu^{(\gamma-1)}x^{\nu-1}\right\}=c\cdot c\cdot\{(r+1)!-r\cdot r!\}=c\cdot c\cdot r!;$$

ebenso beweist man nun, dass

$$c\cdot c\cdot r!=\lim_{x=1}\left\{(1-x)^{r+1}\sum_{1}^{\infty}\varphi(\nu)s_\nu^{(\gamma-2)}x^{\nu-1}\right\}$$

u. s. f.

Also ist stets:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)^{r+1}\sum_{1}^{\infty}\varphi(\nu)s_\nu x^{\nu-1}\right\}=c\cdot c\cdot r!,$$

wenn

$$\lim_{\nu=\infty}s_\nu^{(\gamma)}=c$$

und

$$\varphi(\nu)=c\cdot\nu^r+\cdots.$$

11.

Specialisiren wir den Satz des vorigen Artikels, indem wir $\varphi(\nu)=1$, $r=0$ setzen, so kommt:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)\sum_{1}^{\infty}s_\nu x^{\nu-1}\right\}=c.$$

Definiren wir die s_ν hierin wieder als Summen der a_ν, so kommt:

$$\lim_{x=1}\left\{\sum_{1}^{\infty}a_\nu x^{\nu-1}\right\}=c,$$

der Satz des Art. 2 in seiner allgemeinsten Form. Setzen wir:

$$P(x)=\sum_{1}^{\infty}s_\nu x^{\nu-1},$$

$$\lim_{\nu=\infty}s_\nu^{(\gamma)}=c,$$

$$\varphi(\nu)=(\nu-1)\cdots(\nu-r+1)(\nu-r),$$

so kommt:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)^{r+1}\frac{d^rP(x)}{dx^r}\right\}=c\cdot r!$$

12.

Der Satz:

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)\sum_{1}^{\infty}s_\nu x^{\nu-1}\right\}=c,$$

wenn

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n}=c$$

zeigt eine auffallende Analogie mit dem Satz von Dirichlet:

$$\lim_{w=0}\left\{w\sum_{1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}\right\}=c,$$

wenn

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=c,$$

der in der Zahlentheorie eine Rolle spielt. Man kann also vermuthen, dass auch dieser einer Verallgemeinerung fähig sei.

13.

Für unendlich grosse n sei wieder

$$G_1-\varepsilon<a_n<H_1+\varepsilon,$$

so ist für unendlich kleine w (positiv reell)

$$G_1-\varepsilon'<w\sum_{1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}<H_1+\varepsilon'.$$

Beweis: Zunächst ist die Convergenz gesichert, wenn die a zwischen endlichen Grenzen bleiben. Ferner ist, nach bekannter Methode

$$\frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}<\int_{\nu}^{\nu+1}\frac{dx}{x^{1+w}}<\frac{1}{\nu^{1+w}},$$

$$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}<\int_{n}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+w}}<\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}$$

$$-\frac{1}{n^{1+w}}+\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}<\frac{1}{w\,n^w}<\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}},$$

woraus folgt:

$$\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}=\frac{1}{w\,n^w}+\frac{\Theta}{n^{1+w}},$$

wo

$$0<\Theta<1$$

ist. Also:

$$\lim_{w=0}\left\{w\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}\right\}=1.$$

Nun ist:

$$w\sum_{1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}=w\sum_{1}^{m-1}\frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}+[a_m]\,w\sum_{m}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}},$$

woraus die Behauptung folgt.

14.

Die a seien unter einer endlichen Grenze; und es sei auf irgend eine Weise bewiesen, dass zu jeden ε ein δ gefunden werden kann, so dass für alle $w < \delta$

$$G - \varepsilon < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} < H + \varepsilon.$$

Die G und H sind feste Grössen, aber nicht nothwendig die Unbestimmtheitsgrenzen der a.

Dann gilt auch

$$G - \varepsilon' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} < H + \varepsilon'$$

wo ε' unendlich klein für unendlich kleine w, wofern $\varphi(\nu, w)$ folgende Bedingungen erfüllt:

Für jeden ganzzahligen Werth von ν ($\nu = 1, 2, 3 \cdots$) und für jeden reellen positiven Werth von w unter einer gewissen Grenze sei $\varphi(\nu, w)$ definirt; für jedes specielle ν sei

$$\lim_{w=0} \{w \varphi(\nu, w)\} = 0.$$

Wenn ferner $\frac{1}{\nu}$ und w unendlich klein werden (unabhängig von einander), so soll φ dem Werth 1 sich unbegrenzt nähern:

$$\lim_{\substack{\nu=\infty \\ w=0}} \varphi(\nu, w) = 1.$$

Beweis:

$$w \sum_1^\infty \frac{a_\nu \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} = w \sum_1^{m-1} \frac{a_\nu \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} + w \sum_m^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} + w \sum_m^\infty \frac{a_\nu (\varphi(\nu, w) - 1)}{\nu^{1+w}}$$

$$= w \left\{ \sum_1^{m-1} \frac{a_\nu \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} - \sum_1^{m-1} \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} \right\} + w \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} + \left[a_m (\varphi(m, w) - 1) \right] w \sum_m^\infty \frac{1}{\nu^{1+w}}.$$

Man wählt M und δ so, dass für

$$\nu > M,$$
$$w < \delta$$

$\varphi(\nu, w) - 1$ so klein ist, als man will; die a sollen unter einer Grenze sein. Man setzt $m > M$ fest und wählt dann w so, dass

$w\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{1+w}}$ genügend nahe an 1, $w\sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}$ zwischen $G-\varepsilon$ und $H+\varepsilon$ fällt, und der erste Theil genügend klein wird. Dann ergiebt sich der behauptete Satz.

15.

Wir führen die Definitionen ein:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a_n',$$

$$\frac{a_1'+a_2'+\cdots+a_n'}{n}=a_n'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

so ist, wenn a_n' unter einer endlichen Grenze bleibt, auch a_n'', a_n''', $\cdots$ unter derselben; aber nicht die a_n im Allgemeinen. Doch convergirt in diesem Fall stets $\sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}$ und es ist

$$\sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\delta)}}{\nu^{1+w}}=\sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\delta+1)}}{\nu^{1+w}}\,\varphi(\nu,w),$$

wo φ die im vorhergehenden Artikel bezeichneten Eigenschaften hat.

Beweis: Durch partielle Summation erhält man:

$$\sum_1^n \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}=\sum_{\nu=1}^n \left\{\nu a_\nu'\left(\frac{1}{\nu^{1+w}}-\frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}\right)\right\}+\frac{na_n'}{(n+1)^{1+w}};$$

aber

$$\nu\left\{\frac{1}{\nu^{1+w}}-\frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}\right\}=\frac{1}{\nu^w}\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{1+w}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\nu^w}\left\{1-1+\frac{1+w}{\nu}-\frac{(1+w)(2+w)}{1\cdot 2}\frac{1}{\nu^2}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{\nu^{1+w}}\left\{1+w-\frac{(1+w)(2+w)}{1\cdot 2}\frac{1}{\nu}+\cdots\right\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer hat die Eigenschaft von $\varphi(\nu,w)$, er lässt sich sogar für kleine $\frac{1}{\nu}$, w nach diesen Grössen entwickeln. Hätten wir nämlich $\nu\left(\frac{1}{\nu^{1+w}}-\frac{\nu}{(\nu-1)^{1+w}}\right)$ entwickelt statt

$$\nu\left\{\frac{1}{\nu^{1+w}}-\frac{1}{(\nu+1)^{1+w}}\right\},$$

so hätten wir dieselben Glieder erhalten in der Entwickelung nach $\frac{1}{\nu}$, nur alle mit demselben Zeichen. Jeder Coefficient wird dann entwickelt eine ganze Function von w mit gleichzeichigen Coefficienten, wodurch jede Umstellung der Glieder gerechtfertigt ist. Man kann desshalb die Reihe auch nach w und $\frac{1}{\nu}$ ordnen:

$$= 1 + w - \frac{1}{\nu} + \cdots .$$

Dass die obige Bedingung für jedes specielle ν erfüllt ist, ist evident.

Also:

$$\nu \left\{ \frac{1}{\nu^{1+w}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+w}} \right\} = \frac{\varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}},$$

ferner

$$\lim_{n=\infty} \frac{n a_n'}{(n+1)^{1+w}} = 0, \quad w > 0,$$

da a_n' unter einer festen Grenze, und w bei diesem Grenzübergang als constant zu betrachten ist.

Hieraus und aus

$$\sum_1^n \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} = \sum_1^n \nu a_\nu' \left(\frac{1}{\nu^{1+w}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+w}} \right) + \frac{n a_n'}{(n+1)^{1+w}}$$

folgt die Convergenz von $\sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}}$

und die Gleichung

$$\sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} = \sum_1^\infty \frac{a_\nu' \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}}.$$

Ebenso

$$\sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\delta+1)}}{\nu^{1+w}} \varphi(\nu, w) = \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\delta)}}{\nu^{1+w}}.$$

$\varphi(\nu, w)$ bedeutet hier genau dieselbe Function.

16.

Jetzt können wir den Satz in voller Allgemeinheit beweisen.

Sei

$$G_1 - \varepsilon < a_n^{(\gamma)} < H_1 + \varepsilon,$$

ε und n wie oben, so ist nach Art. 13.

$$G_1 - \varepsilon' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma)}}{\nu^{1+w}} < H_1 + \varepsilon',$$

ε' unendlich klein mit unendlich kleinem w, also nach Art. 14.

$$G_1 - \varepsilon'' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma)} \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} < H_1 + \varepsilon''.$$

aber nach Art. 15.

$$\sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma)} \varphi(\nu, w)}{\nu^{1+w}} = \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma-1)}}{\nu^{1+w}},$$

also auch

$$G_1 - \varepsilon'' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu^{(\gamma-1)}}{\nu^{1+w}} < H_1 + \varepsilon''$$

u. s. f.

Man hat also allgemein: Wenn

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a_n', \\ \dfrac{a_1' + a_2' + \cdots + a_n'}{n} = a_n'', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

und wenn a_n' endlich bleibt, und

$$G_1 - \varepsilon < a_n^{(\gamma)} < H_1 + \varepsilon,$$

ε unendlich klein mit unendlich grossem n, so kann auch zu jedem ε' eine Grenze der w gefunden werden, derart, dass für alle w unter dieser Grenze

$$G_1 - \varepsilon' < w \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} < H_1 + \varepsilon'.$$

Speciell: Für

$$G_1 = H_1 = c,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} a_n^{(\gamma)} = c$$

kommt

$$\lim_{w=0} \left\{ w \sum_1^\infty \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} \right\} = c.$$

Der letzte Satz gilt auch für complexe a_ν. Dann muss mod. a_ν' unter einer festen Grenze bleiben. Der Mittelwerthssatz ist direct dann nicht anwendbar; man setzt (in Art. 13.):

$$a_\nu = c + \delta_\nu, \qquad \lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0,$$

$$w\sum_{1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} = wc\sum_{1}^{m}\frac{1}{\nu^{1+w}} + w\sum_{1}^{m-1}\frac{\delta_\nu}{\nu^{1+w}} + w\sum_{m}^{\infty}\frac{\delta_\nu}{\nu^{1+w}},$$

$$\sum_{m}^{\infty}\frac{\delta_\nu}{\nu^{1+w}} \leq \sum_{m}^{\infty}\frac{\text{mod. }\delta_\nu}{\nu^{1+w}} = [\text{mod. }\delta_m]\sum_{m}^{\infty}\frac{1}{\nu^{1+w}}.$$

u. s. f.

Beispiele.

17.

Wir haben oben schon das einfachste Beispiel erwähnt:

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Die Ableitung dieser Reihe

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \cdots$$

giebt ein Beispiel für den Fall, dass auch die s_n' schwanken, u s_n'' einen Grenzwerth haben, denn:

$$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \cdots, = -1, +1, -2, +2, -3,$$

$$s_1', s_2', s_3', s_4', s_5', \cdots, = -1, 0, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{3}{5},$$

allgemein

$$s_{2n}' = 0,$$

$$s_{2n+1}' = \frac{-(n+1)}{2n+1}.$$

Also

$$\lim_{n=\infty} s_n'' = -\frac{1}{4};$$

es stimmt also mit der allgemeinen Theorie.

18.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\sin(n\alpha)\cdot x^n\} = R\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{n\alpha i}x^n}{i}\right],$$

(R bedeutet den reellen Theil).

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{n\alpha i}x^n}{i} = \frac{e^{\alpha i}\cdot x}{i(1-e^{\alpha i}\cdot x)},$$

$$R\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{n\alpha i}x^n}{i}\right] = R\left[\frac{e^{\alpha i}x(1-e^{-\alpha i}x)}{i(1-2(\cos\alpha)x+x^2)}\right]$$

$$= \frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2},$$

$$\lim_{x=1} \frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \frac{\sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$$

Aber

$$s_n = \sum_1^n a_\nu = \sum_0^{n-1} \sin \nu \alpha = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{2n-1}{2} \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$s_n' = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{2n \sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{\nu=1}^{\nu=n}{}' \cos \frac{2\nu - 1}{2} \alpha;$$

die Summe wird wieder endlich, desshalb

$$\lim_{n=\infty} s_n' = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}.$$

Tübingen, März 1882.

Nachträgliche Berichtigung.

In der Arbeit im XX. Band dieses Journals S. 138 sind unter die Beispiele im Art. VI Functionen gekommen wie $\operatorname{tg} \frac{1}{x}$ und $\operatorname{cotg} \frac{1}{x}$, die in unendlicher Nähe des Nullpunktes Pole besitzen. Solche Functionen waren ursprünglich von der Betrachtung ausgeschlossen; doch gilt auch für sie der betreffende Satz, und der Beweis bleibt im Wesentlichen derselbe.

Ueber periodische Functionen zweiter Gattung.

Von

Otto Rausenberger in Frankfurt a. M.

An die periodischen Functionen im weiteren Sinne, wie ich dieselben in meiner Arbeit im 18. Band der Annalen definirt habe, schliesst sich eng eine weitere Gruppe von Functionen an, welche ich als *periodische Functionen zweiter Gattung* bezeichnen will. Dieselben genügen einer oder mehreren Functionalgleichungen der Form

$$F[\varphi_1(x)] = \psi_1[F(x)],$$

worin $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ im allgemeinsten Falle *algebraische*, in dem besonderen jedoch, den wir in der Folge allein berücksichtigen wollen, *lineare* Functionen sind. Ich beabsichtige nun im Folgenden dieselbe Frage in Bezug auf die eben eingeführten Functionen zu beantworten, welche ich für periodische Transcendenten der ersten Gattung in der citirten Abhandlung gelöst habe: *Welche eindeutigen, einfach oder mehrfach periodischen Functionen zweiter Gattung mit einer endlichen Anzahl von wesentlichen Discontinuitätspunkten sind möglich?* Obgleich wir hierbei zu keinen wesentlich neuen Transcendenten gelangen werden, halte ich doch die Absolvirung dieser Frage schon deshalb für wichtig, weil wir erst nach derselben an die Untersuchung der höheren periodischen Transcendenten zweiter Gattung, welche *unendlich viele* wesentliche Discontinuitätspunkte besitzen, herantreten können.

§ 1.

Einfach periodische Functionen zweiter Gattung.

1. Man sieht, dass die Function $\varphi_1(x)$ denselben Umformungen und Reductionen unterworfen werden kann, wie bei den periodischen Functionen erster Gattung; aber auch die Function $\psi_1(x)$ ist derselben Transformationen fähig; denn setzen wir $\chi_1 F(x) = F_1(x)$, so haben wir

$$F_1[\varphi_1(x)] = \chi_1 F[\varphi_1(x)] = \chi_1 \psi_1 F(x) + \chi_1 \psi_1 \chi_{-1} F_1(x).$$

2. Durch Anwendung dieser Umformungen lassen sich alle ein-

fach periodischen Functionen $F(x)$ zweiter Gattung auf eine der folgenden 4 Normalformen zurückführen:

(1) $F(x+1) = F(x) + 1,$

(2) $F(x+1) = qF(x),$

(3) $F(px) = F(x) + 1,$

(4) $F(px) = qF(x).$

Hierbei dürfen wir voraussetzen, dass mod. $p < 1$ ist.

3. Eine Function der ersten Art ist $f(x) = x$; bezeichnet ferner $F(x)$ eine beliebige Function dieser Classe, so haben wir

$$F(x+1) - f(x+1) = F(x) - f(x),$$

d. h. $F(x) - f(x)$ ist eine additiv periodische Function erster Gattung. Daher ist $F(x)$ im allgemeinsten Falle eine beliebige eindeutige Function mit der additiven Periode 1, vermehrt um x.

4. Der Gleichung

$$F(x+1) = qF(x)$$

genügt

$$f(x) = e^{x \log q},$$

und wir haben

$$\frac{F(x+1)}{f(x+1)} = \frac{F(x)}{f(x)},$$

sodass sich $F(x)$ darstellt als eine eindeutige Function mit der additiven Periode 1, multiplicirt mit $e^{x \log q}$.

5. Die Functionen, welche die Gleichung

$$F(px) = F(x) + 1$$

befriedigen, sind im Wesentlichen aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannt. Setzen wir

$$\eta(p, x) = \sum_0^\infty p^{n^2} \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right),$$

so befriedigt

$$f(x) = -x \frac{\eta'(p, x)}{\eta(p, x)}$$

die Relation

$$f(p^2 x) = f(x) + 1,$$

und es ist sehr leicht, hieraus mit Hülfe der multiplicatorisch periodischen Functionen erster Gattung die allgemeinsten Transcendenten der gesuchten Art herzuleiten. Aus der Form derselben ist ersichtlich, dass sie für $x = 0$ und $x = \infty$ wesentlich unstetig werden; haben sie noch mehr wesentliche Unstetigkeitspunkte, so besitzen sie deren unendlich viele.

6. Die Gleichung

$$F(px) = qF(x)$$

ist durch algebraische Functionen nur unter ganz beschränkten Be-

dingungen zu befriedigen, wie aus einer Untersuchung hervorgeht, welche mit der von § 5, 4 meiner früheren Abhandlung identisch ist. Wenn nämlich $q = p^{\frac{m}{n}}$ ist, so genügt $F(x) = x^{\frac{m}{n}}$. In allen andern Fällen handelt es sich um transcendente Functionen, welche entweder 2 oder unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte besitzen und die sich mit Leichtigkeit auf die Transcendenten zurückführen lassen, welche Herr Hermite in einer Reihe von Arbeiten in den Comptes Rendus, 1877, II (Sur quelques applications des fonctions elliptiques) behandelt hat.

$$f(x) = \frac{\eta\left(p, \frac{x}{q}\right)}{\eta(p, x)}$$

genügt der Gleichung

$$f(p^2 x) = q f(x)$$

und es hat wieder keine Schwierigkeit, die übrigen Functionen dieser Art auf die vorliegende zurückzuführen.

§ 2.

Functionaltheoreme.

Für die beiden zuletzt gefundenen Functionenclassen lassen sich sehr einfache Functionaltheoreme aufstellen. Ist nämlich

$$f(px) = f(x + 1),$$

so besitzt

$$f(xy) - f(x) - f(y)$$

sowohl als Function von x, wie auch als solche von y die multiplicatorische Periode p, lässt sich mithin durch multiplicatorisch periodische Functionen von x und y ausdrücken.

Haben wir dagegen

$$f(p\,x) = q f(x),$$

so gilt das Gleiche für

$$\frac{f(xy)}{f(x) f(y)}.$$

Man erkennt sehr leicht, dass die Additionstheoreme der elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung sich auf specielle Fälle dieser Functionaltheoreme zurückführen lassen.

§ 3.

Functionen zweiter Gattung mit mehreren Perioden.

1. Soll eine Function $F(x)$ 2 oder mehreren Gleichungen

$$F[\xi_1(x)] = \eta_1[F(x)],$$
$$F[\xi_1'(x)] = \eta_1'[F(x)]$$

u. s. w.

gleichzeitig genügen und ξ_1 und ξ_1' sind vertauschbar, so erkennt man sofort, dass η_1 und η_1' dieselbe Eigenschaft besitzen müssen; denn es muss

$$F[\xi_1\xi_1'(x)] = F[\xi_1'\xi_1(x)],$$

also

$$\eta_1'\eta_1 F(x) = \eta_1\eta_1' F(x)$$

oder

$$\eta_1'\eta_1(x) = \eta_1\eta_1'(x)$$

sein. Die hiernach möglichen Combinationen werden im Folgenden discutirt.

a. $F(x+n) = F(x),$
$F(x+n_1) = m_1 + F(x).$*)

Diese in der Theorie der elliptischen Functionen auftretenden Transcendenten lassen sich aus den Functionen

$$f(px) = m_1 + f(x)$$

herleiten, wenn man $e^{x\frac{\log p}{n_1}}$ für x einsetzt und $p = e^{\frac{2\pi i n_1}{n}}$ wählt. Der Fall, dass $\frac{n_1}{n}$ reell ist, muss ausgeschlossen werden.

b. $F(x+n) = F(x),$
$F(x+n_1) = F(x),$
$F(x+n_2) = m_2 + F(x).$

Nicht möglich, wenn zwischen n, n_1, n_2 keine lineare, ganzzahlige Beziehung existirt, weil $F(x)$ als Argument in eine Function mit der additiven Periode m_2 eingesetzt eine dreifach periodische Function hervorbringen würde.

c. $F(x+n) = m + F(x),$
$F(x+n_1) = m_1 + F(x).$

Bezeichnet $f(x)$ eine Function mit der additiven Periode n, so muss $F(x)$ nach Früheren die Form haben

$$F(x) = \frac{mx}{n} + f(x);$$

weiter folgt aus der zweiten Gleichung

$$\frac{mx}{n} + \frac{mn_1}{n} + f(x+n_1) = \frac{mx}{n} + f(x) + m_1$$

oder

$$f(x+n_1) = m_1 - \frac{mn_1}{n} + f(x),$$

d. h. $f(x)$ muss eine Function der Art (a) oder, wenn $m_1 - \frac{mn_1}{n} = 0$ ist, eine doppeltperiodische Function sein.

*) Der Symmetrie wegen führe ich nicht alle Reductionen soweit durch, als dies überhaupt möglich wäre.

d. $$F(x+n) = F(x),$$
$$F(x+n_1) = m_1 + F(x),$$
$$F(x+n_2) = m_2 + F(x).$$

Ist ohne lineare, ganzzahlige Beziehung zwischen n, n_1, n_2 nicht möglich, weil durch Einsetzung von $F(x)$ in eine Function mit den additiven Perioden m_1 und m_2 eine dreifach periodische Function hervorgebracht würde. Dieser Schluss bleibt auch richtig, wenn $\frac{m_1}{m_2}$ eine reelle, rationale Grösse ist; ist dasselbe irrational, so sind Näherungsschlüsse anwendbar.

e. $$F(x+n) = m + F(x),$$
$$F(x+n_1) = m_1 + F(x),$$
$$F(x+n_2) = m_2 + F(x).$$

Hier müsste wieder

$$F(x) = \frac{mx}{n} + f(x)$$

sein und $f(x)$ den 3 Gleichungen

$$f(x+n) = f(x),$$
$$f(x+n_1) = m_1 - \frac{mn_1}{n} + f(x),$$
$$f(x+n_2) = m_2 - \frac{mn_2}{n} + f(x)$$

genügen, was nach (d) nicht möglich ist, wenn nicht gleichzeitig

$$m_1 - \frac{mn_1}{n} = 0,$$
$$m_2 - \frac{mn_2}{n} = 0$$

oder

$$m : n = m_1 : n_1 = m_2 : n_2$$

wird, weil alsdann eine Constante die Stelle von $f(x)$ vertreten könnte. In der That genügt $\frac{m}{n}x + c$ unendlich vielen Beziehungen dieser Art.

f. $$F(x+n) = F(x),$$
$$F(x+n_1) = q_1 F(x).$$

Zurückführbar auf die Functionen

$$f(px) = q_1 f(x);$$

Bedingungen wie bei (a).

g. $$F(x+n) = q\ F(x),$$
$$F(x+n_1) = q_1 F(x).$$

Setzen wir $F(x) = c^{\frac{x \log q}{n}} f(x)$, wobei $f(x)$ wieder eine Function mit

der additiven Periode n bezeichnen möge, so ist nach Früherem der ersten Gleichung in der allgemeinsten Weise Genüge geleistet; aus der zweiten wird

$$f(x+n_1) = q_1 e^{-\frac{n_1 \log q}{n}} f(x),$$

d. h. $f(x)$ ist eine Function der vorigen Art.

Die Transcendenten (f) und (g) wurden bereits von Herrn Hermite in den oben citirten Abhandlungen aufgestellt und entwickelt.

h. $$\begin{aligned} F(x+n) &= F(x), \\ F(x+n_1) &= F(x), \\ F(x+n_2) &= q_2 F(x). \end{aligned}$$

Würde in eine Function mit der multiplicatorischen Periode $q_2 (\text{mod. } q_2 \lesseqgtr 1)$ eingesetzt eine dreifach periodische Function hervorbringen; Der Fall mod. $q_2 = 1$ ist leicht zu erledigen.

i. $$\begin{aligned} F(x+n) &= F(x), \\ F(x+n_1) &= q_1 F(x), \\ F(x+n_2) &= q_2 F(x). \end{aligned}$$

Die Unmöglichkeit solcher Functionen folgt aus (g) und (h).

k. $$\begin{aligned} F(x+n) &= q\ F(x), \\ F(x+n_1) &= q_1 F(x), \\ F(x+n_2) &= q_2 F(x). \end{aligned}$$

Ebenso nach (g) und (i).

l. $$\begin{aligned} F(p\ x) &= F(x), \\ F(p_1 x) &= m_1 + F(x). \end{aligned}$$

m. $$\begin{aligned} F(p\ x) &= m\ + F(x), \\ F(p_1 x) &= m_1 + F(x). \end{aligned}$$

n. $$\begin{aligned} F(p\ x) &= F(x), \\ F(p_1 x) &= q_1 F(x). \end{aligned}$$

o. $$\begin{aligned} F(p\ x) &= q F(x), \\ F(p_1 x) &= q_1 F(x). \end{aligned}$$

Die 4 letzten Fälle werden durch die Substitution $x = e^{w \log p}$ auf (b), (d), (h) und (i) zurückgeführt und sind daher unmöglich.

2. Sind $\xi_1(x)$ und $\xi_1'(x)$ nicht vertauschbar, so lassen sich ganz analoge Untersuchungen anstellen, wie in § 8, 5 meiner Abhandlung über allgemeine Periodicität. Wir gelangen zu dem Resultat, *dass alle überhaupt existenzfähigen Functionen zweiter Gattung mit mehreren*

nicht vertauschbaren Perioden — ganz unwesentliche Ausnahmefälle abgerechnet — unendlich viele wesentliche Discontinuitätspunkte besitzen müssen.

Die Theorie der letztbezeichneten Functionen schliesst sich eng an diejenige der entsprechenden Functionen erster Gattung an.

Zum Schlusse gestatte ich mir noch zu bemerken, dass man die Bezeichnung *periodische Functionen dritter Gattung* für Functionen $F(x)$ verwenden könnte, welche einer Gleichung

$$F[\varphi_1(x)] = g[x, F(x)]$$

genügen, worin g eine in x und $F(x)$ algebraische Function bezeichnet. Die Gammafunctionen sowie mannichfache andere bereits bekannte Transcendenten würden hierher zu rechnen sein; übrigens liegt es nicht in meiner Absicht, auf dieselben an dieser Stelle hier weiter einzugehen.

Frankfurt a. M., Mai 1882.

Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades.

Von

A. v. Braunmühl in München.

(Mit einer lithogr. Tafel.)

Einleitung.

Nachdem es Jacobi*) im Jahre 1838 gelungen war, das Problem der geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoide auf Quadraturen zurückzuführen, wodurch dasselbe zugleich für alle Flächen zweiten Grades gelöst erschien, wurde das gleiche Resultat theils geometrisch, theils algebraisch von Joachimsthal**), O. Bonnet***), Liouville†), Chasles††), Cayley†††) und anderen begründet. Die weitere Behandlung der Quadraturen erfolgte jedoch erst 1861 durch Weierstrass*†), welcher auf die Summe der beiden Abel'schen Integrale erster Gattung ($p = 2$), die in der Gleichung der geodätischen Linien auftreten, das Jacobi'sche Umkehrproblem anwandte und dadurch elegante Formeln erhielt, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoide durch hyperelliptische ϑ-Functionen von einem variabeln Parameter abhängig machen. Diese Formeln wurden ohne Ableitung mitgetheilt, und Weierstrass bemerkt, dass sich für ein dreiaxiges Ellipsoid, das wenig von einem Sphäroid verschieden ist, rasch convergente Reihen zur Berechnung dieser Coordinaten angeben liessen, die er in einem spätern Aufsatze mitzutheilen verspricht. Meines Wissens ist jedoch die Publication dieser Formeln unterblieben.

*) Am 28. December 1838 theilte Jacobi seine Lösung der Pariser Akademie mit. Vergl. Journal von Crelle, Bd. 19, pag. 309. — Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch, pag. 214.

**) Journal von Crelle, Bd. 26, pag. 155.

***) Journal de l'école polytechnique t. 19, pag. 137.

†) Journal des Mathématiques, t. 9, Serie I, pag. 401—409 und t. 11, pag. 21.

††) Journal des Mathématiques, t. 11, Serie I, pag. 5, 105, 111.

†††) Proceedings of the London mathematical Society, Vol. IV, pag. 191—211.

*†) Monatsberichte der Berliner Akademie, 1861, pag. 986—997.

Ich stellte mir nun im Folgenden die Aufgabe, die Weierstrass'schen Formeln für eine allgemeine geodätische Linie abzuleiten (§ 1 und 2), die dabei auftretenden Constanten in eine für die numerische Berechnung bequemere Form zu bringen (§ 3) und überhaupt das Problem soweit zu fördern, dass es für eine Berechnung unmittelbar tauglich sei. In § 4 theile ich dann die Resultate einer solchen numerischen Rechnung mit, da es mir nicht uninteressant erscheint, die Brauchbarkeit der *hyperelliptischen Functionen* zu diesem Zwecke einmal an einem Beispiele geprüft zu sehen, zumal da Cayley bereits in zwei grösseren Arbeiten die numerische Bestimmung einer allgemeinen geodätischen Linie auf dem einschaligen Hyperboloide*) und einer Linie durch die Kreispunkte auf dem dreiaxigen Ellipsoide**) mit directer *Berechnung der Quadraturen* ausführte.

Durch die letztere Arbeit veranlasst theile ich in § 5 Formeln mit, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie durch die Kreispunkte auf dem Ellipsoide direct von einem Parameter abhängig machen. Eine numerische Rechnung wurde nicht beigefügt, da ausser Cayley auch Rohn***) bereits eine solche bewerkstelligt hat.

Die folgenden Paragraphen besprechen den Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung. Ich greife nämlich auf einen frühern Aufsatz von mir zurück†). Anschliessend an die Bemerkung von Jacobi††), dass im Allgemeinen jede geodätische Linie nur bis zu einer gewissen Grenze die Eigenschaft hat, kürzeste Linie zu sein, und in Folge dessen ein Büschel geodätischer Linien eine Enveloppe besitzen wird, untersuchte ich damals die Gestalten dieser Enveloppen auf den Rotationsflächen zweiten Grades. Diese Untersuchung wird nun auf das dreiaxige Ellipsoid ausgedehnt. In § 6 werden die Integralgleichungen einer Enveloppe aufgestellt, und Grenzen angegeben, zwischen denen der Berührungspunkt einer beliebigen Linie mit ihrer Enveloppe liegt. In § 7 wird die Lage dieser Berührungspunkte für specielle geodätische Linien discutirt, zu diesem Zwecke ein Hülfssatz bewiesen, die Definition der halben Periode einer geodätischen Linie eingeführt und die Gestalt einer Enveloppe ins Auge gefasst. Zum Schlusse wird das gesammte Resultat in einem Satze vereinigt. § 8 enthält dann die Folgerungen, die sich aus diesem Satze in Bezug auf die drei Hauptschnitte ergeben, während § 9 die Mittel angiebt, Punkte der Enveloppe durch hyperelliptische Functionen zu berechnen.

---

*) Proceedings of the London mathematical Society, Vol. IV, p. 371—380.

**) Memoirs of the Royal Astronomical Society, Part. II, Vol. XXXIX, p. 44.

***) Mathematische Modelle, München, Serie I, Nr. 5. (Verlag v. L. Brill, Darmstadt.)

†) Diese Annalen Bd. XIV, p. 557—566.

††) Jacobi, Dynamik, pag. 46.

Die noch folgenden zwei Paragraphen sind dem dreiaxigen Hyperboloid mit zwei Mantelflächen gewidmet. Ihre Veranlassung finden sie in einem vor Jahresfrist erschienenen Aufsatze von Herrn v. Mangoldt*), der mit meinen früheren Untersuchungen in engem Zusammenhang steht. In § 10 wird ein Satz bezüglich der Linien, die durch die Kreispunkte der Fläche gehen, bewiesen, ferner werden die Beziehungen desselben zu der erwähnten Arbeit klar gelegt und endlich in § 11 die Gleichungen zur Berechnung der Grenzcurve aufgestellt, welche nach Herrn v. Mangoldt diejenigen Punkte der Fläche trennt, die als Ausgangspunkte geodätischer Linien genommen Enveloppen veranlassen oder nicht.

§ 1.

Gleichungen der geodätischen Linien auf dem Ellipsoide.

Als Ausgangspunkt für das Folgende dient uns das erste Integral der Differentialgleichung geodätischer Linien, wie es von Jacobi**) gegeben worden. Nur in der Bezeichnungsweise schliessen wir uns an Liouville***) an. Es seien nämlich die Gleichungen des Ellipsoids und der dazu confocalen Flächen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sigma^2} + \dfrac{y^2}{\sigma^2 - h^2} + \dfrac{z^2}{\sigma^2 - k^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - h^2} - \dfrac{z^2}{k^2 - \mu^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{h^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{k^2 - \nu^2} = 1. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Bedingung

$$\infty > \sigma > k > \mu > h > \nu > 0.$$

Lässt man μ alle möglichen Werthe von $\mu = k$ bis $\mu = h$ annehmen, so bestimmen die beiden ersten dieser Gleichungen das eine System von Krümmungslinien des Ellipsoides, welches von allen confocalen einschaligen Hyperboloiden ausgeschnitten wird, und man kann somit μ als Parameter der Krümmunglinien dieses Systems auffassen. Dieselben liegen zwischen den Hauptschnitten $\mu = k$ (xy Ebene) und $\mu = h$ (xz Ebene). Lässt man ν von $\nu = 0$ bis $\nu =$ h variiren, so geben die erste und dritte Gleichung das zweite System von Krüm-

*) H. v. Mangoldt. Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein. Journal von Crelle-Borchardt. Bd. 91, pag. 23.

**) Dynamik, pag. 214.

***) Liouville. Note III zu Monge's Application de l'Analyse à la Géométrie, pag. 581.

mungslinien, das somit von den confocalen zweischaligen Hyperboloiden ausgeschnitten wird und zwischen den Hauptschnitten $v=h$ (xz Ebene) und $v=0$ (yz Ebene) liegt, v kann somit als Parameter des zweiten Systems aufgefasst werden. Beide Systeme vereinigen sich in den Kreispunkten, für welche $\mu = v = h$ ist.

Mit diesen Bezeichnungen wird dann die Gleichung der geodätischen Linien

$$(2) \qquad \int_{k}^{\mu} \frac{(\sigma^2 - \mu^2)\, d(\mu^2)}{M} \pm \int_{h}^{v} \frac{(\sigma^2 - \nu^2)\, d(\nu^2)}{N} = u'^{*}).$$

Hier ist x eine durch Anfangswerthe zu bestimmende Constante,

$$M^2 = (\sigma^2 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)(\mu^2 - \mu'^2)(\mu^2 - h^2)\mu^2,$$

während N^2 aus diesem Ausdrucke hervorgeht, indem man μ mit v vertauscht. Da die Differentialgleichung der geodätischen Linien vom zweiten Grade ist, so ist μ' die Constante der ersten Integration. Die geometrische Bedeutung dieser Constanten ergiebt sich aus einer Form, in welche zuerst Liouville die Gleichung (2) gebracht hat.**)

Bezeichnet man nämlich mit i den Winkel, unter welchem eine geodätische Linie eine Krümmungslinie schneidet, so ist diese Gleichung:

$$(3) \qquad \mu^2 \cos^2 i + v^2 \sin^2 i = \mu'^2.$$

Dieselbe wird für $\mu = \mu'$, $i = 0$ befriedigt. *Somit ist μ' der Parameter jener Krümmungslinie, welche von der geodätischen berührt wird.*

Giebt man also ein bestimmtes μ', so sind dadurch alle unendlich vielen geodätischen Linien gegeben, welche die beiden Zweige der dem Werthe von μ' entsprechenden Krümmungslinie berührend um die Fläche oscilliren, während sie in das ausserhalb dieser Zweige befindliche Flächengebiet nicht eintreten. Giebt man in dem inzwischen liegenden Flächentheile einen Punkt $\mu_0\, v_0$, so gehen durch diesen Punkt immer zwei geodätische Linien, deren Ausgangswinkel durch die Gleichung $\operatorname{tg} i = \pm\sqrt{\frac{\mu_0^2 - \mu'^2}{\mu'^2 - v_0^2}}$, die aus (3) folgt, gegeben ist. Es gehen also durch jeden Punkt der Fläche *zwei* geodätische Linien, die die Krümmungslinie μ' berühren. Nur für den Kreispunkt als Ausgangspunkt wird dieser Winkel unbestimmt, da $\mu_0 = \mu' = v_0 = h$ ist; somit kann man durch ihn unendlich viele Linien unter beliebigen Winkeln ziehen, welche bekanntlich insgesammt durch den gegenüberliegenden laufen.

Soll die geodätische Linie reell sein, so muss, wie man aus dem Radikale M sieht, entweder $k > \mu' > h$ oder $h > \mu' > 0$ sein. Im einen Falle berührt sie eine Krümmungslinie des ersten, im andern

*) Salmon-Fiedler: Raumgeometrie II. Theil, pag. 162.

**) Journal des Mathématiques, t. 9, Serie I, pag. 403.

Falle eine des zweiten Systems. Den Uebergang vom *ersten* zum *zweiten System geodätischer Linien* (diese Unterscheidung wollen wir in Zukunft beibehalten) bildet dann die Linie durch die Kreispunkte. Wir setzen für das folgende voraus, μ' liege zwischen k und h.

§ 2.

Einführung der hyperelliptischen ϑ-Functionen.

Löst man die Gleichungen (1) nach x, y, z auf, so erhält man die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes auf dem Ellipsoide durch elliptische Coordinaten μ und ν ausgedrückt, in der Form:

$$(4)^*) \qquad \begin{cases} x = \frac{\sigma}{hk} \cdot \mu \cdot \nu, \\ y = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{\sigma^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\sqrt{(\mu^2 - h^2)(h^2 - \nu^2)}, \\ z = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\sigma^2 - k^2}{k^2 - h^2}}\sqrt{(k^2 - \mu^2)(k^2 - \nu^2)}. \end{cases}$$

Bringt man damit die durch die Gleichung (2) zwischen μ und ν gegebene Relation in Verbindung, so sind dies die Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie. Nimmt man nun mit Weierstrass**) zu der Gleichung (2) noch eine ähnlich gebildete

$$(5) \qquad \int_{k^2}^{\mu^2} \frac{d(\mu^2)}{M} \pm \int_{k^2}^{\nu^2} \frac{d(\nu^2)}{N} = u$$

hinzu, wo $u = -\int \frac{ds}{(\sigma^2 - \mu^2)(\sigma^2 - \nu^2)}$ und ds das Bogendifferential der geodätischen Linie bedeutet, so ist u für die Punkte der geodätischen Linie variabel, und man kann auf (2) und (5) die Jacobi'sche Umkehr anwenden. Um die ferneren Entwicklungen mit den von Rosenhain***) gegebenen Formeln direct in Einklang zu bringen, wenden wir auf diese beiden Gleichungen die Substitution an

$$\mu^2 = \nu^2 = k^2 \frac{1 - \lambda^2 x}{1 - \varrho^2 x}, \quad x^2 = \frac{\sigma^2 - h^2}{k^2 - h^2} \cdot \frac{k^2 - \mu'^2}{\sigma^2 - \mu'^2}; \quad \lambda^2 = \frac{k^2 - \mu'^2}{\sigma^2 - \mu'^2} \cdot \frac{a^2}{k^2},$$

$$\varrho^2 = \frac{k^2 - \mu'^2}{\sigma^2 - \mu'^2},$$

wodurch die Gleichungen (2) und (5) übergehen in:

---

*) Liouville. Note III zu Monge's Application etc. pag. 581.

**) Weierstrass a. a. O. pag. 994.

***) Rosenhain: Mémoirs des savants étrangers. t. 11.

$$(6)\qquad \begin{cases} \int_0^{x_1} \frac{1-\varrho^2 x_1}{\sqrt{X_1}}\,dx_1 \pm \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{x_2} \frac{1-\varrho^2 x_2}{\sqrt{X_2}}\,dx_2 = u, \\ \int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \pm \int_{\frac{1}{\varkappa^2}}^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = u', \end{cases}$$

wo $X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\varrho^2 x)$ ist, während die Gleichungen (4) die Form annehmen:

$$(7)\qquad \begin{cases} x^2 = a_1 \frac{(1-\lambda^2 x_1)(1-\lambda^2 x_2)}{(1-\varrho^2 x_1)(1-\varrho^2 x_2)}, \\ y^2 = -a_2 \frac{(1-\varkappa^2 x_1)(1-\varkappa^2 x_2)}{(1-\varrho^2 x_1)(1-\varrho^2 x_2)}, \\ z^2 = a_3 \frac{x_1 x_2}{(1-\varrho^2 x_1)(1-\varrho^2 x_2)}. \end{cases}$$

a_1, a_2, a_3 sind leicht zu bestimmende Constante.

Schreibt man jetzt die ersten 5 Formeln der von **Rosenhain** a. a. O. pag. 422 gegebenen Formeltafel in die bequemere **Riemann**'sche Bezeichnungsweise um, so hat man:

$$(8)\qquad \begin{cases} \text{a)} \quad \varkappa\lambda\varrho x_1 x_2 = \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)(v|w)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)(v|w)}, \\ \text{b)} \quad -\frac{\varkappa\lambda\varrho}{\varkappa_1\lambda_1\varrho_1}(1-x_1)(1-x_2) = \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)(v|w)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)(v|w)}, \\ \text{c)} \quad -\frac{\lambda\varrho}{\varkappa_1\lambda_\varkappa\varrho_\varkappa}(1-\varkappa^2 x_1)(1-\varkappa^2 x_2) = \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)(v|w)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)(v|w)}, \\ \text{d)} \quad -\frac{\varkappa\varrho}{\lambda_1\varrho_\lambda\lambda_\varkappa}(1-\lambda^2 x_1)(1-\lambda^2 x_2) = \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)(v\ w)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)(v'w)}, \\ \text{e)} \quad -\frac{\varkappa\lambda}{\varrho_1\varrho_\varkappa\varrho_\lambda}(1-\varrho^2 x_1)(1-\varrho^2 x_2) = \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)(v|w)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)(v.w)}, \end{cases}$$

und wenn man diese symmetrischen Functionen von x_1, x_2 in die Gleichungen (7) einführt, so folgt:

$$(9)\qquad \begin{cases} x = \sqrt{\sigma^2}\sqrt[4]{\frac{\sigma^2\mu'^2}{h^2k^2}}\ \frac{\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}(v\,|\,w)}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(v\,|\,w)}, \\ y = \sqrt{\sigma^2-h^2}\sqrt[4]{\frac{(\sigma^2-h^2)(\mu'^2-h^2)}{h^2(k^2-h^2)}}\cdot\frac{\vartheta\binom{0\,1}{0\,1}(v\,|\,w)}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(v\,|\,w)}, \\ z = \sqrt{\sigma^2-k^2}\sqrt[4]{\frac{(\sigma^2-k^2)(k^2-\mu'^2)}{k^2(k^2-h^2)}}\cdot\frac{\vartheta\binom{1\,0}{1\,1}(v\,|\,w)}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}(v\,|\,w)}, \end{cases}$$

welche Gleichungen bis auf die Bezeichnung mit denen von Weierstrass a. a. O. erhaltenen übereinstimmen. Die ϑ-Functionen sind hier definirt durch die Gleichung:

$$\vartheta\binom{h_1\ h_2}{g_1\ g_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty} p^{\left(m+\frac{h_1}{2}\right)}\cdot q^{\left(n+\frac{h_2}{2}\right)}\cdot e^{2\left(m+\frac{h_1}{2}\right)\left(n+\frac{h_2}{2}\right)a_{1,2}}\cdot\cos\Omega_{m,n}\text{*)}$$

$$\Omega_{m,n} = 2\left(m+\tfrac{h_1}{2}\right)\left(v-\tfrac{g_1}{2}\right)\pi + 2\left(n+\tfrac{h_2}{2}\right)\left(w-\tfrac{g_2}{2}\right)\pi,$$

während die seit Richelot gebräuchlichen Bezeichnungen $\lambda_1^2 = 1-\lambda^2$, $\lambda_\varkappa^2 = \varkappa^2-\lambda^2$ etc. verwendet sind. Sollen nun die Gleichungen (9) die Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie darstellen, so müssen v und w linear abhängig sein von der Constanten u' und der Variabeln u; man muss also haben:

$$(10)\qquad \begin{cases} v = \beta_{1,1}u + \beta_{1,2}u', \\ w = \beta_{2,1}u + \beta_{2,2}u'. \end{cases}$$

Die hier auftretenden Constanten sowie die Constanten p, q, $e^{\pm 2a_{1,2}}$ der ϑ-Functionen müssen nun noch passend bestimmt werden. Ist dieses geschehen, so sind v und w nur mehr von der einen Variabeln u abhängig, und wenn u von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, so geben die Gleichungen (9) sämmtliche Punkte der geodätischen Linie.

§ 3.

Constantenbestimmung.

Die vier Constanten $\beta_{1,1}$, $\beta_{1,2}$, $\beta_{2,1}$, $\beta_{2,2}$ sind von Weierstrass durch die Periodicitätsmoduln der Integrale, die in den Gleichungen (2) und (5) auftreten, ausgedrückt. Diese Bestimmung kann jedoch durch eine für numerische Rechnung zweckmässigere ersetzt werden. Die Berechnung der erwähnten Moduln auf dem Wege der Quadratur

*) Vergl. Thomae: Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung von elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden, pag. 9, Formel 101a und Weierstrass a. a. O. pag. 994 und 995.

erfordert nämlich schon in günstigen Fällen eine grosse Gliederzahl. Wir drücken sie daher durch Quotienten von ϑ-Functionen mit verschwindenden Argumenten aus, indem wir uns eines in dem Werke von Clebsch und Gordan: „Theorie der Abel'schen Functionen" pag. 331 ausgesprochenen Gedankens bedienen.

Aus den Gleichungen (6) erhält man nämlich durch Auflösung nach dx_1 und dx_2

$$dx_1 = -\frac{\sqrt{X_1}}{\varrho^2(x_2-x_1)}du - \frac{\sqrt{X_1}(1-\varrho^2 x_2)}{\varrho^2(x_2-x_1)}du',$$

$$dx_2 = -\frac{\sqrt{X_2}}{\varrho^2(x_1-x_2)}du - \frac{\sqrt{X_2}(1-\varrho^2 x_1)}{\varrho^2(x_1-x_2)}du'.$$

Differentiirt man jetzt die Gleichungen a) und c) in (8), führt für die auftretenden Differentiale dx_1, dx_2 die obigen Werthe ein und setzt dann $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{\varkappa^2}$, d. h. $v=w=0$, so gewinnt man die Formeln:

$$\frac{\vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_v}{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}}dv+\frac{\vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_w}{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}}dw=\frac{1}{2}\frac{\varkappa}{\varrho}\sqrt{\frac{\varkappa\lambda}{\varrho}}du-\frac{1}{2}\frac{\varrho_\varkappa^2}{\varrho}\sqrt{\frac{\lambda}{\varkappa\cdot\varrho}}du',$$

$$\frac{\vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_v}{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}}dv+\frac{\vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_w}{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}}dw=\frac{1}{2\varrho^2}\sqrt{\lambda\varrho\varkappa_1\lambda_\varkappa\varrho_\varkappa}\,du-\frac{1}{2\varrho^2}\sqrt{\lambda\varrho\varkappa_1\lambda_\varkappa\varrho_\varkappa}\,du';$$

hierin ist $\vartheta'\binom{h_1\ h_2}{g_1\ g_2}_v$ der Werth, welchen die nach v gebildete Abgeleitete von $\vartheta\binom{h_1\ h_2}{g_1\ g_2}(v\,|\,w)$ annimmt, wenn man $v=w=0$ setzt, während $\vartheta\binom{h_1\ h_2}{g_1\ g_2}$ für $\vartheta\binom{h_1\ h_2}{g_1\ g_2}(0\,|\,0)$ gesetzt wurde.

Löst man diese Gleichungen nach dv und dw auf und vergleicht die Coefficienten von du, du' mit denen der Differentialquotienten der Gleichungen (10), so erhält man:

$$(11)\quad\begin{cases}
\beta_{1,1}=\frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{\lambda}{\varrho^3}}\left\{\sqrt{\varkappa_1\lambda_\varkappa\varrho_\varkappa}\,\vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_w-\sqrt{\varkappa^3}\,\vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_w\right\},\\
\beta_{1,2}=\frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{\varrho_\varkappa\lambda}{\varrho^3}}\left\{\sqrt{\frac{\varrho^3}{\varkappa}}\,\vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_w-\sqrt{\varkappa_1\lambda_\varkappa}\,\vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_w\right\},\\
\beta_{2,1}=\frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{\lambda}{\varrho^3}}\left\{\sqrt{\varkappa^3}\,\vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_v-\sqrt{\varkappa_1\lambda_\varkappa\varrho_\varkappa}\,\vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_v\right\},\\
\beta_{2,2}=\frac{1}{\Delta}\sqrt{\frac{\varrho_\varkappa\lambda}{\varrho^3}}\left\{\sqrt{\varkappa_1\lambda_\varkappa}\,\vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_v-\sqrt{\frac{\varrho_\varkappa^3}{\varkappa}}\,\vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_v\right\}.
\end{cases}$$

Δ hat den Werth $2\dfrac{\vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_w \vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_v - \vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_v \vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_w}{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}}$. Dieser Werth lässt sich noch für die Rechnung bequemer gestalten, wenn man die bekannte Formel

$$\vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_v \vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_w - \vartheta'\binom{0\,1}{0\,1}_w \vartheta'\binom{1\,0}{1\,1}_v$$
$$= -\pi^2 \vartheta\binom{0\,0}{0\,0} \vartheta\binom{0\,0}{1\,1} \vartheta\binom{0\,1}{0\,0} \vartheta\binom{1\,0}{0\,1}$$ *) benützt

und $\vartheta\binom{0\,1}{0\,0}$, $\vartheta\binom{1\,0}{0\,1}$ mit den von Rosenhain a. a. O. pag. 418 gegebenen Formeln durch $\varkappa$, λ, ϱ ausdrückt. Man erhält dann nämlich: $\Delta = -2\pi^2 \vartheta\binom{0\,0}{0\,0}^3 \dfrac{\varrho}{\lambda_1 \varrho_\varkappa} \sqrt{\dfrac{\varkappa_1 \varrho_1 \lambda_\varkappa \varrho_\lambda}{\lambda}}$. Um aus diesen Formeln die Constanten β zu berechnen, ist, wie man sieht, nur die Kenntniss von p, q, $e^{\pm a_{12}}$ nöthig.**) Diese kann man auf ähnliche Weise finden, wie man in der Theorie der elliptischen Functionen aus dem Modul $\varkappa$ den Werth von q bestimmt. Aus den 9 Gleichungen, die Rosenhain pag. 418 seiner schon öfters erwähnten Abhandlung angiebt, und welche die Beziehungen zwischen den Moduln $\varkappa$, λ, ϱ und den ϑ-Quotienten mit verschwindenden Argumenten bestimmen, wählen wir diejenigen drei aus, in welche p, q und $e^{\pm 2a_{12}}$ nur in ganzzahligen Potenzen eingehen. Zieht man aus diesen die positiven vierten Wurzeln und setzt sie in unsere Bezeichnungsweise um, so lauten dieselben:

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,0}}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}} = \sqrt[4]{\dfrac{\varkappa_1^2 \varrho_1^2}{\lambda_1^2}} = \alpha, \\ \dfrac{\vartheta\binom{0\,0}{1\,1}}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}} = \sqrt[4]{\dfrac{\varkappa^2 \varrho_1^2 \varrho_\lambda^2}{\lambda^2 \varrho_\varkappa^2}} = \beta, \\ \dfrac{\vartheta\binom{0\,0}{0\,1}}{\vartheta\binom{0\,0}{0\,0}} = \sqrt[4]{\dfrac{\varkappa^2 \varkappa_1^2 \varrho_\lambda^2}{\lambda^2 \lambda_1^2 \varrho_\varkappa^2}} = \gamma. \end{cases}$$

*) Thomae a. a. O., p. 17, Formel 146, und Rosenhain a. a. O., p. 433.

**) Die von Thomae a. a. O., p. 12 angegebenen und p. 19 entwickelten Formeln zur Berechnung von p, q, $e^{\pm a_{12}}$ konnten nicht benützt werden, da sie mir nicht richtig zu sein scheinen. In den dort angegebenen Anfangsgliedern der ϑ-Reihen müssen nämlich statt der Glieder

$$2rp^3 = 2p^4q(e^{2a_{12}} + e^{-2a_{12}}) \quad \text{und} \quad 2rq^3 = 2pq^4(e^{2a_{12}} + e^{-2a_{12}})$$

die Glieder

$$2p^4q(e^{4a_{12}} + e^{-4a_{12}}) \quad \text{und} \quad 2pq^4(e^{4a_{12}} + e^{-4a_{12}})$$

stehen. Hierdurch werden aber die Formeln pag. 17 wesentlich geändert.

Setzt man in den ϑ-Functionen $e^{2a_{12}} + e^{-2a_{12}} = r$, so sind die Anfangsglieder derselben, welche für unsere späteren Zwecke genügen:

$$(13)\quad \begin{cases} \vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix} = 1+2p+2q+2pqr+2p^4+2q^4+2(pq^4+p^4q)(r^2-2)+\cdots, \\ \vartheta\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix} = 1-2p+2q-2pqr+2p^4+2q^4-2(pq^4-p^4q)(r^2-2)+\cdots, \\ \vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix} = 1-2p-2q+2pqr+2p^4+2q^4-2(pq^4+p^4q)(r^2-2)+\cdots, \\ \vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix} = 1+2p-2q-2pqr+2p^4+2q^4+2(pq^4-p^4q)(r^2-2)+\cdots. \end{cases}$$

Bildet man hieraus und aus (12) mit Thomae die Gleichungen:

$$(14)\quad \begin{cases} p_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha-\beta+\gamma}{1+\alpha+\beta+\gamma} = p + pq^4(r^2-2), \\ q_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha-\beta-\gamma}{1+\alpha+\beta+\gamma} = q + qp^4(r^2-2), \\ r_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha+\beta-\gamma}{1+\alpha+\beta+\gamma} = pqr, \end{cases}$$

so folgt, wenn man noch $q^4 - p^4$ vernachlässigt*), leicht:

$$(15)\quad \begin{cases} p = \frac{p_0 q_0}{q_0^2 + p_0^2 r_0^2}, \\ q = \frac{q_0^3}{q_0^2 + p_0^2 r_0^2}, \\ r = \frac{r_0}{pq}. \end{cases}$$

Bestimmt man hieraus den Werth von r, so ergiebt sich a_{12} vermöge der Gleichung

$$(16)\quad e^{\pm 2a_{12}} = \frac{r \pm \sqrt{r^2-4}}{2};$$

Welcher von den hieraus folgenden reciproken Werthen von a_{12} genommen werden muss, kann aus dem Quotienten $\frac{\vartheta\binom{1\,1}{0\,0}(v\,|\,w)}{\vartheta\binom{1\,1}{1\,1}(v\,|\,w)}$, der einerseits nahezu gleich $-\frac{e^{\frac{a_{12}}{2}} + e^{-\frac{a_{12}}{2}}}{e^{\frac{a_{12}}{2}} - e^{-\frac{a_{12}}{2}}}$, andererseits gleich $\sqrt[4]{\frac{x^2 \lambda_1^2 \varrho_1^2}{\varrho_x^2 \varrho_\lambda^2}}$ ist, entnommen werden**).

*) Ueber die Gültigkeitsgrenzen dieser Formeln vergl. § 4.

**) Vergl. Thomae a. a. O. pag. 13.

§ 4.

Numerische Berechnung einer geodätischen Linie.

Die in Gleichung (2) auftretende Constante u' kann dadurch bestimmt werden, dass man die geodätische Linie durch einen bestimmten Punkt der xy-Ebene gehen lässt. Seine elliptischen Coordinaten sind dann $\mu = k$, $\nu = \nu_0$. Dann ist

$$u' = \int_{k^2}^{\nu_0^2} \frac{(\sigma^2 - \nu^2)\, d(\nu^2)}{N}.$$

Diese Constante verschwindet, wenn man ν_0 mit h, d. h. den Anfangspunkt der geodätischen Linie mit dem einen Endpunkte der grossen Axe zusammenfallen lässt. Hierdurch wird die Gestalt der Linie nicht particularisirt, während die Rechnung sich vereinfacht, indem $v = \beta_{1,1} u$, $w = \beta_{2,1} u$ wird; deshalb sei für das Folgende diese Voraussetzung gemacht. In den Gleichungen (6) ist dann das untere Zeichen zu nehmen, und μ' liegt zwischen k und h. Für die numerische Rechnung bediente ich mich des Axenverhältnisses

$$\sigma^2 : (\sigma^2 - h^2) : (\sigma^2 - k^2) = \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{1}.$$

Was die in § 2 gebrauchte Substitution anlangt, so sind für ihre Wahl drei Gesichtspunkte massgebend: einmal muss man trachten, die Werthe p, q, r und namentlich den letzten, welcher eine rasche Convergenz der ϑ-Reihe am meisten beeinträchtigt, möglichst klein zu machen, dann sind diejenigen ϑ-Functionen zu vermeiden, welche vermöge ihrer Bildung mehr Glieder beanspruchen, das sind die Reihen mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ g_1 & g_2 \end{pmatrix}$, und endlich muss man suchen, für u und u' reelle Werthe zu erhalten. Diese drei Bedingungen erfüllt die oben gewählte Substitution für Werthe von μ'^2 zwischen $\mu'^2 = \frac{1}{2}(k^2 + h^2)$ und $\mu'^2 = k^2$, während man für Werthe zwischen den Grenzen $\mu'^2 = h^2$ und $\mu'^2 = \frac{1}{2}(k^2 + h^2)$ besser

$$\mu^2 = \nu^2 = \frac{h^2 \mu'^2}{\mu'^2 - (\mu'^2 - h^2)x}$$

wählen wird. Begnügt man sich dann mit einer Genauigkeit von 4 Decimalen, so genügt die Gliederzahl in den Gleichungen (13) und die für die Rechnung nöthigen Anfangsglieder der ϑ-Functionen und ihrer Differentialquotienten sind folgende:

*) Vergl. Thomae a. a. O. pag. 19.

$$(17)\quad \begin{cases} \vartheta\binom{01}{00}(v|w) = 2\Big\{q^{\frac{1}{4}}\cos w\pi + q^{\frac{9}{4}}\cos 3w\pi \\ \qquad + pq^{\frac{1}{4}}\left(e^{-a_{1,2}}\cos(2v-w)\pi + e^{a_{1,2}}\cos(2v+w)\pi\right) \\ \qquad + pq^{\frac{9}{4}}\left(e^{-3a_{1,2}}\cos(2v-3w)\pi + e^{3a_{1,2}}\cos(2v+3w)\pi\right) + \cdots\Big\}, \\ \vartheta\binom{01}{01}(v|w) = 2\Big\{q^{\frac{1}{4}}\sin w\pi - q^{\frac{9}{4}}\sin 3w\pi \\ \qquad - pq^{\frac{1}{4}}\left(e^{-a_{1,2}}\sin(2v-w)\pi - e^{a_{1,2}}\cos(2v+w)\pi\right) \\ \qquad + pq^{\frac{9}{4}}\left(e^{-3a_{1,2}}\sin(2v-3w)\pi - e^{3a_{1,2}}\sin(2v+3w)\pi\right) + \cdots\Big\}, \\ \vartheta\binom{10}{11}(v|w) = 2\Big\{p^{\frac{1}{4}}\sin v\pi - p^{\frac{9}{4}}\sin 3v\pi \\ \qquad - p^{\frac{1}{4}}q\left(e^{-a_{1,2}}\sin(v-2w)\pi + e^{a_{1,2}}\sin(v+2w)\pi\right) \\ \qquad + p^{\frac{9}{4}}q\left(e^{-3a_{1,2}}\sin(3v-2w)\pi + e^{3a_{1,2}}\sin(3v+2w)\pi\right) + \cdots\Big\}, \\ \vartheta\binom{00}{00}(v|w) = 1 + 2p\cos 2v\pi + 2q\cos 2w\pi \\ \qquad + 2pq\left(e^{-2a_{1,2}}\cos 2(v-w)\pi + e^{2a_{1,2}}\cos 2(v+w)\pi\right) + \cdots; \end{cases}$$

$$(18)\quad \begin{cases} \vartheta'\binom{10}{11}_v = 2\pi\left\{p^{\frac{1}{4}} - 3p^{\frac{9}{4}} - p^{\frac{1}{4}}q(e^{-a_{1,2}} + e^{a_{1,2}}) + 3p^{\frac{9}{4}}q(e^{-3a_{1,2}} + e^{3a_{1,2}}) + \cdots\right\}, \\ \vartheta'\binom{10}{11}_w = 4\pi\left\{p^{\frac{1}{4}}q(e^{-a_{1,2}} - e^{a_{1,2}}) + p^{\frac{9}{4}}q(e^{-3a_{1,2}} - e^{3a_{1,2}}) + \cdots\right\}, \\ \vartheta'\binom{01}{01}_v = 4\pi\left\{-pq^{\frac{1}{4}}(e^{-a_{1,2}} - e^{a_{1,2}}) + pq^{\frac{1}{4}}(e^{-3a_{1,2}} - e^{3a_{1,2}}) - \cdots\right\}, \\ \vartheta'\binom{01}{01}_w = 2\pi\left\{q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + pq^{\frac{1}{4}}(e^{-a_{1,2}} + e^{a_{1,2}}) - 3pq^{\frac{9}{4}}(e^{-3a_{1,2}} + e^{3a_{1,2}} + \cdots\right\}. \end{cases}$$

Wählt man endlich die specielle geodätische Linie, die für

$$\mu'^2 = \tfrac{1}{2}(k^2 + h^2)$$

resultirt, so ergeben sich folgende Zahlenwerthe für die Constanten:

$$\sigma^2 = 1{,}7320\cdot 5, \qquad \mu'^2 = 0{,}5249\cdot 4, \qquad \varkappa^2 = 0{,}5857\cdot 8,$$
$$k^2 = 0{,}7320\cdot 5, \qquad \lambda^2 = 0{,}4059\cdot 4,$$
$$h^2 = 0{,}3178\cdot 3, \qquad \varrho^2 = 0{,}1715\cdot 7.$$

Die Formeln (12) und (13) ergeben dann die Werthe

$$\alpha = 0{,}8717 \cdot 8,$$
$$\beta = 0{,}9068 \cdot 8,$$
$$\gamma = 0{,}8686 \cdot 4,$$

und diese liefern mittelst der Formeln (14) und (15)

$$p_0 = 0{,}0123 \cdot 3, \qquad p = 0{,}0123 \cdot 2,$$
$$q_0 = 0{,}0131 \cdot 9, \qquad q = 0{,}0131 \cdot 9,$$
$$r_0 = 0{,}0228 \cdot 1, \qquad r = 140{,}3160.$$

Die Formel (16) lässt hieraus $\log e^{+2a_{11}} = 7{,}85291$*) und $\log e^{-2a_{11}} = 2{,}14709$ folgen.

Mit diesen Werthen erhält man aus den Gleichungen (18)

$$\log \vartheta' \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}_v = 0{,}25147,$$
$$\log \vartheta' \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}_w = \dot{9}{,}80319,$$
$$\log -\vartheta' \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix}_v = \dot{9}{,}77984,$$
$$\log \vartheta' \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix}_w = 0{,}38357,$$
$$\log (-\Delta) = 0{,}97533.$$

Hieraus fliessen mittelst der Gleichungen (11) die Werthe

$$\beta_{1,1} = 0{,}4288 \cdot 3,$$
$$\beta_{2,1} = 0{,}3648 \cdot 3,$$

Die Werthe von $\beta_{1,2}$ und $\beta_{2,2}$ können im vorliegenden Falle entbehrt werden, da $u' = 0$ ist. Die Logarithmen der in den Formeln (9) auftretenden Constanten sind dann der Reihe nach:

$$\log \sqrt{\sigma^2} \sqrt[4]{\frac{\sigma^2 \mu'^2}{k^2 h^2}} = 0{,}26726,$$
$$\log \sqrt{\sigma^2 - h^2} \sqrt[4]{\frac{(\sigma^2 - h^2)(\mu'^2 - h^2)}{h^2 (k^2 - h^2)}} = 0{,}16208,$$
$$\log \sqrt{\sigma^2 - k^2} \sqrt[4]{\frac{(\sigma^2 - k^2)(k^2 - \mu'^2)}{k^2 (k^2 - h^2)}} = \dot{9}{,}95861.$$

Mit diesen Constanten können nun zu jedem Werthe von u die Coordinaten x, y, z mittelst der Gleichungen (9) und (17) berechnet werden. Die folgende Tafel ist jedoch so angelegt, dass der eine Winkel v als unabhängige Veränderliche genommen und mittelst der aus (10) und der Bedingung $u' = 0$ folgenden Relation $\beta_{1,1} w = \beta_{2,1} v = 0$ der

*) Die Logarithmen sind sämmtlich Briggische.

zugehörige Werth von w berechnet wurde. Der Vollständigkeit halber sind die entsprechenden Werthe von u ebenfalls notirt.

Die mit * bezeichneten Punkte sind die Berührungspunkte der geodätischen Linie mit der Krümmungslinie μ'. Da für sie $x_1 = 1$ sein muss, so erhält man die ihnen entsprechenden Werthe von u, indem man beachtet, dass in Gleichung (8) b) $\vartheta \binom{10}{01} (v|w)$ verschwindet.

u	$v\pi$	$w\pi$	x	y	z
0	0	0	1,3160.7	0	0
0,2591.1	20°	17°,015	1,2641.8	0,2135.7	0,2121.7
0,5182.1	40	34,030	1,1052.5	0,4221.7	0,4107.0
0,7773.2	60	51,044	0,8352.2	0,6136.1	0,5752.1
1,1094.7*	85,636	72,855	0,3469.3	0,7990.4	0,6921.2
1,2955.3	100	85,074	0,0336.5	0,8667.4	0,6947.0
1,5546.4	120	102,09	−0,3951.5	0,8623.0	0,6197.1
1,8137.5	140	119,11	−0,7623.4	0,7909.5	0,4712.8
2,0728.9	160	136,12	−1,0342.9	0,6562.6	0,2790.6
2,3319.5	180	153,13	−1,2031.7	0,4747.5	0,0694.8
2,5910.6	200	170,15	−1,2717.3	0,2572.4	−0,1393.6
2,8501.9	220	187,16	−1,2406.9	0,0101.9	−0,3335.2
3,1092.9	240	204,18	−1,1059.2	−0,2581.1	−0,4967.4
3,3847.6*	261,27	222,27	−0,8477.4	−0,5458.3	−0,6119.5
3,6275.0	280	238,21	−0,5363.0	−0,7712.8	−0,6424.7
3,8866.4	300	255,22	−0,1536.0	−0,9474.6	−0,5930.4
4,1457.3	320	272,24	0,2307.7	−0,0308.8	−0,4667.4
4,4048.0	340	289,25	0,5747.2	−1,0144.2	−0,2887.9
4,6638.9	360	306,26	0,8439.6	−0,9065.2	−0,0877.6
4,9230.0	380	323,28	1,0361.4	−0,7189.5	0,1139.4
5,1822.9	400	340,30	1,1446.6	−0,4691.4	0,2964.6
5,4412.5	420	357,32	1,1652.4	−0,1654.4	0,4435.2
5,7551.4*	444,23	377,93	1,0666.7	0,2434.0	0,5488.2
5,9595.0	460	391,35	0,9310.0	0,5089.1	0,5625.6
6,2185.7	480	408,36	0,6897.2	0,8091.3	0,5123.1
6,4777.1	500	425,37	0,3940.4	1,0337.1	0,3934.3

§ 5.

Specielle Fälle.

Für den speciellen Fall $\mu' = k$ fällt die geodätische Linie mit dem Hauptschnitt in der xy-Ebene zusammen. Denn je mehr sich μ' dem Werthe k nähert, desto mehr rücken die beiden Aeste der Krümmungslinie von zwei Seiten an den Hauptschnitt heran, und da die geodätische Linie das Gebiet zwischen diesen Aesten nicht überschreitet, so muss sie in der Grenzlage mit dem Hauptschnitte selbst zusammenfallen; die Gleichung (2) geht dann in die Summe aus einem elliptischen Integral 3. Gattung und einer Constanten über. Aehnliches gilt für den Hauptschnitt der yz-Ebene.

Für $\mu' = h$ hingegen erhält man, wie bereits erwähnt, sämmtliche durch die Kreispunkte gehende Linien, während Gleichung (2) in die Summe zweier elliptischer Integrale 3. Gattung übergeht. In der bereits in der Einleitung erwähnten Arbeit von Rohn*) wird nun diese Gleichung weiter behandelt, und schliesslich finden sich die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Kreispunktslinie durch elliptische Functionen zweier Parameter ausgedrückt, die mit einander durch eine Gleichung verbunden sind. Nun lassen sich aber diese Coordinaten, wie im allgemeinen Falle, direct durch Functionen eines einzigen Parameters darstellen, wenn man sich ähnlicher Formeln bedient, wie sie Rosenhain im Eingang seiner Schrift bezüglich der Transscendenten 3. Gattung entwickelte**). Diese Formeln will ich im Folgenden angeben, da sie in engem Zusammenhang mit unsern Formeln einer allgemeinen geodätischen Linie stehen und auch für die Rechnung von Vortheil sein dürften.

Für $\mu' = h$ wird Gleichung (2)

$$\int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{(\sigma^2 - \mu^2)\, d(\mu^2)}{\mu^2 - h^2 M_h} - \int_{0}^{\nu^2} \frac{(\sigma^2 - \nu^2)\, d(\nu^2)}{(h^2 - \nu^2) N_h} = 0.$$

Hiebei bedeutet $\mu = \mu_0$ den Parameter des Schnittpunktes der Linie mit der yz-Ebene, während $M_h^2 = (\sigma^2 - \mu^2)(k^2 - \mu^2)\mu^2$ und $N_h^2 = (\sigma^2 - \nu^2) \cdot (k^2 - \nu^2)\nu^2$ ist. Setzt man in dieser Gleichung $\mu^2 = k^2 x_1$, $\nu^2 = k^2 x_2$, so geht sie über in:

---

*) Die erste Arbeit, in welcher Formeln zur Berechnung einer solchen Linie aufgestellt werden, mag wohl eine aus dem Nachlasse von Jacobi durch Luther in Schumachers astronomischen Nachrichten Bd. 41, pag. 210 publicirte Abhandlung sein.

**) Rosenhain a. a. O. pag. 376 bis 380.

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{(1-\varkappa^2 x_1)\,dx_1}{(1-\lambda^2 x_1)\sqrt{X_1}} + \int_{0}^{x_2} \frac{(1-\varkappa^2 x_2)\,dx_2}{(1-\lambda^2 x_2)\sqrt{X_2}} = 0,$$

$$X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x); \quad \varkappa^2 = \frac{k^2}{\sigma^2}; \quad \lambda^2 = \frac{k^2}{h^2}; \quad \mu_0 = \varkappa^2 x_0.$$

Verbindet man hiermit die Gleichung

$$\int_{0}^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_{0}^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = u_1 + u_2 = u,$$

setzt $x_0 = \sin \operatorname{am} u'$, $\lambda^2 = \sin^2 \operatorname{am} \varepsilon$ und bedient sich im Folgenden der bekannten Indicesbezeichnung der vier elliptischen ϑ-Functionen*), so erhält man leicht die Gleichung:

$$(u-u')\frac{\vartheta_3'(\varepsilon)}{\vartheta_3(\varepsilon)} + \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(u_1-\varepsilon)\,\vartheta_1(u_2-\varepsilon)\,\vartheta_1(u'+\varepsilon)}{\vartheta_1(u_1+\varepsilon)\,\vartheta_1(u_2+\varepsilon)\,\vartheta_1(u'-\varepsilon)} + \frac{i\pi}{2} = 0^{**}).$$

Hieraus folgt, wenn man zur Abkürzung $(u-u')\frac{\vartheta_3'(\varepsilon)}{\vartheta_3(\varepsilon)} = v$ und $\frac{\vartheta_1(u'+\varepsilon)}{\vartheta_1(u'-\varepsilon)} = \varrho$ setzt,

$$e^{2v} = -\varrho\,\frac{\vartheta_1(u_1-\varepsilon)\,\vartheta_1(u_2-\varepsilon)}{\vartheta_1(u_1+\varepsilon)\,\vartheta_1(u_2+\varepsilon)}.$$

Wendet man nun auf diese Gleichung die Additionsformeln an, oder transformirt man kürzer die von Rosenhain pag. 379 unter Nr. 27 und 380 unter Nr. 28 gegebenen Formeln, indem man daselbst $a=\varepsilon+iK'$ und statt e^{-v} überall $-\varrho e^{-v}$ setzt, so folgen die Formeln:

$$\varkappa\sqrt{x_1 x_2} = \frac{\vartheta_1(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)}\,\frac{\varrho e^{-v}\vartheta_1(u-\varepsilon) - e^{v}\vartheta_1(u+\varepsilon)}{\varrho e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)},$$

$$\frac{\varkappa}{\varkappa_1}\sqrt{(1-x_1)(1-x_2)} = \frac{\vartheta_2(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)}\,\frac{\varrho e^{-v}\vartheta_3(u-\varepsilon) - e^{v}\vartheta_3(u+\varepsilon)}{\varrho e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)},$$

$$\frac{1}{\varkappa_1}\sqrt{(1-\varkappa^2 x_1)(1-\varkappa^2 x_2)} = \frac{\vartheta_3(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)}\cdot\frac{\varrho e^{-v}\vartheta_2(u-\varepsilon) - e^{v}\vartheta_2(u+\varepsilon)}{\varrho e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)},$$

$$\sqrt{-(1-\lambda^2 x_1)(1-\lambda^2 x_2)} = \frac{\vartheta(0)\vartheta_2(\varepsilon)\vartheta_3(\varepsilon)\sqrt{\varrho}}{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_1(\varepsilon)}\cdot\frac{2\vartheta_1(u)}{\varrho e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)}.$$

Wendet man dann auf die Gleichungen (4) $\mu^2 = \nu^2 = k^2 x$ an und führt aus obigen Formeln die hiedurch auftretenden symmetrischen Functionen von x_1, x_2 ein, so ergiebt sich für die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der geodätischen Linie:

---

*) Vergl. Jacobi, Werke, neue Ausgabe, Bd. I, pag. 501. Oder Rosenhain a. a. O. pag. 368.

**) Diese Gleichung stimmt bis auf die Bezeichnung mit der von Rohn a. a. O. entwickelten überein.

$$x = \frac{\sigma^2}{k^2}\frac{\vartheta_1(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)}\frac{\varrho e^{-v}\vartheta_1(u-\varepsilon) - e^{v}\vartheta_1(u+\varepsilon)}{\varrho e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)},$$

$$y = h^2\sqrt{\frac{\sigma^2-h^2}{k^2-h^2}}\frac{\vartheta_2(\varepsilon)\,\vartheta_3(\varepsilon)\,\vartheta(0)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(\varepsilon)}\sqrt{\varrho}\;\frac{2\vartheta_1(u)}{\varrho e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)},$$

$$z = \sqrt{k^2-h^2}\,\frac{\vartheta_2(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)}\,\frac{\varrho e^{-v}\vartheta_2(u-\varepsilon) - e^{v}\vartheta_2(u+\varepsilon)}{\varrho e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)}.$$

Hierdurch sind, wie im allgemeinen Falle, die rechtwinkligen Coordinaten durch die eine Variable u ausgedrückt.

Eine Vereinfachung erfahren diese Formeln noch, wenn man die Linie durch den Endpunkt der mittleren Axe gehen lässt, wodurch dieselbe nicht specialisirt wird. Dann ist nämlich $u' = K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{X}}$, somit $v = (K-u)\frac{\vartheta_2'(\varepsilon)}{\vartheta_2(\varepsilon)}$ und $\varrho = 1$. Für die in der Formel von y auftretende Constante ergiebt sich dann leicht ein vereinfachter Werth, so dass man hat:

$$x = \frac{\sigma^2}{k}\frac{\vartheta_1(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)}\,\frac{e^{-v}\vartheta_1(u-\varepsilon) - e^{v}\vartheta_1(u+\varepsilon)}{e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)},$$

$$y = h\sqrt{\sigma^2-h^2}\sqrt{\frac{\sigma\pi}{kh}}\,\vartheta_3(\varepsilon)\;\frac{2\vartheta_1(u)}{e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)},$$

$$z = \sqrt{k^2-h^2}\,\frac{\vartheta_2(\varepsilon)}{\vartheta(\varepsilon)}\,\frac{e^{-v}\vartheta_3(u-\varepsilon) - e^{v}\vartheta_3(u+\varepsilon)}{e^{-v}\vartheta(u-\varepsilon) + e^{v}\vartheta(u+\varepsilon)}.$$

§ 6.

Gleichungen für eine Enveloppe geodätischer Linien und Discussion derselben.

An die bereits in der Einleitung erwähnte Bemerkung von Jacobi, dass ein Büschel geodätischer Linien auf positiv gekrümmten Flächen im Allgemeinen eine Enveloppe besitzt, anknüpfend, hat O. Bonnet*) gezeigt, dass dies bei allen geschlossenen positiv gekrümmten Flächen eintreten muss. Auf solchen Flächen sind also dann alle geodätischen Linien nur bis zu einer gewissen Grenze, nämlich bis zum Berührungspunkte mit ihrer gemeinsamen Enveloppe kürzeste Linien. Für das dreiaxige Ellipsoid lässt sich eine solche Enveloppe auf folgende Art durch Gleichungen bestimmen:

Setzt man den Werth der Constanten u' in Gleichung (2) § 1.

*) Sur quelques propriétés des lignes géodésiques. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. t. 40, pag. 1311—1313.

dadurch fest, dass man die geodätische Linie durch den Punkt $\mu = \mu_0$, $\nu = \nu_0$ gehen lässt, so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$(19) \qquad \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{d(\mu^2)\,(\sigma^2 - \mu^2)}{M} \mp \int_{\nu_0^2}^{\nu^2} \frac{d(\nu^2)\,(\sigma^2 - \nu^2)}{N} = 0.$$

Hier hat man sich des unteren Zeichens zu bedienen, wenn μ und ν zugleich wachsen oder abnehmen, des oberen im Gegenfalle. Da durch den Parameter μ'^2, der in M und N auftritt, die einzelnen Linien des Büschels mit dem Mittelpunkte μ_0, ν_0 individualisirt sind, so hätte man obige Gleichung nach μ'^2 zu differentiiren und aus dem Differential und der vorliegenden Gleichung μ'^2 zu eliminiren, um die Gleichung der Enveloppe in elliptischen Coordinaten zu erhalten. Die durch Differentiation resultirende Gleichung ist:

$$(20) \qquad \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{(\sigma^2 - \mu^2)\,d(\mu^2)}{(\mu^2 - \mu'^2)\,M} \mp \int_{\nu_0^2}^{\nu^2} \frac{(\sigma^2 - \nu^2)\,d(\nu^2)}{(\mu'^2 - \nu^2)\,N} = 0,$$

und da eine Elimination natürlich explicite nicht möglich ist, so müssen uns die beiden Gleichungen (19) und (20) miteinander die Curve bestimmen.

Aus dem Büschel geodätischer Linien greifen wir jetzt eine heraus, für welche μ' zwischen den Grenzen $\nu = 0$ und $\nu = h$ liegen möge, dann ist $\nu_0 > \mu'$, und lässt man die Linie von einem Punkte beschreiben, der seine Bewegung in A beginnt, so wird, welche Werthe auch μ durchläuft, das erste Integral in (20) sein Zeichen beibehalten, da es für die angenommenen Grenzen von μ' weder Null noch unendlich werden kann. Setzt man also den Anfangswerth beider Integrale als positiv voraus und lässt den die Linie beschreibenden Punkt von A gegen den Hauptschnitt der mittleren und kleinen Axe emporsteigen, während er sich zugleich dem Hauptschnitte der grossen und kleinen Axe nähert, (in der Pfeilrichtung von A nach B in Fig. 2), so nimmt anfangs μ gegen h und ν gegen 0 ab, die beiden Integrale haben also gleiches, positives Zeichen, und folglich ist in (19) das obere Zeichen zu nehmen. Während nun das erste Integral stets positiv bleibt, wächst das zweite von Null für $\nu = \nu_0$ beginnend bis $+\infty$*) (für $\nu = \mu'$, Punkt B in Fig 2.), springt in diesem Punkte auf $-\infty$ über und langt in $\nu = \nu_0'$ (Punkt C) mit dem positiven

*) Das Integral wird in Folge des Factors $\frac{1}{(\mu'^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}$ für $\nu = \mu'$ unstetig und zwar von der Ordnung $\frac{3}{2}$, somit wechselt es in diesem Punkte sein Zeichen und springt von $+\infty$ auf $-\infty$ über.

Periodicitätsmodul $J_0 = 2\int_{\nu_0^2}^{\mu'^2} \frac{d(\nu^2)\,(\sigma^2-\nu^2)}{(\mu^2-\mu'^2)\,N}$ *) an. Hierbei bedeutet $\nu_0' = \nu_0$ den andern Zweig der Krümmungslinie ν_0, auf welchem der Ausgangspunkt A nicht liegt.

Zwischen $\nu = \mu'$ und $\nu = \nu_0'$ hat also das zweite Integral negative Werthe; die Gleichung (20) kann also nur für solche Werthe von ν befriedigt werden, welche *nach der Culmination der Linie in* $\nu = \mu'$ *und vor Erreichung der Krümmungslinie* ν_0' *liegen*, also liegt der Berührungspunkt X der betreffenden geodätischen Linie mit ihrer Enveloppe zwischen diesen Grenzen.

Unter allen Linien, die von A ausgehen, befindet sich eine, die die Krümmungslinie ν_0 in A berührt, für sie ist also $\mu' = \nu_0$; ich behaupte, ihr Berührungspunkt mit der Enveloppe tritt dann ein, wenn die Linie den zweiten Ast ν_0' der Krümmungslinie tangirt. Denn nimmt man μ' wenig verschieden**) von ν_0, so liegt, wie eben gezeigt, der Berührungspunkt dieser Linie mit der Enveloppe *nach* $\nu = \mu'$ und *vor* $\nu = \nu_0'$. Nähert sie sich also der in A tangirenden Geodätischen, so rückt μ' dem $\nu_0' = \nu_0$ unendlich nahe, und folglich nähert sich der Berührungspunkt X zugleich mit dem Punkte B immer mehr dem Punkte C auf der Krümmungslinie ν_0', um in der Grenze mit ihm auf ν_0' zusammenzufallen. Das Gleiche gilt natürlich auch für jene geodätische Linie des Büschels, welche in A die Krümmungslinie $\mu = \mu_0$ berührt; ihr Berührungspunkt mit der Enveloppe tritt dann ein, wenn die geodätische Curve den zweiten Ast μ_0' tangirt.

Nun scheiden aber diese beiden Geodätischen das Büschel in A gleichsam in 4 Quadranten, und da jede mit der Krümmungslinie μ_0' oder ν_0', wie unmittelbar einzusehen, zwei Berührungspunkte haben wird, da sie nach zwei Richtungen von A ausläuft, so sind hierdurch 4 Enveloppenpunkte bestimmt, die analog den vier Quadranten die Einhüllende in vier Theile scheiden werden. In der That: in jedem solchen Punkte schliessen sich zwei Zweige der Enveloppe *tangential* an die Krümmungslinie μ_0' resp. ν_0' an, da man von A aus zu der im Ausgangspunkte berührenden Curve zwei***) in verschiedene Quadranten auslaufende, ihr unendlich benachbarte Linien ziehen

*) Diesen Modul kann man durch partielle Integration so umgestalten, dass er für $\nu = \mu'$ nicht mehr ∞ wird; man erhält dann:

$$J_0 = \frac{2}{\mu'^2}\int_{\mu'^2}^{\nu_0^2} \frac{\nu}{\sqrt{\mu'^2-\nu^2}} \cdot \frac{(\sigma^2-\nu^2)(h^2-\nu^2)+(\sigma^2-h^2)(k^2-\nu^2)}{\sqrt{(\sigma^2-\nu^2)(k^2-\nu^2)^3(h^2-\nu^2)^3}}\, d(\nu^2),$$

und da $\mu' < \nu_0$ ist, so muss J_0 positiv sein.

**) Vergl. v. Mangoldt, a. a. O. pag. 48, Anmerk.

***) Vergl. § 1. am Ende.

kann, welche sich von zwei verschiedenen Seiten her an sie anschliessen (vergl. Fig. 2). Diese vier Punkte sind massgebend sowohl für die Gestalt als auch für die Lage der Enveloppe. Wir haben also zunächst ihre gegenseitige Stellung in's Auge zu fassen.

§ 7.

Aufstellung eines allgemeinen Satzes über die Lage des Berührungspunktes einer geodätischen Linie mit ihrer Enveloppe und Gestalt der letzteren.

Wir beweisen vorerst folgende Ungleichungen:

$$(21)\begin{cases} \text{(a)}\ 2\int_{k^2}^{h^2} \frac{\sqrt{\sigma^2-\mu^2}\,d(\mu^2)}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\mu^2-\nu_0^2)(\mu^2-h^2)\mu^2}} < 2\int_{\nu_0^2}^{0} \frac{\sqrt{\sigma^2-\nu^2}\,d(\nu^2)}{\sqrt{(k^2-\nu^2)(h^2-\nu^2)(\nu_0^2-\nu^2)\nu^2}}, \\ \qquad \text{wo } 0 < \nu_0 < h \text{ ist;} \\ \text{(b)}\ 2\int_{\mu_0^2}^{k^2} \frac{\sqrt{\sigma^2-\mu^2}\,d(\mu^2)}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\mu^2-\mu_0^2)(\mu^2-h^2)\mu^2}} < 2\int_{0}^{h^2} \frac{d(\nu^2)\sqrt{\sigma^2-\nu^2}}{\sqrt{(k^2-\nu^2)(h^2-\nu^2)(\mu_0^2-\nu^2)\nu}}, \\ \qquad \text{wo } k > \mu_0 > h \text{ ist.} \end{cases}$$

Dabei sind die Integrale so zu verstehen, dass die Integrationsvariable von der untern Grenze beginnend, die obere umläuft und wieder nach ihrem Ausgangspunkte zurückkehrt.

Um die erste Ungleichung zu beweisen, vergrössern wir das Integral links, indem wir statt $\sqrt{\sigma^2-\mu^2}$ $\sqrt{\sigma^2-h^2}$ setzen, während wir zur Verkleinerung des zweiten statt $\sqrt{\sigma^2-\nu^2}$ $\sqrt{\sigma^2-\nu_0^2}$ einführen. Hierdurch gehen die beiden Integrale in elliptische der ersten Gattung über. Um diese bezüglich ihrer Grösse zu vergleichen, setzen wir links $\mu^2 = \frac{h^2(k^2-\nu_0^2)-\nu_0^2(k^2-h^2)\,y}{k^2-\nu_0^2-(k^2-h^2)\,y}$ und rechts $\nu^2 = \frac{k^2\nu_0^2}{k^2-\nu_0^2-\nu_0^2 y}$; dann gehen sie beide in vollständige Integrale mit dem nämlichen Modul $\varkappa^2 = \frac{\nu_0^2(k^2-h^2)}{h^2(k^2-\nu_0^2)}$ über und unterscheiden sich nur durch die constanten Factoren, so dass man mit Benutzung der Jacobi'schen Bezeichnung für das vollständige Integral erster Gattung hat:

$$\frac{2}{h}\sqrt{\frac{\sigma^2-h^2}{k^2-\nu_0^2}}\,K < \frac{2}{\nu_0}\sqrt{\frac{\sigma^2-\nu_0^2}{k^2-\nu_0^2}}\,K,$$

was unmittelbar einleuchtet, da $\nu_0 < h$ vorausgesetzt wurde. Also muss um so mehr obige Ungleichung (a) bestehen.

Zum Beweise der zweiten Ungleichung sei das Integral links vergrössert, indem man statt $\sqrt{\sigma^2-\mu^2}$ $\sqrt{\sigma^2-\mu_0^2}$ einführt, und das Integral rechts verkleinert, indem man an Stelle von $\sqrt{\sigma^2-\nu^2}$ $\sqrt{\sigma^2-h^2}$ setzt. Macht man dann resp. die Substitutionen

$$\mu_2 = \frac{k^2\mu_0^2}{\mu_0^2 + (k^2 - \mu_0^2)\,y} \quad \text{und} \quad \nu^2 = -\frac{k^2h^2y}{k^2 - h^2 + h^2y},$$

so erhält man, wie oben, zwei elliptische Integrale mit dem gleichen Modul $\varkappa^2 = \frac{h^2(k^2 - \mu_0^2)}{\mu_0^2(k^2 - h^2)}$, und es besteht die Ungleichung:

$$\frac{2}{\mu_0}\sqrt{\frac{\sigma^2 - \mu_0^2}{k^2 - h^2}}\,K < \frac{2}{\mu_0}\sqrt{\frac{\sigma^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\cdot K,$$

da $\mu_0 > h$ ist. Somit ist auch die Richtigkeit der zweiten Ungleichheit um so mehr einleuchtend.

Verfolgt man jetzt die geodätische Linie, welche ν_0 im Ausgangspunkte A berührt, indem man den Zweig betrachtet, der von A aufwärts über den Hauptschnitt der grossen und kleinen Axe emporsteigt, so wird die eine Coordinate ν des die Linie beschreibenden Punktes von $\nu = \nu_0$ über $\nu = 0$ nach $\nu = \nu_0'$ laufen (vergl. Fig. 2), um ν_0' in A' zu tangiren, das zweite Integral in Gleichung (19) hat dann den Werth $2\int_{\nu_0^2}^{0} \frac{d(\nu^2)\sqrt{\sigma^2 - \nu^2}}{\sqrt{(k^2 - \nu^2)(h^2 - \nu^2)(\nu_0^2 - \nu^2)\nu^2}}$ erlangt; inzwischen muss aber die andere Coordinate des Punktes von $\mu = \mu_0$ über $\mu = h$ und $\mu = k$ nach $\mu = \mu_0'$ gelangt und diesen Werth bereits überschritten haben, da der bis zu $\mu = \mu_0'$ erlangte Integralwerth

$$2\int_{k^2}^{h^2} \frac{\sqrt{\sigma^2 - \mu^2}\,d(\mu^2)}{\sqrt{(k^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu_0^2)(\mu^2 - h^2)\mu^2}}$$

nach der ersten Ungleichung in (20) noch kleiner ist als

$$2\int_{\nu_0^2}^{\nu^2} \frac{d(\nu^2)\sqrt{\sigma^2 - \nu^2}}{\sqrt{(k^2 - \nu^2)(\nu_0^2 - \nu^2)(h^2 - \nu^2)\nu^2}},$$

den er doch erreichen soll. *Also kann der Berührungspunkt der geodätischen Linie mit ν_0', d. h. der eine dieser vier ausgezeichneten Enveloppenpunkte, erst dann auftreten, wenn die Linie μ_0' (von oben kommend) bereits durchsetzt hat**).

Genau ebenso zeigt sich, wenn man jenen Zweig der Linie in's Auge fasst, der von A abwärts dem Hauptschnitte der grossen und mittleren Axe zustrebt, dass derselbe von unten kommend μ_0' bereits durchsetzt hat, bevor er ν_0' berührt. *Die beiden Berührungspunkte der in*

*) Dieser Satz stimmt mit einem erst vor Kurzem in einer Abhandlung: „Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides", diese Annalen Bd. XX, pag. 160, von Herrn Staude veröffentlichten überein. Er war mir schon lange Zeit bekannt, und da mein Beweis sich wesentlich von dem dort pag. 161 gegebenen unterscheidet, so erlaubte ich mir, ihn mitzutheilen.

A die Krümmungslinie ν_0 tangirenden geodätischen Linie mit ν_0' oder die Berührungspunkte der Enveloppe mit dieser Krümmungslinie liegen somit zu verschiedenen Seiten der Krümmungslinie μ_0'.

Fasst man ferner jene Curve in's Auge, welche μ_0 im Ausgangspunkte berührt, und zwar den Zweig derselben, welcher sich von A gegen den Hauptschnitt der mittleren und kleinen Axe erstreckt, so muss μ, bis es die Linie μ_0' tangirt, von μ_0 über k nach μ_0' gegangen sein; somit hat das erste Integral in (19) den Werth

$$2\int_{\mu_0^2}^{k^2} \frac{d(\mu^2)\sqrt{\sigma^2-\mu^2}}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\mu^2-\mu_0^2)(\mu^2-h^2)\mu^2}}$$

erlangt. Damit nun aber auch das zweite Integral den gleichen Werth bekommt, darf ν von ν_0 über 0 und h laufend den Werth ν_0' noch nicht erlangt haben, da sonst das Integral auf

$$2\int_{0}^{h^2} \frac{d(\nu^2)\sqrt{\sigma^2-\nu^2}}{\sqrt{(k^2-\nu^2)(h^2-\nu^2)(\mu_0^2-\nu^2)\nu^2}}$$

angewachsen wäre, welcher Werth nach der zweiten Ungleichung in (21) grösser als

$$2\int_{\mu_0^2}^{k^2} \frac{d(\mu^2)\sqrt{\sigma^2-\mu^2}}{\sqrt{(k^2-\mu^2)(\mu^2-\mu_0^2)(\mu^2-h^2)\mu^2}}$$

ist. *Also tritt der fragliche Berührungspunkt der Linie mit μ_0' ein, bevor sie ν_0' schneidet.* Ganz ebenso folgt, dass der zweite Zweig der Linie, welcher von A gegen den Hauptschnitt der grossen und kleinen Axe strebt, μ_0' berührt, bevor er ν_0' erreicht. *Also liegen auch die zwei Berührungspunkte der Enveloppe mit μ_0' zu verschiedenen Seiten von ν_0'.*

Da nun die geodätischen Linien des Büschels continuirlich auf einander folgen, so sind diese vier charakteristischen Punkte durch vier Zweige mit einander verbunden und zwar zu einer ähnlichen sternförmigen Figur wie auf den Rotationsellipsoiden. Je ein solcher Zweig kommt durch alle diejenigen Linien zu Stande, welche von A aus in einen der oben erwähnten vier Quadranten eintreten. Dabei ist nach diesen Betrachtungen klar, dass sämmtliche geodätische Linien, die eine Krümmungslinie des Systemes ν tangiren, ihre Enveloppe erst dann berühren, wenn sie den Werth μ_0' überschritten haben, dass hingegen zwei unendlich benachbarte Linien des ersten Systems, welche eine Krümmungslinie μ berühren, schon zusammentreffen, bevor sie noch ν_0' erreicht haben. Die Linie durch die Kreis-

punkte, welche zu beiden Systemen gehört, geniesst natürlich auch beide Eigenschaften.

Geht eine geodätische Linie von einem Punkte der Krümmungslinie μ_0 oder ν_0 aus, berührt dann μ', das zum einen oder andern System gehören kann, durchschneidet μ_0 resp. ν_0 abermals und erstreckt sich bis zum zweiten Aste der Krümmunglinie μ_0' oder ν_0', so nenne ich das so beschriebene Stück der Linie *ihre halbe Periode**) (Fig 2 das Stück ABD). Mit Einführung dieser Bezeichnung kann man dann die durch obige Untersuchung gewonnenen Resultate in folgendem Satze vereinigen: *„Alle geodätischen Linien eines Ellipsoides, die von einem Punkte ausgehen, bilden eine Enveloppe und zwar treffen die Linien des ersten Systems ihre Enveloppe vor Vollendung ihrer halben Perioden, während dies für geodätische Linien des zweiten Systems erst nach Vollendung ihrer halben Perioden eintritt.“***)

§ 8.

Grenzen, bis zu welchen die drei Hauptschnitte des Ellipsoids kürzeste Linien sind.

Bezeichnet man der Kürze halber die drei Hauptschnitte mit ihren elliptischen Coordinaten (vergl. § 1.) und verlegt den Büschelmittelpunkt A in irgend einen Punkt des Axenschnittes $\mu = k$, so ist die Lage dieses Punktes auf demselben durch einen gewissen Werth ν_0 bestimmt. Die ν_0 im Ausgangspunkte berührende geodätische Linie tangirt dann ν_0' nach Vollendung ihrer halben Periode, die Enveloppe liegt symmetrisch in Bezug auf den Axenschnitt, zwei ihrer Spitzen befinden sich auf demselben, während die andern zwei auf ν_0' liegen. Rückt A in den Endpunkt der mittleren Axe, so fallen ν_0 und ν_0' mit $\nu = 0$ zusammen, und die zwischen ihnen sich bewegende geodätische Linie geht in den Axenschnitt selbst über, derselbe ist daher geodätische Linie; da er aber seine Enveloppe nach Vollendung seiner halben Periode, das heisst nachdem er $\mu = k$ durchsetzt hat, berührt, so ist er in einer Ausdehnung *kürzeste Linie*, die grösser als die halbe Peripherie der von ihm ausgeschnittenen Ellipse ist. Da ferner für dieselbe Lage von A μ_0 mit $\mu = k$ zusammenfällt, diese Linie aber vor Erreichung der halben Periode die Enveloppe berührt, so ist der Axenschnitt $\mu = k$ in einer Ausdehnung kürzeste Linie, die kleiner als der halbe Ellipsenumfang ist.

---

*) Vergl. meinen Aufsatz a. a. O. pag. 558.

**) Dieser Satz entspricht genau dem in meinem Aufsatze pag. 561 für beide Rotationsellipsoide gegebenen. Das dreiaxige Ellipsoid besitzt eben zwei Systeme geodätischer Linien, wovon das eine die Eigenschaften der Linien auf dem verlängerten, das andere die der Linien auf dem abgeplatteten Ellipsoide geniesst.

Wandert jetzt A auf $\nu = 0$ weiter, so wird seine Lage durch eine gewisse Krümmungslinie μ_0 festgelegt, und die Grenzpunkte, bis zu welchen die μ_0 berührende Geodätische kürzeste Linie ist, d. h. die auf ihr liegenden Enveloppenspitzen treten stets auf, bevor sie $\nu = 0$ wieder trifft. Langt daher A im Endpunkte der kleinen Axe an, so folgt, dass der Hauptschnitt $\mu = h$ von diesem Punkte aus gerechnet in einer kleineren Ausdehnung kürzeste Linie ist als der halbe Ellipsenbogen beträgt, während der Schnitt $\nu = 0$ die nämliche Eigenschaft behielt, die er für den Endpunkt der mittleren Axe als Ausgangspunkt der Linien besass.

Rückt der Büschelmittelpunkt auf $\mu = h$ gegen den Endpunkt der grossen Axe, so wird seine Lage bis zum Kreispunkte durch eine Coordinate $\nu = \nu_0$ bestimmt, und die Grenzpunkte der ν_0 berührenden Linie liegen also nach Vollendung der halben Perioden, d. h. nachdem die Linie bereits $\nu = h$ wieder durchschnitten hat, während die beiden andern Spitzen dem Hauptschnitte angehören und so liegen, dass derselbe stets in einer kleineren Ausdehnung kürzeste Linie ist, als die halbe Ellipsenperipherie; er rechnet ja von $\nu = 0$ bis $\nu = h$ zum Systeme der Krümmungslinien μ. Dabei zeigt sich ferner, dass die Enveloppe sich immer mehr zusammenzieht, bis A den Kreispunkt erreicht, in welchem Falle sämmtliche Geodätischen des Büschels A durch den entgegengesetzten Kreispunkt laufen, welcher dann die Enveloppe repräsentirt.

Bewegt sich A noch weiter gegen den Endpunkt der grossen Axe, so wird seine Lage durch einen Werth $\mu = \mu_0$ festgelegt, und folglich liegen die Spitzen auf der μ_0 tangirenden geodätischen Linie stets vor Vollendung der Periode, d. h. bevor sie $\mu = h$ zum zweiten Male trifft, während $\mu = h$ in einer die Länge des halben Ellipsenbogens übertreffenden Ausdehnung kürzeste Linie ist, da dieser Hauptschnitt vom Kreispunkte bis zum Endpunkte der grossen Axe der Schaar der Krümmungslinien ν angehört.

Fällt endlich der Büschelmittelpunkt mit dem Endpunkte der grossen Axe zusammen, so folgt, dass $\mu = k$ in einer Länge kürzeste Linie ist, die die halbe Ellipsenperipherie nicht erreicht.

Fassen wir diese Resultate in einen Satz, so folgt: *„Die beiden Hauptschnitte der grossen und mittleren, der mittleren und kleinen Axe sind von irgend einem ihrer Punkte aus gerechnet in einer Ausdehnung kürzeste Linien, welche bezüglich die halbe Ellipsenperipherie (dieser Schnitte) nicht erreicht oder übertrifft. Der Axenschnitt der grossen und kleinen Axe hingegen übertrifft als kürzeste Linie aufgefasst die halbe Ellipsenperipherie an Länge, wenn man von einem Punkte aus zählt, der dem durch zwei Kreispunkte begrenzten Stücke angehört, welches den Endpunkt der grossen Axe enthält, während er von seinen*

übrigen Punkten aus gerechnet in einer Länge, kleiner als der halbe Ellipsenumfang, kürzeste Linie ist."*)

§ 9.

Bestimmung der Enveloppe durch hyperelliptische Functionen.

Will man Gleichungen, um die einzelnen Punkte einer Enveloppe rechnerisch zu bestimmen, oder will man mit andern Worten angeben, wie weit irgend eine vorgelegte geodätische Linie, von irgend einem Punkte aus gerechnet kürzeste Linie ist, so kann man sich diese leicht folgendermassen verschaffen. Fasst man nämlich die Gleichungen in's Auge:

$$(22)\quad \begin{cases} \text{a)} & \displaystyle\int_{k^2}^{\mu^2} \frac{d(\mu^2)}{M} \pm \int_{h^2}^{\nu^2} \frac{d(\nu^2)}{N} = u, \\ \text{b)} & \displaystyle\int_{k^2}^{\mu^2} \frac{d(\mu^2)\,(\sigma^2-\mu^2)}{(\mu^2-\mu'^2)\,M} \mp \int_{h^2}^{\nu^2} \frac{d(\nu^2)\,(\sigma^2-\nu^2)}{(\mu'^2-\nu^2)\,N} = u'', \end{cases}$$

von denen die erste mit Gleichung (5) übereinstimmt, während die zweite mit Gleichung (19) zusammenfällt, indem die Constante u'' nur von der Wahl des Ausgangspunktes abhängt, so kann man mit Hilfe von a) die zweite Gleichung, die aus zwei hyperelliptischen Integralen zweiter Gattung besteht, in die Form bringen:

$$(23)\quad Av + A_1 w + c_1 \frac{\partial \log \vartheta \binom{1\,0}{0\,1}(v|w)}{\partial v} + c_2 \frac{\partial \log \vartheta \binom{1\,0}{0\,1}(v|w)}{\partial w} = C;^{**})$$

v und w hängen durch die Gleichungen (10) von u ab. Die Constanten lassen sich durch ϑ-Quotienten mit verschwindenden Argumenten ausdrücken in Verbindung mit den Grössen $\beta_{p,q}$ des § 3.***)

Giebt man nun einen bestimmten Werth von μ', d. h. wählt man eine geodätische Linie des Büschels aus, so sind damit die Constanten in Gleichung (23) bestimmt. Löst man daher diese Gleichung nach u auf und führt den gefundenen Werth u_0 in die Gleichungen (9) der geodätischen Linien ein, so hat man die rechtwinkligen Coordinaten des Berührungspunktes der Linie mit ihrer Enveloppe.

*) Diesem Satze entspricht ein ähnlicher für die beiden Rotationsellipsoide, lautend: „Der Aequatorkreis eines verlängerten Ellipsoides ist in einer Ausdehnung, kleiner als der Halbkreis, der Aequator eines Sphäroids aber in einer Länge, grösser als derselbe, kürzeste Linie.

**) Weierstrass a. a. O. pag. 995 giebt eine ähnliche Gleichung zur Bestimmung der Länge eines geodätischen Bogens.

***) Vergl. L. Schleiermacher: „Ueber die Bewegung eines schweren Punktes auf dem verlängerten Rotationsellipsoide". Inauguraldissertation, Erlangen, pag. 18.

§ 10.

Geodätische Linien auf dem zweischaligen Hyperboloide.

Auf dem zweischaligen Hyperboloide giebt es, wie auf dem Ellipsoide, zwei Schaaren Krümmungslinien, die von den confocalen Ellipsoiden und den einschaligen Hyperboloiden ausgeschnitten werden; die elliptischen Coordinaten eines Punktes der Fläche sind somit nach den Gleichungen (1) σ und μ, während ν constant bleibt*).

Die von den einschaligen Hyperboloiden ausgeschnittenen Krümmungslinien durchziehen die ganze Fläche und können analytisch durch das Unendliche von einem Mantel auf den andern fortgesetzt werden, während die Krümmungslinien des andern Systems geschlossene Curven sind, die auf je einem Mantel verlaufen. Für $\sigma = \mu = k$ erhält man den Axenschnitt $z = 0$ (vergl. pag. 559), d. h. derselbe gehört den Krümmungslinien beider Systeme an, während das eine System durch die Kreispunkte in das andere übergeht. Analytisch besteht also zwischen den Verhältnissen auf dem Hyperboloid und dem Ellipsoid bezüglich der Krümmungslinien kein Unterschied. Dasselbe gilt, wie man sich leicht überzeugt, von den geodätischen Linien. Die Differentialgleichung derselben ist:

$$\frac{(\sigma^2 - \nu^2)\, d(\sigma^2)}{S} \pm \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d(\mu^2)}{M} = 0,$$

wo:

$$S^2 = (\sigma^2 - k^2)(\sigma^2 - \mu'^2)(\sigma^2 - h^2)(\sigma^2 - \nu^2)\sigma^2,$$
$$M^2 = (\mu^2 - k^2)(\mu^2 - \mu'^2)(\mu^2 - h^2)(\mu^2 - \nu^2)\mu^2.$$

Sie zeigt, dass jede geodätische Linie auf der einen Flächenhälfte nach zwei Richtungen hin in's Unendliche läuft. Einer der beiden Zweige berührt seine zugehörige Krümmungslinie $\mu = \mu'$ oder $\sigma = \mu'$ auf derselben Flächenhälfte, wo er beginnt, während der zweite durch's Unendliche fortgesetzt den andern Ast der Krümmungslinie auf dem zweiten Flächenmantel tangirt. Betrachtet man also die beiden Flächenmäntel als zusammengehörig, so oscilliren die Linien ebenso um die Fläche wie im Falle des Ellipsoides.

Da nun $\mu' = k$ werden kann, so wird es auch eine Linie geben, die die Krümmungslinien der beiden Systeme zugleich berührt, was nur im Kreispunkte eintreten kann, und da ferner μ' für alle Punkte der Geodätischen constant bleibt, so folgt, dass auch auf dieser Fläche *die von einem Kreispunkte auslaufende Linie durch den entgegengesetzten Kreispunkt gehen muss.* Daraus ist es aber evident, dass sich zwei unendlich benachbarte geodätische Linien, die von einem Kreispunkte

*) Durch Herrn F. Klein wurde ich aufmerksam gemacht, dass es eine Collineation giebt, welche ein zweischaliges Hyperboloid und die geodätischen Linien auf ihm in ein Ellipsoid mit seinen geodätischen Linien verwandelt, woraus dann unmittelbar die Uebereinstimmung der folgenden Resultate mit den für das Ellipsoid gewonnenen ersichtlich ist.

auslaufen, niemals auf dem Flächenmantel schneiden können, auf welchem der Ausgangspunkt liegt. Dieser Satz wurde von Herrn v. Mangoldt in dem bereits in der Einleitung erwähnten Aufsatze durch Transformation der Gleichung (24) mit elliptischen Functionen (was für $\mu' = k$ möglich ist) analytisch bewiesen*). Nach seiner Bezeichnung sind dann die Kreispunkte Punkte erster Art, während er unter Punkten zweiter Art solche versteht, durch welche zwei unendlich benachbarte geodätische Linien gehen, die sich treffen, bevor sie das Unendliche erreichen.

§ 11.

Grenzcurve auf dem Hyperboloid für den Bereich der Punkte, die zu Enveloppen Anlass geben.

In meiner bereits mehrfach erwähnten Abhandlung habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass beim zweischaligen Rotationshyperboloide der Fall eintreten kann, dass die ganze Enveloppe, die ja immer existirt, wenn man die beiden Flächentheile als zusammengehörig betrachtet, ganz auf dem zweiten Flächenmantel liegt, der den Büschelmittelpunkt der erzeugenden geodätischen Linien nicht enthält. Im gewöhnlichen Falle hingegen liegt die dem Ausgangspunkt zugekehrte Spitze mit ihm auf demselben Mantel, während die andern drei sich auf der zweiten Flächenhälfte befinden. Der Zwischenfall ist natürlich dann vorhanden, wenn die dem Büschelmittelpunkt zunächst gelegene Spitze gerade auf den unendlich fernen Kreis der Fläche fällt. Der Büschelmittelpunkt, der zu einer solchen Enveloppe Anlass giebt, wird dann wegen der Symmetrie der Fläche stets auf einem gewissen Parallelkreise r_0 liegen, für dessen Berechnung ich damals eine Integralgleichung aufstellte**).

Herr von Mangoldt fasst nun in der angeführten Abhandlung nur einen Mantel der Fläche ins Auge und betrachtet nur diejenigen Schnittpunkte unendlich benachbarter geodätischer Linien, welche auf demselben Flächentheile mit dem Büschelmittelpunkte liegen. Deshalb ist für ihn der erwähnte Parallelkreis die Grenze, welche die Punkte erster und zweiter Art von einander trennt. Die Punkte erster Art liegen in dem den Scheitel der Fläche einschliessenden Theile, während die zweiter Art in dem äussern Raume liegen. Der Radius dieses Grenzkreises r_0 findet sich a. a. O. pag. 40 durch Einführung elliptischer Functionen berechnet. Die hierzu verwandte Gleichung unterscheidet sich nicht wesentlich von der erwähnten Gleichung in meinem Aufsatze.

Nun überzeugt man sich durch ähnliche Betrachtungen wie beim dreiaxigen Ellipsoide leicht, dass der Verlauf der Enveloppe auf dem dreiaxigen Hyperboloide mit zwei Mantelflächen wenig verschieden ist

*) v. Mangoldt a. a. O. pag. 49–52.

**) A. a. O. pag. 564.

von dem Verlauf derselben auf dem Rotationshyperboloide, so dass also auch auf jener Fläche eine Grenzcurve für die Lage der Punkte erster und zweiter Art existiren wird*). Die ungefähre Gestalt dieser Curve bei verschiedenen Axenverhältnissen der Fläche wurde von Herrn v. Mangoldt angegeben. Es lässt sich aber auch, und zwar ausgehend von denselben geometrischen Betrachtungen, die ich früher für das Rotationshyperboloid angestellt, eine Gleichung zur Bestimmung dieser Curve angeben.

Wie bei der Rotationsfläche, so erhält man auch hier die Punkte der Grenzcurve, wenn man fragt, welche Punkte als Büschelmittelpunkte geodätischer Linien genommen, Enveloppen erzeugen können, deren dem Ausgangspunkte zunächst gelegene Spitze gerade auf der unendlich fernen Krümmungslinie der Fläche liegt. Diese Krümmungslinie gehört natürlich zum Systeme σ. Die Spitze muss aber auch noch auf einer andern Krümmungslinie, nämlich auf μ_0' liegen, wenn μ_0' den Zweig von μ_0 bedeutet, auf welchem der Ausgangspunkt nicht liegt. Denn μ_0 wird ja im Büschelmittelpunkte von einer geodätischen Linie tangirt, deren Berührungspunkt mit $\mu_0' = \mu_0$ die Spitze festlegt (vergl. Ellipsoid § 6). Für alle Punkte der Grenzcurve liegt also μ_0 stets zwischen $\mu = k$ und $\mu = h$.

Die Integralgleichung der geodätischen Linien ist dann für σ_0 und μ_0 als Coordinaten des Ausgangspunktes:

$$\text{(25a)} \qquad \int_{\sigma_0^2}^{\sigma^2} \frac{(\sigma^2 - \nu^2)\, d(\nu^2)}{S} + \int_{\mu_0^2}^{\mu^2} \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d(\mu^2)}{M} = 0.$$

Da wir nur diejenige Linie ins Auge fassen, welche die μ_0 im Ausgangspunkte berührt, so haben wir statt μ' in dieser Gleichung μ_0 zu setzen, und da sich die auf $\mu_0' = \mu_0$ gelegene Spitze im Unendlichen befinden soll, so muss für sie $\sigma = \infty$ sein; ihre Lage bestimmt sich somit aus der Gleichung

$$\text{(25b)} \qquad \int_{\sigma_0^2}^{\infty} \frac{(\sigma^2 - \nu^2)\, d(\nu^2)}{S_0} + 2 \int_{\mu_0^2}^{h^2} \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d(\nu^2)}{N_0} = 0.$$

S_0 und N_0 sind die Werthe von S und N für $\mu' = \mu_0$. Lässt man in dieser Gleichung μ_0 alle Werthe von k bis h durchlaufen, so erhält man aus ihr jedesmal einen zugehörigen Werth σ_0, welcher mit μ_0 einen Punkt der Grenzcurve festlegt.

Es sei jetzt

$$\sigma^2 = \mu^2 = \frac{x(\mu_0^2 - h^2)\,\nu^2 - (\mu_0^2 - \nu^2)h^2}{x(\mu_0^2 - h^2) - (\mu_0^2 - \nu^2)}, \quad x^2 = \frac{\mu_0^2 - h^2}{\mu_0^2 - \nu^2} \cdot \frac{k^2 - \nu^2}{k^2 - h^2},$$

*) v. Mangoldt a. a. pag. 48.

$$\lambda^2 = \frac{\mu_0^2 - h^2}{\mu_0^2 - \nu^2}, \quad \varrho^2 = \frac{\mu_0^2 - h^2}{\mu_0^2 - \nu^2} \cdot \frac{\nu^2}{h^2}.$$

Dann geht (25b) über in

$$\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{x_1^0} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} - 2\int_1^0 \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = 0,$$

wo $X = x(1-x)\,(1-\varkappa^2 x)\,(1-\lambda^2 x)\,(1-\varrho^2 x)$ ist und x_1^0 dem Werthe σ_0 entspricht.

Um diese Gleichung nach x_1^0 aufzulösen, betrachten wir, wie in § 1, das Gleichungssystem:

$$(26)\qquad \begin{cases} \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{x_1} \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_1^{x_2} \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = u', \\ \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{x_1} \frac{(1-\lambda^2 x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} + \int_1^{x_2} \frac{(1-\lambda^2 x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}} = u. \end{cases}$$

Transformirt man die ϑ-Charakteristiken in den Gleichungen (8) § 2 auf die Anfangswerthe $x_1 = \frac{1}{\lambda^2}$, $x_2 = 1$, so erhält man aus den Gleichungen b), d) und e) folgende drei:

$$(27)\qquad \begin{cases} -\frac{\varkappa\lambda\varrho}{\varkappa_1\lambda_1\varrho_1}(1-x_1)\,(1-x_2) = \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)(v\,|\,w)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)(v\,|\,w)}, \\ \frac{\varkappa\varrho}{\lambda_1\varrho_1\lambda_\varkappa}(1-\lambda^2 x_1)\,(1-\lambda^2 x_2) = \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)(v\,|\,w)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)(v\,|\,w)}, \\ \frac{\varkappa\lambda}{\varrho_1\varrho_\varkappa\varrho_\lambda}(1-\varrho^2 x_1)\,(1-\varrho^2 x_2) = \frac{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)(v\,|\,w)}{\vartheta^2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)(v\,|\,w)}. \end{cases}$$

Macht man jetzt wieder die beiden unbeschränkt variablen Grössen v und w von u und u' abhängig, indem man

$$v = \beta_{1,1}u + \beta_{1,2}u',$$
$$w = \beta_{2,1}u + \beta_{2,2}u'$$

setzt, und die β auf dieselbe Art bestimmt, wie dies in § 3 für das Ellipsoid geschehen, so sind, da u' constant, ja in unserm Falle sogar Null ist, v und w nur mehr von der einen Variabeln u abhängig, und die obigen Formeln gehören den Punkten einer geodätischen Linie zu.

Die geodätische Linie, welche wir ins Auge fassen, berührt im Unendlichen die Krümmungslinie μ_0'; für diesen Punkt ist $x_1 = \frac{1}{\lambda^2}$, $x_2 = 1$, somit $u = 0$, und aus der ersten Formel (27) folgt $\vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix} (v \mid w) = 0$. Diese ϑ-Function verschwindet aber nicht bloss für $u = 0$, sondern so oft $\mu = \mu_0$ wird. Denkt man sich also jetzt umgekehrt die Linie im unendlich fernen Berührungspunkte mit $\mu_0'\left(x_1 = \frac{1}{\lambda^2},\ x_2 = 1\right)$ beginnend, so wird $\vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix} (v \mid w)$ alsbald verschwinden, wenn die geodätische Linie den andern Zweig μ_0 der Krümmungslinie tangirt, d. h. in dem gesuchten Punkte der Grenzcurve.

Bestimmt man also aus der Gleichung

$$\vartheta \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix} (v \mid w) = 0 \tag{28}$$

die Wurzel u_0, so legt diese den Schnittpunkt der Krümmungslinie μ_0 mit unserer Grenzcurve fest.

Ferner folgt aus der oben gebrauchten Substitution und der dritten und zweiten der Gleichungen (27)

$$\sigma = v \sqrt{\frac{h}{\mu_0}} \sqrt[4]{\frac{k^2 - \nu^2}{h^2 - \nu^2}} \cdot \frac{\vartheta \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix} (v \mid w)}{\vartheta \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 1\,1 \end{pmatrix} (v \mid w)}, \tag{29}$$

und u_0 in diese Gleichung eingeführt, liefert den verlangten Parameter σ_0, der mit μ_0 einen Punkt der Grenzcurve festlegt. Natürlich wäre es auch leicht, die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes als Functionen von u darzustellen.

Durch die Gleichungen (28) und (29) ist somit die Grenzcurve vollkommen bestimmt.

München im Juli 1882.

Ueber eine Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen.

Von

Leo Königsberger in Wien.

Sei eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln gegeben

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{1}$$

oder

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda} + f_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + \cdots + f_{\lambda}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \tag{2}$$

worin die Functionen $f_1, f_2, \cdots, f_{\lambda}$ rationale Functionen der Grössen $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ sind, und habe dieselbe ein particuläres Integral z_1 mit einer anderen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \tag{3}$$

oder

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\mu} + F_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\mu-1} + \cdots + F_{\mu}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \tag{4}$$

gemein, so wird, wenn man mit den linken Seiten der Gleichungen (2) und (4), als Polynome in $\frac{\partial z}{\partial y}$ aufgefasst, nach der Methode der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers verfährt, die Operation entweder zu einem gemeinsamen Theiler führen, welcher ein ganzes Polynom in $\frac{\partial z}{\partial y}$ ist, dessen Coefficienten rational aus $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ zusammengesetzt sind, oder es wird sich ein Rest ergeben, der selbst eine rationale Function von $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ ist. Im ersten Falle würde, wenn $\lambda \leq \mu$ angenommen wird, der Grad des grössten gemeinschaftlichen Theilers in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial y}$ kleiner oder gleich λ sein, im zweiten Falle müsste, da z_1 ein den Gleichungen (2) und (4) ge-

meinsames Integral sein sollte, eben diese Function eine rationale Function von $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ verschwinden lassen d. h. das Integral einer Differentialgleichung von der Form sein

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0. \tag{5}$$

Nehmen wir somit an, dass die Gleichung (2) in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial y}$ mit Adjungirung der Grössen $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}$ algebraisch irreductibel ist, und dass ferner das den Gleichungen (2) und (4) gemeinsame Integral nicht schon einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in z und x genügt, in welcher y nur als Parameter in algebraischer Verbindung erscheint, so wird bei der oben vollzogenen Operation der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers das Polynom (2) ganz in dem Polynome (4) enthalten sein müssen, und somit jedes Integral der Differentialgleichung (1) auch der Differentialgleichung (3) genügen. Wir erhalten somit den folgenden Satz:

Wenn zwei partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln ein Integral gemein haben, und es ist einerseits die eine dieser beiden Differentialgleichungen in Bezug auf den Differentialquotienten nach der einen Variabeln in algebraischem Sinne irreductibel, andererseits das gemeinsame Integral so beschaffen, dass es nicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung nach der anderen unabhängigen Variabeln genügt, in welcher die erste unabhängige Variable algebraisch enthalten ist, so wird die eine Differentialgleichung alle Integrale mit der anderen gemein haben.

So hat z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = z, \tag{6}$$

deren allgemeines Integral durch

$$z = e^x \varphi(y - x) \tag{7}$$

dargestellt wird, worin φ eine willkürliche Function bedeutet, das durch Specialisirung von

$$\varphi(y - x) = e^{-(y-x)}$$

hervorgehende particuläre Integral

$$z_1 = e^{2x-y} \tag{8}$$

mit der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = -2z^2 \tag{9}$$

gemein; da aber das Integral (8) auch schon der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = 2z$$

genügt, so wird nicht jedes Integral von (6) auch (9) genügen müssen, wie es z. B. in der That bei dem Integral $z = e^x(y - x)$ nicht der Fall ist. Andererseits erhält man durch passende Wahl der willkürlichen Function φ das particuläre Integral der Differentialgleichung (6)

(10) $$ze^{-y} = \log z - x,$$

welches wegen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{ze^{-y} - 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2 e^{-y}}{ze^{-y} - 1}$$

auch der partiellen Differentialgleichung genügt

(11) $$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2z\frac{\partial z}{\partial x} + z^2}{\frac{\partial z}{\partial x} - z}\frac{\partial z}{\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0;$$

da nun aber z, als Function von x in (10) aufgefasst, nicht einer in y algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet, weil

$$z\frac{\partial z}{\partial x}e^{-y} = \frac{\partial z}{\partial x} - z$$

oder

$$z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3$$

ist, ausserdem die Gleichung (6) in $\frac{\partial z}{\partial y}$ algebraisch irreductibel ist, so wird jedes Integral der Differentialgleichung (6) auch der Gleichung (11) genügen, wie dies z. B. für das Integral (8) der Fall ist; in der That lässt sich die linke Seite von (11) als ein Product in der Form darstellen

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - z\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial z}{\partial x} - z}\right).$$

Behalten wir nun die Differentialgleichung (1) bei, und habe dieselbe mit einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

(12) $$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}, \frac{\partial^m z}{\partial x^{m-1}\partial y}, \cdots, \frac{\partial^m z}{\partial y^m}\right) = 0$$

ein Integral z_1 gemein, so folgt aus (2) durch Differentiation nach x und y

(13) $$\left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + (\lambda - 1)f_1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2} + \cdots + f_{\lambda-1}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$
$$+ \varphi_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1} + \cdots$$
$$+ \varphi_\lambda\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 0$$

und

$$(14)\quad \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1}+(\lambda-1)f_1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2}+\cdots+{}_{\lambda-1}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$+\psi_1\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1}+\cdots$$
$$+\psi_\lambda\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=0,$$

oder mit Hülfe von (13)

$$(15)\quad \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1}+(\lambda-1)f_1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2}+\cdots+f_{\lambda-1}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$
$$+\chi\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

worin φ, ψ, χ rationale Functionen bedeuten. Differentiirt man ebenso (13) und (15) nach x und y, so erhält man

$$(16)\quad \begin{cases} \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1}+(\lambda-1)f_1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2}+\cdots+f_{\lambda-1}\right]\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} \\ \qquad +\omega_1\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x^3},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \\ \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1}+(\lambda-1)f_1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2}+\cdots+f_{\lambda-1}\right]\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} \\ \qquad +\omega_2\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \\ \left[\lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1}+(\lambda-1)f_1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2}+\cdots+f_{\lambda-1}\right]\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \\ \qquad +\omega_3\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0, \end{cases}$$

worin ω_1, ω_2, ω_3 wiederum rationale Functionen vorstellen u. s. w.

Setzt man nun die aus (13), (15), (16) u. s. w. entnommenen Werthe von

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},\ \cdots$$

in die Gleichung (12) ein, so geht dieselbe nach Multiplication mit einer entsprechenden Potenz des Ausdruckes

$$(\alpha)\qquad \lambda\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-1}+(\lambda-1)f_1\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\lambda-2}+\cdots+f_{\lambda-1}$$

in eine Gleichung von der Form über

$$(17)\quad F_0\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\cdots,\frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\mu}$$
$$+F_1\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\cdots,\frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\mu-1}+\cdots$$
$$+F_\mu\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\cdots,\frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)=0,$$

und da die Gleichungen (2) und (12), also auch (2) und (17) ein Integral gemein haben, so werden wir wieder ähnliche Schlüsse wie oben auf die beiden letzteren Gleichungen anwenden können.

Verfährt man nämlich mit den linken Seiten derselben nach der Methode der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers, so wird sich entweder allgemein für jedes z ein Polynom von der Form

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} &\varphi_0\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^\vartheta \\ &+\varphi_1\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\vartheta-1}+\cdots \\ &+\varphi_\vartheta\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right)=0 \end{aligned}$$

ergeben, welches ein Theiler von (2) und (17) ist, oder es bleibt bei der Fortsetzung der Division ein Rest von der Form

$$(\gamma) \qquad \omega\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \cdots, \frac{\partial^m z}{\partial x^m}\right),$$

worin ω eine rationale Function bedeutet. Nun kann aber das Polynom in $\frac{\partial z}{\partial y}$ auf der linken Seite der Gleichung (2) im algebraischen Sinne keinen Theiler von der Form (β) haben, indem einerseits die Ableitungen von z nach x genommen in (2) nicht von einer höheren als der ersten Ordnung vorkommen, andererseits (2) als in Bezug auf $\frac{\partial z}{\partial y}$ algebraisch irreductibel vorausgesetzt wird; ergiebt sich aber bei der oben angewandten Operation ein Rest von der Form (γ), so wird, wenn z_1 ein den beiden Differentialgleichungen (2) und (12), also auch — von Functionen, welche den Ausdruck (α) zu Null machen, abgesehen — ein den beiden Differentialgleichungen (2) und (17) gemeinsames Integral bedeutet, der Rest der Division, also der Ausdruck (γ), wenn $z = z_1$ gesetzt wird, verschwinden, und nimmt man daher an, dass z_1 nicht ein Integral sei, welches einer gewöhnlichen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit der unabhängigen Variabeln x genügt, in welcher y algebraisch enthalten ist, so wird jene Operation einen der Null identischen Rest liefern müssen und somit jedes Integral von (2) auch (12) befriedigen. Wir erhalten daher die folgende Verallgemeinerung des oben aufgestellten Satzes:

Wenn eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln mit einer partiellen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ein Integral gemein hat, und es ist jene Differentialgleichung erster Ordnung in Bezug auf den Differentialquotienten nach der einen Variabeln in algebraischem Sinne irreductibel, andererseits das gemeinsame Integral so beschaffen, dass es nicht schon einer gewöhnlichen Differential-

gleichung m^{ter} Ordnung nach der anderen unabhängigen Variabeln genügt, in welcher die erste unabhängige Variable algebraisch enthalten ist, so wird die partielle Differentialgleichung erster Ordnung alle Integrale mit derjenigen m^{ter} Ordnung gemein haben.

So wird z. B. die Differentialgleichung (6) mit der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(18) \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x} + z\right) + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$$

das particuläre Integral

$$z_1 = e^x[y - x + \log(y - x) + \sin(y - x)]$$

gemein haben, welches, wie leicht zu sehen, nicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung, sondern erst einer solchen dritter Ordnung von der Form genügt

$$\omega\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^3z}{dx^3}\right) = 0;$$

es folgt somit aus dem eben bewiesenen Satze, dass jedes Integral der Gleichung (6) der Gleichung (18) genügt, also z. B. das aus (7) specialisirte

$$z_2 = e^x[(y - x)^2 + \operatorname{tang}(y - x)],$$

wie durch Einsetzen unmittelbar sich ergiebt.

Man kann aber den oben bewiesenen Satz auch auf zwei beliebige partielle Differentialgleichungen ausdehnen, und es führt eine einfache Ueberlegung, die der oben angestellten ganz analog ist, zu folgendem Theorem:

Wenn eine partielle Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln mit einer partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung, worin $\nu \geqq \mu$ ist, ein Integral gemein hat, und es enthält die erstere Differentialgleichung den Differentialquotienten μ^{ter} Ordnung nach der einen Variabeln und ist in Bezug auf diesen in algebraischem Sinne irreductibel, während das gemeinsame Integral der Bedingung unterliegt, nicht einer partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung zu genügen, in welcher die partiellen Differentialquotienten, nach jener einen Variabeln genommen, die μ^{te} Ordnung nicht erreichen, so wird die partielle Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung alle Integrale mit der partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung gemein haben.

Wendet man endlich Betrachtungen an, wie ich sie in meiner Schrift: „Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" für gewöhnliche Differentialgleichungen eingehend erörtert habe, so kommt man zu dem folgenden noch allgemeineren Satze:

Besteht zwischen einem Integrale z_1 einer partiellen Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung und einem Integrale z_2 einer partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung, worin $\nu \geqq \mu$ ist, eine algebraische Be-

ziehung, in welche auch die unabhängigen Variabeln eintreten dürfen, und enthält die erstere Differentialgleichung den Differentialquotienten μ^{ter} Ordnung nach der einen Variabeln und ist in Bezug auf diesen in algebraischem Sinne irreductibel, während das Integral z_1 derselben der Bedingung unterliegt, nicht einer partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung zu genügen, in welcher die partiellen Differentialquotienten, nach jener einen Variabeln genommen, die μ^{te} Ordnung nicht erreichen, so bleibt jene algebraische Relation erhalten, wenn man für z_1 ein willkürliches Integral der Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung setzt, vorausgesetzt dass für z_2 ein passendes Integral der Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung substituirt wird,

und dieser Satz bleibt gültig, wenn in jene algebraische Beziehung auch noch die partiellen Differentialquotienten der Integrale z_1 und z_2 eintreten, und gestattet die gleichlautende Verallgemeinerung auf Systeme partieller Differentialgleichungen mit beliebig vielen unabhängigen Variabeln, zwischen deren Integralen algebraische Beziehungen stattfinden.

Ischl im August 1882.

Inhaltsverzeichniss der Bände 11—20.

	Band	Seite
P. Appell in Paris.		
Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions Eulériennes . . .	19,	84
P. Bachmann in Münster i. W.		
Ueber einige bestimmte Integrale	15,	424
Ergänzung einer Untersuchung von Dirichlet	16,	537
Ueber Galois' Theorie der algebraischen Gleichungen.	18,	528
A. V. Bäcklund in Lund.		
Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen	11,	199
Ueber Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung . . .	11,	412
Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen. (Zweite Abhandlung)	13,	69
Zur Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.	13,	411
Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. .	15,	39
Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung . .	17,	285
Zur Theorie der Flächentransformationen	19,	387
A. Beck in Riga.		
Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen	14,	207
T. Béla in Zürich.		
Ueber die Fläche vierter Ordnung mit Cuspidalkegelschnitt	19,	291
E. Bertini in Pavia.		
Système simultané de deux formes biquadratiques.	11,	30
L. Bianchi in Pisa.		
Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung	16,	577
Ueber die Normalformen dritter und fünfter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung	17,	234
D. Bobylew in Petersburg.		
Ueber die Vertheilung der Elektricität auf Leitern, welche aus heterogenen Theilen bestehen	13,	183
P. du Bois-Reymond in Tübingen.		
Zwei Sätze über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen. .	11,	145
Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls	11,	146
Note über die Integration totaler Differentialgleichungen	12,	123

	Band	Seite
Notiz über Convergenz von Integralen mit nicht verschwindendem Argument	13,	251
Ueber Integration und Differentiation infinitärer Relationen	14,	498
Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung	15,	283
Fortsetzung der Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung	15,	564
Ein allgemeiner Satz der Integrirbarkeitslehre	16,	112
Der Beweis des Fundamentalsatzes der Integralrechnung: $\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$	16,	115
Ueber den Satz $\lim f'(x) = \lim \frac{f(x)}{x}$	16,	550
Ueber Darstellungsfunctionen	18,	593
Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen	20,	122
A. von Braunmühl in München.		
Ueber Enveloppen geodätischer Linien	14,	557
Geodätische Linien und ihre Enveloppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades	20,	557
A. Brill in München.		
Ueber die Discriminante	12,	87
Ueber rationale Curven vierter Ordnung	12,	90
Ueber die Hesse'sche Curve	13,	175
Ueber eine Eigenschaft der Resultante	16,	345
Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies	16,	348
Ueber das Additionstheorem und das Umkehrproblem der elliptischen Functionen	17,	87
Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten	17,	103
Ueber die Wendepunkte der Curven vierter Ordnung mit Doppelpunkten. (Zweite Note)	17,	517
Ueber algebraische Raumcurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben	18,	95
Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades	20,	330
Ueber das Polvierseit	20,	531
F. Brioschi in Mailand.		
Extrait d'une lettre à M. F. Klein	11,	111
La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre	11,	401
Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade	13,	109
Ueber die Jacobi'sche Modulargleichung vom achten Grade	15,	241
G. E. A. Brunel in Paris.		
Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions	19,	37
F. de Bruno in Turin.		
Sur la partition des nombres	14,	241
Trois Notes sur la théorie des formes	18,	280
H. Bruns in Leipzig.		
Ueber eine Minimumsaufgabe	20,	455

	Band	Seite
L. Burmester in Dresden.		
Ueber die Festlegung projectiv-veränderlicher ebener Systeme	14,	472
Ueber das bifocal-veränderliche System	16,	89
G. Cantor in Halle a. d. S.		
Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. I.	15,	1
Bemerkung über trigonometrische Reihen	16,	113
Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen	16,	267
Zur Theorie der zahlentheoretischen Functionen	16,	583
Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. II.	17,	355
Ueber ein neues und allgemeines Condensationsprincip der Singularitäten von Functionon	19,	588
Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. III.	20,	113
A. Cayley in Cambridge.		
On the theory of Partial Differential Equations	11,	194
Note on the theory of Elliptic Integrals	12,	143
On some formulae in Elliptic Integrals	12,	369
A theorem on groups	13,	561
On the correspondence of Homographies and Rotations	15,	238
Note on Riemann's paper „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation" Werke pp. 331—344.	16,	81
On the finite Groups of linear Transformations of a Variable.	16,	260
Correction to the Paper „On the finite Groups of linear Transformations of a Variable"	16,	439
On a theorem relating to the Multiple Thetafunctions	17,	115
E. B. Christoffel in Strassburg i. E.		
Bemerkungen zur Invariantentheorie.	19,	280
L. Cremona in Rom.		
Ueber die Polar-Hexaeder bei den Flächen dritter Ordnung	13,	301
C. Crone in Kopenhagen.		
Sur la distribution des tangentes doubles sur les divers systèmes de coniques ayant un contact quadruple avec une courbe du quatrième ordre	12,	561
V. Dantscher in Graz.		
Bemerkungen zum analytischen Beweise des cubischen Reciprocitätsgesetzes	12,	241
G. Darboux in Paris.		
Sur le théorème fondamental de la géométrie projective	17,	55
G. Dillner in Upsala.		
Versuch einer neuen Entwicklung der Hamilton'schen Methode, genannt „Calculus of Quaternions"	11,	168
W. Dyck in Leipzig.		
Ueber Untersuchung und Aufstellung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen	17,	473
Notiz über eine reguläre Riemann'sche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige „Normalcurve" vierter Ordnung.	17,	510

	Band	Seite
Versuch einer übersichtlichen Darstellung der Riemann'schen Fläche, welche der Galois'schen Resolvente der Modulargleichung für Primzahltransformation der elliptischen Functionen entspricht	18,	507
Gruppentheoretische Studien	20,	1

A. Enneper in Göttingen.

Ueber einige elliptische Integrale	11,	567
Ueber eine Gleichung zwischen Thetafunctionen	17,	213
Zur Theorie der Curven doppelter Krümmung	19,	72

J. Freyberg in Dresden.

Die Gleichung für die Berührungspunkte der Doppeltangenten der Curve 4. Ordnung	17,	329

von Gall in Mainz.

Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung.	17,	31
Ueber das vollständige System einer binären Form achter Ordnung. (Zweiter Aufsatz)	17,	139
Auszug aus einem Brief an die Redaction der Annalen	17,	456

J. Gierster in Bamberg.

Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad	14,	537
Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. (Erste Note)	17,	71
——— (Zweite Note)	17,	74
Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades	18,	319

P. Gordan in Erlangen.

Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen	12,	23
Binäre Formen mit verschwindenden Covarianten	12,	147
Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade	13,	375
Ueber das volle Formensystem der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$	17,	217
Ueber die typische Darstellung der ternären biquadratischen Form $f = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$	17,	359
Ueber Büschel von Kegelschnitten	19,	529
Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form $f = x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1$	20,	487
Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen	20,	515

H. Grassmann†.

Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre	12,	222
Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre	12,	375
Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten. (Mit einem Verzeichnisse sämmtlicher Schriften Grassmann's)	14,	1

H. E. Grassmann.

Zur Theorie der reciproken Radien	13,	559

	Band	Seite
J. Hahn in Bensheim.		
Untersuchung der Kegelschnittnetze, deren Jacobi'sche Form oder Hermite'sche Form identisch verschwindet	15,	111
G. H. Halphen in Paris.		
Sur la Théorie des Charactéristiques pour les Coniques	15,	16
Recherches sur les courbes planes du troisième degré	15,	359
H. Hankel†.		
Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. (Abdruck aus dem Gratulationsprogramm der Tübinger Universität vom 6. März 1870)	20,	63
A. Harnack in Dresden.		
Ueber die Darstellung der Raumcurve vierter Ordnung erster Species und ihres Secantensystemes durch doppelt periodische Functionen	12,	47
Bemerkungen zur Geometrie auf den Linienflächen vierter Ordnung. .	13,	49
Ueber eine Eigenschaft der Coefficienten in der Taylor'schen Reihe	13,	555
Notiz über die algebraische Parameterdarstellung der Schnittcurve zweier Flächen 2^{ter} Ordnung	15,	560
Ueber die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen	17,	123
Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe	19,	235
Berichtigung zu diesem Aufsatze	19,	524
F. Herstowski in Breslau.		
Zur Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen	11,	1
W. Hess in München.		
Ueber das Gyroskop	19,	121
Ueber das Problem der Rotation	20,	461
F. Hofmann in München.		
Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Theorie der Potenzreste, sowie über die Erweiterung des Congruenzbegriffes	20,	471
O. Hölder in Stuttgart.		
Beweis des Satzes, dass eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlich singulären Stelle jedem Werth beliebig nahe kommt	20,	138
Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze.	20,	535
E. Holst in Christiania.		
Ein paar allgemeine metrische Sätze für algebraische Curven.	11,	341
Nachtrag zu diesem Aufsatze	11,	575
G. Holzmüller in Hagen.		
Vollständige Durchführung einer isogonalen Verwandtschaft, die durch eine gebrochene Function zweiten Grades repräsentirt wird	18,	289
A. Hurwitz in Göttingen.		
Ueber unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über die Schliessungsprobleme.	15,	8
Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe . . .	18,	528
Ueber die Anwendung der elliptischen Functionen auf Probleme der Geometrie	19,	56

	Band	Seite
Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen	19,	67
Ueber eine Reihe neuer Functionen, welche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen ganzzahliger linearer Transformationen bilden	20,	125
Beweis eines Satzes aus der Theorie der Raumcurven III. Ordnung	20,	135

E. Jürgens in Halle a. d. S.

Das Integral $\int_a^\beta \frac{ydz}{x-z}$ und die linearen Differentialgleichungen	19,	435

S. Kantor in Prag.

Zur Geometrie von Punktgruppen auf dem Kreise	14,	323
Bemerkungen zu Herrn Sturm's Abhandlung „Ueber die reciproke Verwandtschaft und damit zusammenhängende Verwandtschaften“	20,	297

F. Klein in Leipzig.

Ueber lineare Differentialgleichungen	11,	115
Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades. (Zweiter Aufsatz)	11,	293
Ueber lineare Differentialgleichungen	12,	167
Weitere Untersuchungen über das Ikosaëder	12,	503
Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades	14,	111
Ueber die Erniedrigung der Modulargleichungen	14,	417
Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen	14,	428
Ueber Multiplicatorgleichungen	15,	86
Ueber die Auflösung gewisser Gleichungen vom siebenten und achten Grade	15,	251
Ueber die Transformation elfter Ordnung der elliptischen Functionen	15,	533
Ueber die geometrische Definition der Projectivität auf den Grundgebilden erster Stufe	17,	52
Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen	17,	62
Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung	17,	133
Ueber gewisse Theilwerthe der Θ-Functionen	17,	565
Bemerkung über Flächen vierter Ordnung	18,	160
Ueber Lamé'sche Functionen	18,	237
Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind	18,	410
Ueber die conforme Abbildung von Flächen	19,	159
Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich	19,	565
Ueber eindeutige Functionen mit linearen Substitutionen in sich. (Zweite Mittheilung)	20,	49

J. König in Budapest.

Ueber rationale Functionen von n Elementen und die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen	14,	212
Ein Beweis des Multiplicationstheorems für Determinanten	14,	507
Die Factorenzerlegung ganzer Functionen und damit zusammenhängende Eliminationsprobleme	15,	161
Ueber Reihenentwicklung nach Bessel'schen Functionen	17,	85

	Band	Seite
Ueber endliche Formensysteme in der Theorie der rationalen Functionen	18,	69
Zur Theorie der Resolventen	18,	78

L. Königsberger in Wien.

Ueber die Reduction hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen	11,	119
Reduction des Transformationsproblems der hyperelliptischen Integrale	13,	540
Ueber die Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische und hyperelliptische	15,	174
Erweiterung des Abel'schen Satzes von der Form der algebraisch-logarithmisch ausdrückbaren Integrale algebraischer Functionen	17,	561
Ueber eine Eigenschaft der partiellen Differentialgleichungen	20,	587

A. Köpcke in Hamburg.

Zur Discussion der Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit	12,	387

A. Korkine in Petersburg.

Sur les formes quadratiques positives. (Zus. mit G. Zolotareff)	11,	242

Korteweg in Breda.

Zur Theorie der elektrischen Kräfte	16,	533

L. Kraus in Prag.

Note über aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebraischen Curven	16,	245

M. Krause in Rostock.

Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen	12,	1
Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendungen auf die Zahlentheorie	12,	419
Ueber die Transformation fünften Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung	16,	83
Ueber die lineare Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung	17,	435
Ueber die Multiplication der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung	17,	448
Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation dritten Grades	19,	103
Ueber die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung	19,	423
Ueber die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. (Fortsetzung)	19,	489
Ueber Multiplicatorgleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung	20,	54
Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation fünften Grades	20,	226

R. Krause in Chemnitz.

Ueber ein Gebilde der analytischen Geometrie des Raumes, welches dem Connexe zweiter Ordnung und erster Classe entspricht	14,	294

H. Krey in Freiburg i. Br.

Note über ein Eliminationsproblem	12,	476
Ueber singuläre Tangenten algebraischer Flächen	15,	211
Ueber einen besonderen Fall des eindeutigen Entsprechens der Punkte zweier Flächen	18,	82
Ueber Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten	19,	497

	Band	Seite
G. Leonhardt in Stettin.		
Integraleigenschaften der adjungirten Kegelfunctionen	19,	578
S. Lie in Christiania.		
Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. (Zweite Abhandlung)	11,	464
Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. I. Projectivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen	14,	331
Beiträge zur Theorie der Minimalflächen. II. Metrische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen	15,	465
Theorie der Transformationsgruppen I	16,	441
Untersuchungen über geodätische Curven	20,	357
F. Lindemann in Freiburg i. Br.		
Entwicklung der Functionen einer complexen Variabeln nach Lamé'schen Functionen und nach Zugeordneten der Kugelfunctionen	19,	323
Ueber das Verhalten der Fourier'schen Reihe an Sprungstellen	19,	517
Ueber die Zahl π	20,	213
E. Lommel in Erlangen.		
Zur Theorie der Bessel'schen Functionen	14,	510
Zur Theorie der Bessel'schen Functionen	16,	183
J. Lüroth in München.		
Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. (Zweite Abhandlung)	11,	84
Ueber cyklisch-projectivische Punktgruppen in der Ebene und im Raume	13,	305
Neuer Beweis des Satzes, dass nicht jeder Curve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann	13,	548
H. von Mangoldt in Göttingen.		
Ueber eine charakteristische Eigenschaft der developpabeln Flächen	18,	604
A. Markoff in Petersburg.		
Sur les formes quadratiques binaires indéfinies	15,	381
Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. (Second mémoire)	17,	379
Sur une question de Jean Bernoulli	19,	27
W. Marx in München.		
Synthetischer Nachweis des Euler'schen Satzes über Krümmungsradien	17,	110
A. Mayer in Leipzig.		
Ueber den Multiplicator eines Jacobi'schen Systems	12,	132
Ueber den allgemeinsten Ausdruck der inneren Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welcher sich aus dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergiebt	13,	20
Die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale in den isoperimetrischen Problemen	13,	53
Ueber die allgemeinen Integrale der dynamischen Differentialgleichungen und ihre Verwerthung durch die Methoden von Lie	17,	332
Zur Pfaff'schen Lösung des Pfaff'schen Problems	17,	523
F. G. Mehler in Elbing.		
Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung	18,	161
Zur Theorie der Vertheilung der Elektricität in leitenden Körpern	18,	469

Meissel in Kiel.

	Band	Seite
Beitrag zur Sphärik	15,	380
Beiträge zur Sphärik	16,	529

P. Meutzner in Meissen.

Sätze über reguläre Polygone	13,	566

K. Nagel in Ossenheim.

Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung	19,	433

E. Netto in Strassburg i. E.

Neuer Beweis eines Fundamentaltheorems aus der Theorie der Substitutionslehre	13,	249
Bemerkung über Abel'sche Gleichungen	18,	247

C. Neumann in Leipzig.

Ueber correspondirende Flächenelemente	11,	306
Ueber die Zuverlässigkeit des Ampère'schen Gesetzes	11,	309
Ueber die gegen das Weber'sche Gesetz erhobenen Einwände	11,	318
Die Zerlegung und Zusammensetzung der unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers als Hülfsmittel bei Aufstellung der dynamischen Differentialgleichungen	11,	379
Zur Theorie des Logarithmischen und des Newton'schen Potentials	11,	558
Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential. (Leipzig 1877.) Referat des Verfassers	13,	255
Ueber die Zusammensetzung der nach dem Weber'schen Gesetz sich ergebenden Beschleunigungen	13,	571
Zur Theorie der conformen Abbildung einer ebenen Fläche auf eine Kreisfläche	13,	573
Neue Sätze über das Logarithmische Potential	16,	409
Neue Sätze über das Newton'sche Potential	16,	432
Die Principien der Elektrodynamik	17,	400
Ueber die Mehler'schen Kegelfunctionen und deren Anwendung auf elektrostatische Probleme	18,	195

F. Neumann in Königsberg i. Pr.

Ueber eine neue Eigenschaft der Laplace'schen $Y^{(n)}$ und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind. (Aus Schumacher's Astronomischen Nachrichten, 1838)	14,	567

M. Noether in Erlangen.

Zur Eliminationstheorie	11,	571
Zur Theorie der Thetafunctionen von vier Argumenten	14,	248
Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung	15,	89
Ueber die Schnittpunktssysteme einer algebraischen Curve mit nicht-adjungirten Curven	15,	507
Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten	16,	270
Notiz über eine Classe symmetrischer Determinanten	16,	551
Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen	17,	263
Note über die algebraischen Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen	20,	59

Th. von Oppolzer in Wien. Band Seite

Ueber einige Relationen zwischen den Combinationssummen der Quadrate der geraden und ungeraden Zahlen 13, 405

H. d'Ovidio in Turin.

Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimensions et de courbure constante 12, 403

C. le Paige in Lüttich.

Sur une propriété des formes algébriques préparées 15, 206

M. Pasch in Giessen.

Ueber die rationalen Curven 18, 91

Notiz über ternäre Formen mit verschwindender Functionaldeterminante 18, 93

Ueber die Umkehrung des elliptischen Integrales 19, 155

E. Picard in Paris.

Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres 19, 569

H. Poincaré in Paris.

Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaires 19, 553

Sur les Fonctions Uniformes qui se reproduisent par des Substitutions Linéaires 20, 52

Preisaufgaben

der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig

für das Jahr 1879 . . . . . 12, 575

für das Jahr 1881 . . . . . 13, 575

für das Jahr 1885 . . . . . 20, 146

A. Pringsheim in München.

Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen, insbesondere derjenigen dritter Ordnung ($\varrho = 4$) 12, 435

J. Ptaszycki in Petersburg.

Extrait d'une lettre à M. C. Neumann 16, 264

O. Rausenberger in Frankfurt a. M.

Theorie der allgemeinen Periodicität 18, 379

Notiz zur Theorie der Modulfunctionen 20, 45

Zur Theorie der Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden 20, 47

Ueber eindeutige Functionen mit mehreren, nicht vertauschbaren Perioden I. 20, 187

Ueber periodische Functionen zweiter Gattung 20, 550

C. Rodenberg in Darmstadt.

Zur Classification der Flächen dritter Ordnung 14, 46

K. Rohn in Leipzig.

	Band	Seite
Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche	15,	315
Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche	18,	99

J. Rosanes in Breslau.

Zur Theorie der Kegelschnitte	17,	21

O. Rupp in Brünn.

Ueber die Abhängigkeit der Charaktere einer durch Leitcurven bestimmten Regelfläche von den Charakteren dieser Leitcurven	18,	366

W. Scheibner in Leipzig.

Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in der Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors nach der mittleren Anomalie	17,	531
Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwickelungen	17,	545

F. Schottky in Breslau.

Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich	20,	299

E. Schröder in Carlsruhe.

Note über den Operationskreis des Logikcalculs	12,	481

H. Schröter in Breslau.

Ueber das Parallelhexagon auf dem geradlinigen Hyperboloid	18,	428
Ueber cyklisch-projective Punktquadrupel in zwei collinearen Räumen	20,	231

H. Schubert in Hamburg.

Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche	11,	347
Das Correspondenzprincip für Gruppen von n Punkten und von n Strahlen	12,	180
Singularitäten des Complexes n^{ten} Grades	12,	202
Die fundamentalen Anzahlen und Ausartungen der cubischen Plancurven nullten Geschlechts. (Zweite Abhandlung der „Beiträge zur abzählenden Geometrie")	13,	429
Beschreibung der Ausartungen der Raumcurve dritter Ordnung	15,	529
Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei ein-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven	16,	180
Anzahlgeometrische Behandlung des Dreiecks	17,	153
Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden	17,	457
Bemerkung zu der Bestimmung der Anzahl der Torsallinien einer Regelfläche	17,	575

F. Schur in Leipzig.

Geometrische Untersuchungen über Strahlencomplexe ersten und zweiten Grades	15,	432
Zur Theorie der Strahlencomplexe zweiten Grades	17,	107
Ueber die durch collineare Grundgebilde erzeugten Curven und Flächen	18,	1
Ueber den Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie	18,	252
Ueber besondre Lagen zweier Tetraeder	19,	429
Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung	20,	254

	Band	Seite
O. Simony in Wien.		
Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie	19,	110
N. Sonine in Warschau.		
Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries	16,	1
O. Staude in Leipzig.		
Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides	20,	147
Ueber geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid	20,	185
O. Stolz in Innsbruck.		
Allgemeine Theorie der Asymptoten der algebraischen Curven	11,	41
Ueber die Grenzwerthe von Quotienten	14,	231
Die Multiplicität der Schnittpunkte zweier algebraischer Curven	15,	122
Ueber die Grenzwerthe der Quotienten	15,	556
B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung	18,	255
R. Sturm in Münster i. W.		
Ueber correlative oder reciproke Bündel	12,	254
Vereinfachung des Problems der räumlichen Projectivität	15,	407
Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften	19,	461
Ueber das Geschlecht von Curven auf Kegeln	19,	487
A. Thaer in Berlin.		
Ueber die Zerlegbarkeit einer ebenen Linie dritter Ordnung in drei gerade Linien	14,	545
H. Thieme in Posen.		
Zur Construction des Polarsystems einer Fläche 3. Ordnung	20,	144
J. Thomae in Jena.		
Ueber die algebraischen Functionen, welche zu gegebenen Riemann'schen Flächen gehören	18,	443
E. Toeplitz in Breslau.		
Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung	11,	434
G. Veronese in Padua.		
Die Anzahl der unabhängigen Gleichungen, die zwischen den allgemeinen Charakteren einer Curve im Raume von n Dimensionen stattfinden	18,	446
Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens	19,	161
A. Voss in Dresden.		
Ueber die Haupttangentencurven der windschiefen Flächen	12,	485
Ueber gewisse Determinanten	13,	161
Ueber vier Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung	13,	168
Ueber Raumcurven und Developpabele	13,	232
Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen	13,	320
Zur Theorie der linearen Connexe	15,	355
Zur Theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke und der Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten	16,	129
Geometrische Interpretation der Differentialgleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$	16,	556

	Band	Seite
Zur Untersuchung der Fläche der Centra	16,	560
Zur Theorie des Riemann'schen Krümmungsmasses	16,	571
Ueber ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen	19,	1

L. Wedekind in Carlsruhe.

Lagenbeziehungen bei ebenen perspectivischen Dreiecken	16,	209
Das Doppelverhältniss und die absolute Invariante binärer biquadratischer Formen	17,	1

H. Weber in Königsberg i. Pr.

Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle	13,	35
Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit	14,	173
Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist	20,	301

G. Westphal in Berlin.

Ueber das simultane System zweier quarternären Formen 2^{ten} Grades und eine allgemeine algebraische Parameterdarstellung der Raumcurve 4^{ter} Ordnung $p = 1$	13,	1

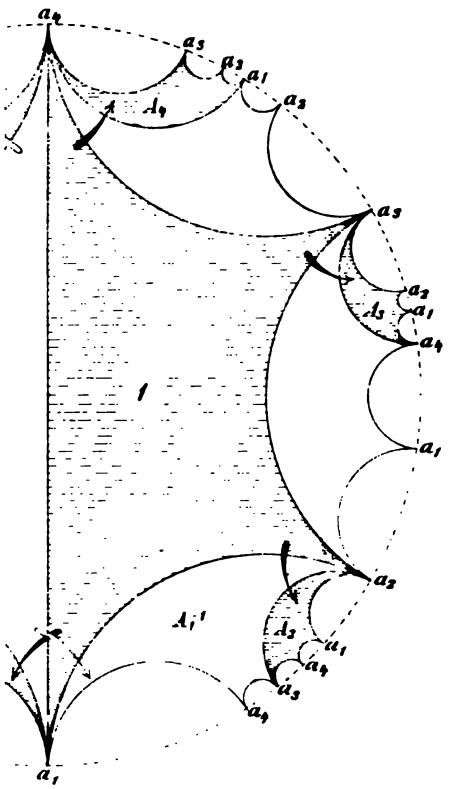
H. G. Zeuthen in Kopenhagen.

Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre	18,	33

G. Zolotareff in Petersburg.

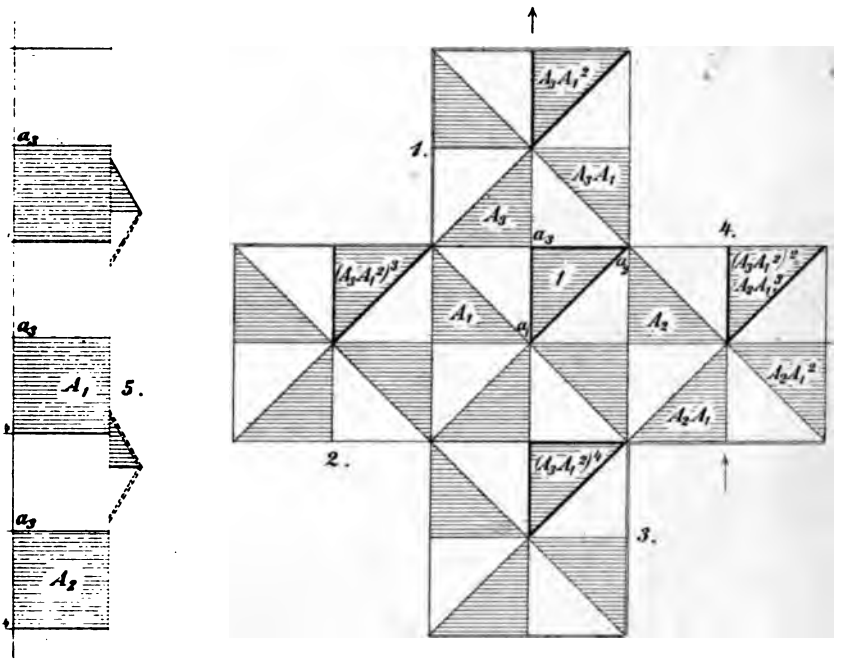
Sur les formes quadratiques positives. (Zus. mit A. Korkine)	11,	242

Fig. 2.



W. Dyck *Mathematische Annalen. Band.*

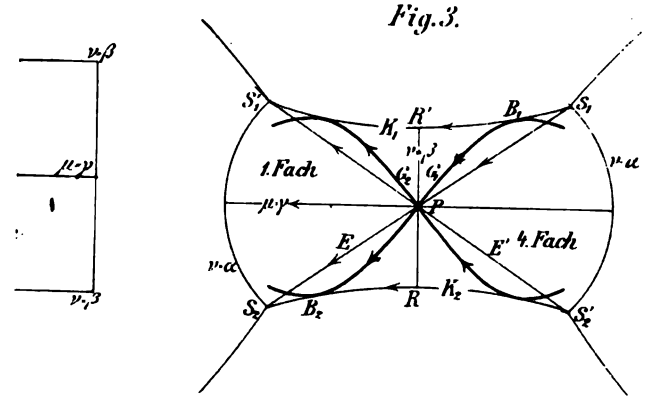
Fig. 3.



Zusammengehörigkeit der Kanten:

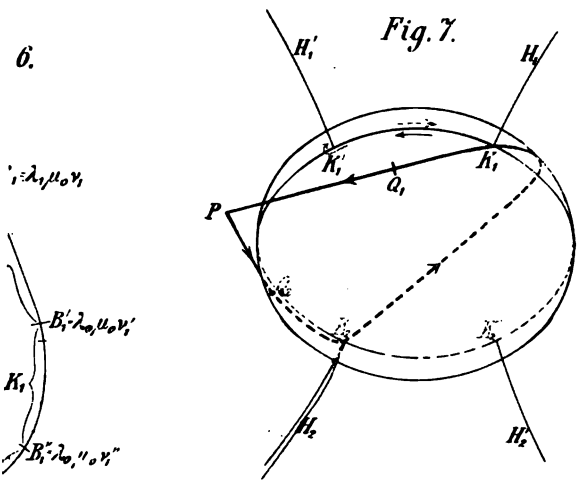
1 – 3 2 – 4

Fig. 3.



6.

Fig. 7.



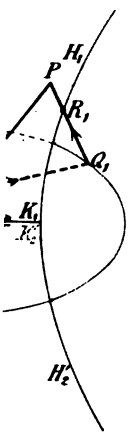
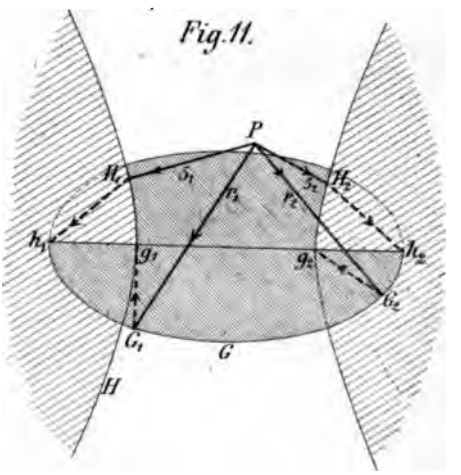


Fig. 11.



To avoid fine, this book should be returned on or before the date last stamped below

PHYSICS & MATH. STAT.

20M-2-60-92674

MATHEMATICS/STATISTICS
LIBRARY
STORAGE AREA

510
MH2
1c1.2
1c2